

І. Дияк І.І., Коссяк О.С., Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Расчет и оптимизация термонапряжений в паянных силовых полупроводниковых приборах // Теорет. електротехника. Львов, 1990. Вып. 48. С.24-28. 2. Коваленко А.Д. Избранные труды. К.: Наук. думка, 1976. 762 с. 3. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с. 4. Соболев И.М., Стятников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981. 110 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.94

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОГО ТА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ НА БАЗІ ПЕРСОНАЛЬНИХ КОМП'ЮТЕРІВ

Нехай Z і R - декартові координати довільної точки евклідового простору R^2 за умови, що $R \geq 0$. Припустимо, що інформація про геометрію зарядженого електрода подається за допомогою параметричних рівнянь $Z = Z(\tau)$, $R = R(\tau)$ ($\alpha \leq \tau \leq \beta$), які описують деяку незамкнену криву L , розташовану в півплощині $R \geq 0$. Ця крива є твірною певної циліндричної поверхні S , на якій задається граничне значення потенціалу U_0 . Електростатичне поле, утворене зарядженою поверхнею S , є осесиметричним і цілком характеризується своїми значеннями в точках півплощини $R \geq 0$. Припустимо також, що $Z(\tau), R(\tau) \in C^1[\alpha, \beta]$, як мінімум.

Відповідна математична модель, побудована на основі теорії потенціалу, дає змогу подати поле в будь-якій точці $(\bar{Z}, \bar{R})$, $\bar{R} \geq 0$, за формулою [1, 6, 7]

$$U(\bar{Z}, \bar{R}) = \int_{\alpha}^{\beta} q(\tau) R(\tau) K(k) \{ [R(\tau) + \bar{R}]^2 + [Z(\tau) - \bar{Z}]^2 \}^{-1/2} M(\tau) d\tau, \quad //I/$$

де $q(\tau)$ - густина розподілу зарядів уздовж L ; $K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \gamma)^{-1/2} d\gamma$ - повний еліптичний інтеграл першого роду, причому $k^2 = 4 R(\tau) \cdot \bar{R} \times \{ [R(\tau) + \bar{R}]^2 + [Z(\tau) - \bar{Z}]^2 \}^{-1}$,

а $M(\tau) = \{ [Z'(\tau)]^2 + [R'(\tau)]^2 \}^{1/2}$.

© Гарасим Я.С., Остудін Б.А., 1995

Невідома функція $q(\tau)$ визначається з інтегрального рівняння /1/

$$Aq \equiv \int_{\alpha}^{\beta} q(\tau) R(\tau) K(\tau, \bar{\tau}) T^{-1}(\tau, \bar{\tau}) M(\tau) d\tau = U_0, \quad /2/$$

де

$$T(\tau, \bar{\tau}) = \{[R(\tau) + R(\bar{\tau})]^2 + [Z(\tau) - Z(\bar{\tau})]^2\}^{1/2}, \quad \bar{\tau} \in [\alpha, \beta];$$

$$K(\tau, \bar{\tau}) = P(\tau, \bar{\tau}) - Q(\tau, \bar{\tau}) \ln \eta \equiv \sum_{l=0}^4 a_l \eta^l - \ln \eta \sum_{l=0}^4 b_l \eta^l -$$

відома апроксимація повного еліптичного інтеграла першого роду /4/, причому

$$\eta = T^{-2}(\tau, \bar{\tau}) \{[R(\tau) - R(\bar{\tau})]^2 + [Z(\tau) - Z(\bar{\tau})]^2\}.$$

В аналізі задачі /2/ важливо з'ясувати тип ІР. Це допомагає вирішити питання розв'язності, що в свою чергу диктує вибір алгоритму наближеного розв'язування /2/ та визначає характер апроксимацій шуканої густини $q(\tau)$. Неважко переконатися в тому, що /2/ зводиться до сингулярного ІР першого роду з логарифмічною особливістю в ядрі:

$$(L+W)q \equiv \int_{\alpha}^{\beta} q(\tau) \left[\ln \frac{1}{|\tau - \bar{\tau}|} + W(\tau, \bar{\tau}) \right] d\tau = U(\bar{\tau}) \quad /3/$$

$(\alpha < \bar{\tau} < \beta)$

де

$$U(\tau) = U_0 \delta_0^{-1} M^{-1}(\tau); \quad W(\tau, \bar{\tau}) = \delta_0^{-1} M^{-1}(\bar{\tau}) \{ \delta_0 M(\bar{\tau}) - 2D(\tau, \bar{\tau}) Q(\tau, \bar{\tau}) \ln |\tau - \bar{\tau}| + D(\tau, \bar{\tau}) [P(\tau, \bar{\tau}) + Q(\tau, \bar{\tau}) \ln \frac{(\tau - \bar{\tau})^2}{\eta}] \},$$

причому $D(\tau, \bar{\tau}) = R(\tau) M(\tau) T^{-1}(\tau, \bar{\tau})$.

Тут $W(\tau, \bar{\tau}) \in C([\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta])$, оскільки $\lim_{\tau \rightarrow \bar{\tau}} W(\tau, \bar{\tau}) = \delta_0 M(\bar{\tau}) \{ a_0 + 2\delta_0 \ln [2R(\bar{\tau}) M^{-1}(\bar{\tau})] \}$ за умови $M(\bar{\tau}) \neq 0$, $\alpha < \bar{\tau} < \beta$.

Досліджувати розв'язність ІР /3/ можна в різних функціональних просторах, але у всіх випадках потрібно враховувати сингулярну поведінку шуканого розв'язку в околі кінців розімкненої кривої L . Розглянемо розв'язок /3/ у просторі $H_{\mu}^*(\alpha, \beta)$ ($0 < \mu \leq 1$) функцій, які зображаються у вигляді

$$q(\tau) = q^*(\tau) / \hat{R}(\tau), \quad /4/$$

причому $q^*(\cdot) \in H_\mu([\alpha, \beta])$ /клас Гельдера з показником μ а $\hat{R}(\tau) = (\tau - \alpha)^n (\beta - \tau)^m$ ($0 \leq n, m < 1$).

Враховуючи, що оператор A діє з банахового простору $H_\mu^*(\alpha, \beta)$ в банахів простір $H_{\mu+1}^*(\alpha, \beta)$, до якого належать функції, похідні яких мають властивість аналогічну до /4/. У частинному випадку, коли $n = m = 0,5$ для впроваджених просторів використовують позначення $\tilde{H}_\mu(\alpha, \beta)$, $\tilde{H}_\mu^1(\alpha, \beta)$ відповідно.

Відомо [5], що оператор $L: \tilde{H}_\mu(\alpha, \beta) \rightarrow \tilde{H}_\mu^1(\alpha, \beta)$ за умови $0 < \mu < 0,5$; $|\beta - \alpha| \neq 4$ є неперервно оборотним. Разом із компактністю оператора W це приводить до фредгольмовості A . Таким чином, питання розв'язності IP /3/ вирішується в рамках теорії Фредгольма. Властивості операторів L і W дають змогу одержати IP Фредгольма другого роду:

$$(I + L^{-1}W)q = L^{-1}U \quad /5/$$

з компактним оператором $L^{-1}W$, яке еквівалентне /3/. Таке зображення є корисним для /3/, з міркувань як теорії, так і з чисельного аналізу. Однак під час побудови наближеної схеми розв'язання /5/ виникають проблеми технічного характеру внаслідок складності операторів $L^{-1}W$ та L^{-1} . Тому, на нашу думку, доцільно застосовувати до /3/ метод саморегуляризації, що дає змогу наближено одержати набагато простіше IP другого роду.

Повернемося до IP /2/. Під час аналізу реальних електронно-оптичних систем граничні значення потенціалу задають на сукупності кривих $\{L_j\}_{j=1}^M$, а IP типу /2/ подають у вигляді

$$AQ \equiv \sum_{j=1}^M \int_{\alpha_j}^{\beta_j} q_j(\tau) R_j(\tau) K_{ji}(\tau, \bar{\tau}) T^{-1}(\tau, \bar{\tau}) M_j(\tau) d\tau = U_0^{(i)} \quad /6/$$

($i = 1, 2, \dots, M$)

Тут $U_0^{(i)}$ - граничне значення потенціалу на i -й кривій;

$$T_{ji}(\tau, \bar{\tau}) = \{[R_j(\tau) + R_i(\bar{\tau})]^2 + [Z_j(\tau) - Z_i(\bar{\tau})]^2\}^{1/2};$$

$Z = Z_j(\tau)$, $R = R_j(\tau)$ ($\alpha_j \leq \tau \leq \beta_j$) - параметричні рівняння, що описують криву L_j ($j = 1, 2, \dots, M$);

$\{Z_i(\bar{\tau}), R_i(\bar{\tau})\}$ - деяка фіксована точка на кривій

$$L_i(\alpha_i < \bar{\tau} < \beta_i); \quad M_j(\tau) = \{[Z_j'(\tau)]^2 + [R_j'(\tau)]^2\}^{1/2};$$

$$K_{ji}(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{l=0}^4 a_l \eta_{ji}^l - \ln(\eta_{ji}) \sum_{l=0}^4 b_l \eta_{ji}^l,$$

причому

$$\eta_{ji} = \{ [R_j(\tau) - R_i(\bar{\tau})]^2 + [Z_j(\tau) - Z_i(\bar{\tau})]^2 \} \tau_{ji}^{-2}(\tau, \bar{\tau}).$$

Розв'язком IP /6/ є Q - густина розподілу зарядів вздовж сукупності кривих $\{L_j\}_{j=1}^M$, тобто $Q = \{q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_M(\tau)\}$, або інакше, $Q/L_j = q_j(\tau)$, де $\tau \in [\alpha_j, \beta_j]$.

Враховуючи попередні міркування, шукатимемо функції $q_j(\tau)$ у вигляді

$$q_j(\tau) = q_j^*(\tau) (\tau - \alpha_j)^{n_j} (\beta_j - \tau)^{m_j}; \tau \in [\alpha_j, \beta_j]; 0 \leq n_j, m_j < 1,$$

де $q_j^*(\tau) \in H_\mu([\alpha_j, \beta_j])$. Нехай, відповідно до [1], величини n_j характеризує сингулярну поведінку розв'язку в околі першої критичної точки кривої L_j , і вважаємо n_j початком L_j ; m_j відповідає крайній точці на кінці L_j . Приймемо, що n_j та m_j дорівнюють 0,5, якщо крива L_j своїми кінцями не торкається сусідніх. Якщо ж заряджена поверхня має злам, то її подають як таку, що складається із двох, а характер відповідних сингулярностей визначають таким чином:

$$m_j = n_{j+1} = (\pi - \omega_j \pi) / (2\pi - \omega_j \pi),$$

причому ω_j - кут, утворений дотичними до кривих L_j, L_{j+1} у спільних точках.

Далі відповідно до основної ідеї методу саморегуляризації [2, 3, 8], спеціальним чином локалізуювши особливість в ядрі IP /3/, а також зробивши апріорне припущення про те, що функція

$$\Delta_i(\tau) = q_i(\tau) (\tau - \alpha_i)^{n_i} (\beta_i - \tau)^{m_i}$$

мало змінюється на достатньо малому відрізку довжини h , одержимо IP другого роду:

$$\Delta_i(\bar{\tau}) G_i(\bar{\tau}) + \sum_{j=1}^M \int_{\alpha_j}^{\beta_j} q_j(\tau) N_{ji}(\tau, \bar{\tau}) d\tau = U_0^{(i)} \quad (7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, M),$$

де $G_i(\bar{\tau})$ - лінійна комбінація відносно простих одновимірних невластних інтегралів; $N_{ji}(\tau, \bar{\tau})$ - неперервні за обома змінними функції, причому у випадку $i \neq j$ вони просто збігаються з ядрами IP /6/. Зауважимо, також, що при $h \ll 1$ величина $G_i(\bar{\tau})$, незалежно від $\bar{\tau}$, веде себе як $1/h \cdot \ln h$.

При формулюванні проблеми розрахунку осесиметричного електростатичного поля у вигляді ІР /6/ останнє допускає просту модифікацію, коли сукупність кривих $\{L_j\}_{j=1}^M$ має симетрію в розташуванні відносно осі OR обраної системи координат ZR . При цьому передбачається також наявність відповідної симетрії у поданні граничних умов. Аналог ІР /6/ у такій ситуації може мати вигляд

$$\sum_{j=1}^{M^*} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} q_j(\tau) R_j(\tau) [K_{ji}(\tau, \bar{\tau}) T_{ji}^{-1}(\tau, \bar{\tau}) + k_j \hat{R}_{ji}(\tau, \bar{\tau}) \hat{T}_{ji}^{-1}(\tau, \bar{\tau})] M_j(\tau) d\tau = U_0^{(i)} \quad (M^* < M; i = 1, 2, \dots, M),$$

де

$$\hat{T}_{ji}(\tau, \bar{\tau}) = \{[R_j(\tau) + R_i(\bar{\tau})]^2 + [Z_j(\tau) + Z_i(\bar{\tau})]^2\}^{1/2},$$

$\hat{K}_{ji}(\tau, \bar{\tau})$ обчислюється аналогічно $K_{ji}(\tau, \bar{\tau})$ з тою відмінністю, що

$$\eta_{ji} = \{[R_j(\tau) - R_i(\bar{\tau})]^2 + [Z_j(\tau) + Z_i(\bar{\tau})]^2\} / \hat{T}_{ji}^2(\tau, \bar{\tau}).$$

Коефіцієнт k_j зі значеннями ± 1 показує наявність симетричності до L_j кривої відносно осі OR , за відсутності симетрії $k_j = 0$.

Для наближеного розв'язування ІР /7/ використаємо метод Боголюбова-Крилова. Розбиваючи кожний інтервал інтегрування на N_j^* рівних частин та вибираючи контрольні точки посередині кожного підінтервалу, для визначення невідомих значень густини одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^{N_j^*} q_t^{(j)} A_{k,t}^{(i,j)} = U_0^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, N_i^*),$$

де

$$A_{k,t}^{(i,j)} = \Delta_j(\tau_t^{(j)}) \int_{\tau_t^{(j)} - h_j}^{\tau_t^{(j)} + h_j} \frac{N_{ji}(\tau, \bar{\tau}_k)}{\Delta_j(\tau)} d\tau + \delta_{k,t}^{(i,j)} \Delta_i(\bar{\tau}_k) \sigma_i(\bar{\tau}_k), \quad /8/$$

причому $h_j = (\beta_j - \alpha_j) / 2N_j^*$; $\delta_{k,t}^{(i,j)}$ - символ Кронекера;
 $q_t^{(j)}$ - наближені значення шуканої густини в точках $\tau_t^{(j)} =$
 $= \alpha_j + h_j (2t - 1)$; $\tau_k = \alpha_i + h_i (2k - 1)$ - точки
задоволення граничних умов. Інтеграли в /8/ обчислюються за
звичайними квадратурними формулами з потрібною точністю.

Важливим моментом у розв'язуванні IP /7/ є оцінка точнос-
ті отриманого розв'язку. Цю оцінку виконують апостеріорно
[6, 7].

Після знаходження густини розподілу зарядів уздовж кривих
 L_j ($j = 1, 2, \dots, M$) потенціал осесиметричного електростатичного
поля в довільній точці $(\bar{z}, \bar{r})$ півплощини $R \geq 0$ можна
визначити за формулою

$$U(\bar{z}, \bar{r}) = \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^{N_j^*} q_t^{(j)} \Delta_j(\tau_t^{(j)}) \int_{\tau_t^{(j)} - h_j}^{\tau_t^{(j)} + h_j} R_j(\tau) \bar{r}_j(\tau) M_j(\tau) \cdot \bar{\Delta}_j^{-1}(\tau) \bar{\tau}^{-1}(\tau) d\tau, \quad /9/$$

де $\bar{\tau}_j(\tau) = 2[R(\tau)\bar{r}]^{1/2} / k$,

$$\bar{r}_j(\tau) = \sum_{l=0}^4 a_l \bar{\eta}_j^l - \ln(\bar{\eta}_j) \sum_{l=0}^4 b_l \bar{\eta}_j^l,$$

причому

$$\bar{\eta}_j = \{[R_j(\tau) - \bar{r}]^2 + [z_j(\tau) - \bar{z}]^2\} / \bar{\tau}_j^2(\tau).$$

Далі, виконуючи диференціювання виразу в правій частині
формули /9/ відповідно по $\bar{z}$ та $\bar{r}$, отримуємо, з точністю
до знака, компоненти вектора напруженості. Наведемо лише пер-
шу компоненту.

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^{N_j^*} q_t^{(j)} \Delta_j(\tau_t^{(j)}) \int_{\tau_t^{(j)} - h_j}^{\tau_t^{(j)} + h_j} R_j(\tau) [z_j(\tau) - \bar{z}] \times$$

$$\times \bar{E}_j(\tau) \bar{\Delta}_j^{-1}(\tau) \bar{\tau}_j^{-3}(\tau) \bar{\eta}_j^{-1} M_j(\tau) d\tau, \quad /10/$$

де $\bar{E}_j(\tau)$ - апроксимація повного еліптичного інтеграла
другого роду згідно з формулою [4]:

$$\bar{E}_j(\tau) = 1 + \sum_{l=0}^4 \rho_l \bar{\eta}_j^l - \ln(\bar{\eta}_j) \sum_{l=0}^4 f_l \bar{\eta}_j^l.$$

Зауважимо, що під час визначення $\partial U / \partial \bar{z}$ у безпосе-
редній близькості кривої L_j істотно знижується точність наб-
лиженого обчислення відповідного інтеграла у формулі /10/, що
пояснюється різким зростанням похідної підінтегральної функ-
ції. Для поліпшення ситуації до підінтегрального виразу засто-
совують згладжувальний множник H^2 , який дорівнює квадра-
тові відстані точки з координатами $(\bar{z}, \bar{r})$ до кривої L_j .

Після застосування квадратурного правила до такого "нерегулярного" інтеграла залишається просто поділити результат на n^2 .

Описані в даній роботі алгоритми послужили математичною основою відповідного програмного забезпечення для розрахунку електростатичних полів осесиметричних електронно-оптичних систем /ЕОС/ на базі персонального комп'ютера IBM PC/AT. Мова програмування - фортран-77. Створений комплекс здатний розв'язувати широке коло практичних задач і забезпечує діалоговий режим експлуатації.

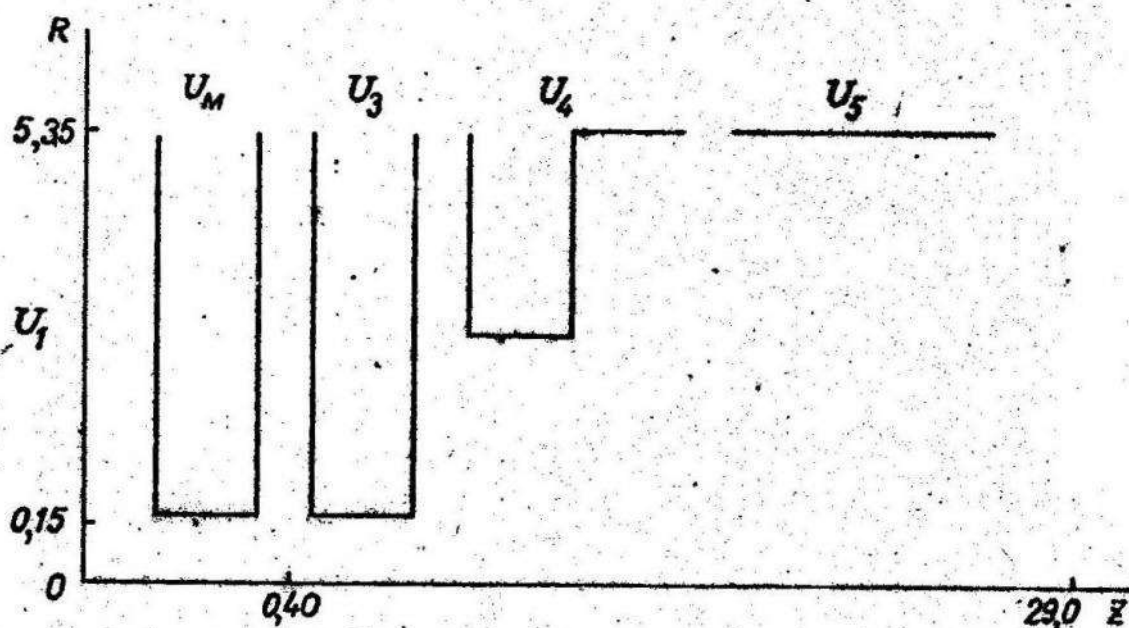


Рис. 1.

Одна з реальних ЕОС подана на рис. 1. Подібні системи застосовують для проектування нових електронно-променевих приладів. Їх аналіз проводять з метою оцінки та поліпшення електронно-оптичних характеристик систем формування та фокусування. Дана ЕОС моделюється за допомогою одинадцяти відрізків прямих, що об'єднуються в чотири джерела, на яких задані різні потенціали. Врахування симетрії у розташуванні ЕОС відносно осі OR забезпечує нульове значення потенціалу на катоді ($U_1 = 0$). Характерними ознаками даної ЕОС є малі відстані між джерелами, а також істотні відмінності у значеннях потенціалів на джерелах. Скажімо, на модуляторі

задається значення потенціалу $U_M = -5$, тоді як на інших джерелах потенціали розподілені так: $U_3 = 500$, $U_4 = 650$, $U_5 = 10000$.

Для розрахунку поля, створеного такою ЕОС, використовуються розв'язки так званих базових задач, коли на кожному із джерел послідовно задається значення потенціалу, що дорівнює одиниці, а на решті — нулі. Тоді для розрахунку конкретного поля потрібно лише утворити лінійну комбінацію розв'язків базових задач. Легко бачити, що в нашій ситуації таких задач є чотири.

Цей спосіб подання поля найефективніший, оскільки дає змогу для фіксованої геометрії ЕОС розв'язувати ІР лише один раз, незважаючи на конкретні значення потенціалів на електродах.

Рис. 2 Ілюструє розподіл потенціалу в околі катоду та модулятора. Розроблений комплекс програм забезпечує також розрахунок напруженостей осесиметричного електростатичного поля та потенціалу зашкрання.

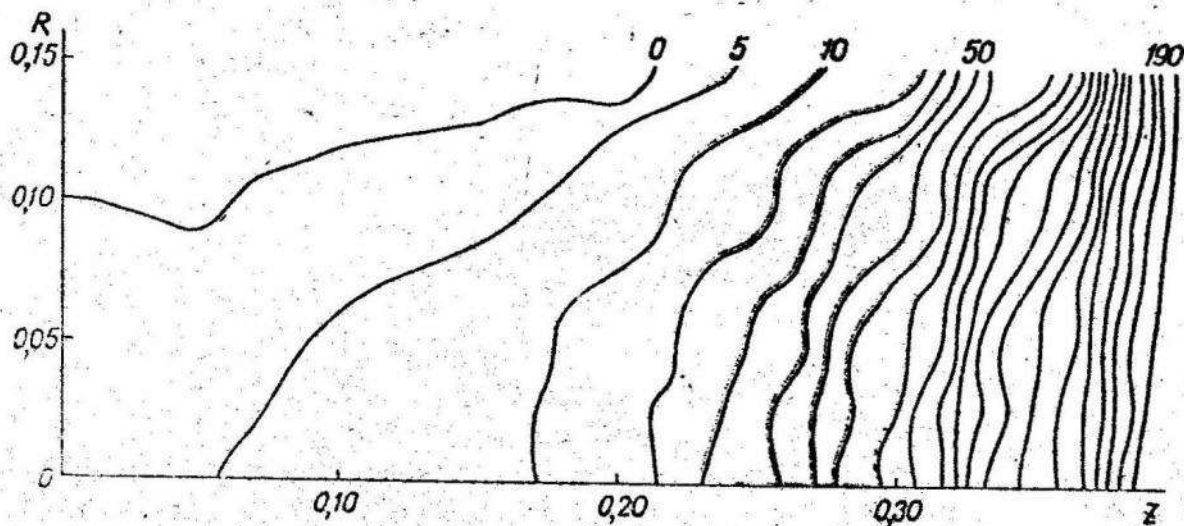


Рис. 2.

Наприкінці відзначимо, що використання сучасних засобів обчислювальної техніки у поєднанні з продуманим математичним забезпеченням дає змогу будувати ефективні розв'язки задач моделювання реальних фізичних явищ.

І. Антоненко О.Ф. Численное решение интегрального уравнения I-го рода для задачи Дирихле в случае тел вращения // Мат. пробл. геофизики. Новосибирск, 1969. Вып. I. С. 202-211.
2. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987. 167 с.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений среднего рода I-го рода // Вычисл. методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1968. Вып. 10. С. 49-54.
4. Дымарский А.С., Лозинский Н.Н., Макушкин А.Т. Справочник программиста: В 2 т. Л.: Судпромгиз, 1963. Т. I. 628 с.
5. Ильинский А.С., Шенгелов Ю.В. Применение методом спектральной теории в задачах распространения волн. М.: Изд-во МГУ, 1989. 184 с.
6. Лядкевич И.В., Гордийчук В.И., Бакалец В.А., Маринюк Л.О. Численное решение пространственных задач теории потенциала. Львов: МГУ, 1979. 116 с.
7. Лядкевич И.В., Остудин Б.А. Численное решение граничных задач теории потенциала в электронной оптике методом саморегуляризации. Львов, 1983. 43 с. Рукопись деп. в УкрНИНТИ 23.II.83, № 1455Ук-183.
8. Тихонов А.Н., Дмитриев В.И. Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы // Вычисл. методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1968. Вып. 10. С. 3-8.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.94

УДК 519.6

Б.М.Голуб, Ю.П.Оліярник

ТУНЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ПОШУКУ ГЛОБАЛЬНОГО МІНІМУМУ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ

У даній статті розглядається метод пошуку глобального мінімуму неперервної функції $F(x)$ на компактній множині $X \subset R^n$.

1. Тунельна функція. Нехай $x_1^* \in X$ — деяка ізольована точка мінімуму функції $F(x)$. Для пошуку точок x , в яких $F(x) < F(x_1^*)$ у праці [1] запропоновано використовувати допоміжну функцію:

$$P(x, z, \rho) = \frac{1}{F(x) + z} e^{-|x - x_1^*|^2 / \rho^2}, \quad (1)$$

де $F(x) + z > 0$ для всіх $x \in X$. Функцію $P(x, z, \rho)$ називають тунельною, або наповнювальною.

© Голуб Б.М., Оліярник Ю.П., 1995