Наприкінці відзначимо, що використання сучасних засобів обчислювальної техніки у поєднанні з продуманим математичним забезпеченням дає змогу будувати ефективні розв"язки задач моделювання реальних фізичних явищ.

1. Антоненко О.Ф. Численное решение интегрального уравнения I-го рода для задачи Дирихле в случае тел вращения // Мат. пробл. геофизики. Новосибирск, 1969. Вып.1. С.202-211. 2. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987. 167 с. 3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I-го рода // Вычисл. методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1968. Вып. 10. С.49-54. 4. Дымарский Я.С., Лозинский Н.Н., Макушкин А.Т. Справочник программиста: В 2 т. Л.: Судпромгиз. 1963. Т.1. 628 с. 5. Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В. Применение методом спектральной теории в задачах распространения волн. М.: Изд-во МГУ, 1989. 184 с. 6. Людкевич И.В., Гордийчук В.И.,Бакалец В.А., Маринюк Л.О. Численное решение пространственных задач теории потенциала. Львов: ЛГУ. 1979. 116 с. 7. Людкевич И.В., Остудин Б.А. Численное решение граничных задач теории потенциала в электронной оптике методом саморегуляризации. Львов, 1983. 43 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 23.11.83, № 1455Ук-Д83. 8. Тихонов А.Н., Дмитриев В.И. Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы // Вычисл. методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1968. Вып.10. С.3-8.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.94

УДК 519.6

Б.М.Голуб, Ю.П.Оліярник

ТУНЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ПОШУКУ ГЛОБАЛЬНОГО МІНІМУМУ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ

У даній статті розглядається метод пошуку глобального мінімуму неперервної функції $F(x)$ на компактній множині $X\subset R^n$.

1. Тунельна функція. Нехай $x_1^*\in X$ – деяка ізольована точка мінімуму функції $F(x)$. Для пошуку точок x, в яких $F(x) < F(x_1^*)$ у праці /1/ запропоновано використовувати допоміжну функцію:

$$P(x,\tau,\rho)=\frac{1}{F(x)+\tau}e^{-\|x-x_1^*\|^2/\rho^2}, \qquad /1/$$

де $F(x)+\tau>0$ для всіх $x\in X$. Функцію $P(x,\tau,\rho)$ називають тунельною, або наповнювальною.

Позначимо $D = \min\limits_{x\in S_1} \| x - x_1^* \|$, де

$S_1 = \{x \in X : F(x_1^*) < F(x_1^* + \alpha(x - x_1^*)) < F(x_1^* + \beta(x - x_1^*)) < F(x),\ 0<\alpha<\beta<1\}$.

Припустимо, що множина $\partial F(x)$ субдиференціалів функції $F(x)$ обмежена на X і

$$L = \max_{x\in X} \| \partial F(x) \| .$$

Нехай параметри r та ρ підібрані таким чином, що виконується нерівність

$$\frac{\rho^2}{r + F(x_1^*)} \leqslant \frac{2DC_1}{L}, \qquad /2/$$

де C_1 - деяка константа, $0 < C_1 < 1$. Тоді [2] функція $P(x,r,\rho)$ не має стаціонарних точок на множині

$$A = \{x \in X : F(x) \geqslant F(x_1^*)\} \setminus \{x_1^*\} .$$

Таким чином, якщо відношення $\rho^2 / (r + F(x_1^*))$ вважати достатньо малим /щоб виконувалося /2// і застосувати деякий релаксійний алгоритм локальної мінімізації з початкової точки поблизу x_1^* , то траєкторія спуску або виходить з множини X , або збігається до точки $\bar{x} \notin A$.

З іншого боку, якщо r та ρ підібрані так, що

$$0 < \frac{\rho^2}{r + F(x_1^*)} < c_0 < \frac{2Dc_1}{L},$$

де c_0 - деяка константа [2], то функція $P(x, r, \rho)$ не має стаціонарних точок на всій множині $X \setminus \{x_1^*\}$.

В отриманому варіанті тунельного методу основною проблемою є вибір параметрів r та ρ який забезпечує виконання нерівності

$$c_0 < \rho^2 / (r + F(x_1^*)) < 2Dc_1 / L , \qquad /3/$$

тим паче, що значення констант c_0, c_1 , D та L , як правило, невідомі.

2. Модифікована наповнювальна функція. Нехай x^* - точка глобального мінімуму функції $F(x)$ на X і $F^* = F(x^*)$. Вважатимемо задачу оптимізації розв"язаною з точністю $\varepsilon > 0$ за значенням функції, якщо знайдемо точку $x_\varepsilon^* \in X$ таку, що $F(x_\varepsilon^*) \leqslant F^* + \varepsilon$.

Розглянемо модифіковану наповнювальну функцію

$$R(x,\rho) = \frac{1}{F(x) - F_1^* + \varepsilon}\, e^{-\| x - x_1^* \|^2 / \rho^2},$$

де $F_1^* = F(x_1^*)$, x_1^* - деяка точка локального мінімуму.

Очевидно, що

$$x_1^* = \arg\max_x R(x,\varrho).$$

Теорема. Якщо

$$\varrho^2 < \frac{2\bar{D}\varepsilon}{L}, \qquad /4/$$

де $\bar{D} = \min\{1, D\}$, то функція $R(x,\varrho)$ не має стаціонарних точок на множині A.

Доведення. Нехай $\bar{x} \in A$.

Позначимо

$$\tilde{R}(\alpha) = R(\bar{x} + \alpha(x_1^* - \bar{x}), \varrho),$$
$$G(\alpha) = F(x + \alpha(x_1^* - \bar{x})) - F_1^* + \varepsilon.$$

Розглянемо різницю $\tilde{R}(\alpha) - \tilde{R}(0)$:

$$\tilde{R}(\alpha) - \tilde{R}(0) = \frac{1}{G(\alpha)} e^{-(1-\alpha)^2 \|x_1^* - \bar{x}\|^2/\varrho^2} - \frac{1}{G(0)} e^{-\|x_1^* - \bar{x}\|^2/\varrho^2} =$$

$$= \frac{G(\alpha) - G(0)}{G(\alpha) G(0)} e^{-\|x_1^* - \bar{x}\|^2/\varrho^2} + \frac{1}{G(0)} \left[e^{-(1-\alpha)^2 \|x_1^* - \bar{x}\|^2/\varrho^2} - e^{-\|x_1^* - \bar{x}\|^2/\varrho^2} \right].$$

Розділимо ліву та праву частини на $\alpha > 0$ та спрямуємо α до $+0$. У результаті отримаємо

$$R'(\bar{x}; x_1^* - \bar{x}) = \left(-\frac{F'(\bar{x}; x_1^* - \bar{x})}{G(0)} + \frac{2\|x_1^* - \bar{x}\|}{\varrho^2} \right) \frac{1}{G(0)} e^{-\|x_1^* - \bar{x}\|^2/\varrho^2}, \qquad /5/$$

де $R'(\bar{x}; x_1^* - \bar{x})$ та $F'(\bar{x}; x_1^* - \bar{x})$ – похідні по напряму $x_1^* - \bar{x}$ функцій $R(x,\varrho)$ та $F(x)$ в точці $\bar{x}$.

Припустимо, що $R'(\bar{x}; x_1^* - \bar{x}) \leq 0$. Тоді з /5/ випливає

$$2\|x_1^* - \bar{x}\|/\varrho^2 \leq F'(\bar{x}; x_1^* - \bar{x})/G(0).$$

Оскільки $F'(\bar{x}; x_1^* - \bar{x}) = \max\limits_{a \in \partial F(\bar{x})} \langle a, x_1^* - \bar{x} \rangle \leq L\|x_1^* - \bar{x}\|$, то далі отримаємо

$$2\|x_1^* - \bar{x}\| G(0) \leq \varrho^2 L \|x_1^* - \bar{x}\|$$

або, з урахуванням /4/,

$$G(0) < \bar{D}\varepsilon \leq \varepsilon. \qquad /6/$$

Оскільки $G(0) = F(\bar{x}) - F_1^* + \varepsilon \geq \varepsilon$, то з /6/ отримаємо протиріччя. А тому

$$R'(\bar{x}; x_1^* - \bar{x}) > 0. \qquad /7/$$

Аналогічно можна показати, що

$$R'(\bar{x}; \bar{x} - x_1^*) = -\left(\frac{F'(\bar{x}; \bar{x} - x_1^*)}{G(0)} + \frac{2\|\bar{x} - x_1^*\|}{\varrho^2} \right) \frac{1}{G(0)} e^{-\|x_1^* - \bar{x}\|^2/\varrho^2}. \qquad /8/$$

Припустимо, що $R'(\bar{x}; \bar{x} - x_1^*) \geq 0$. Тоді з /8/ випливає

$$2\|\bar{x} - x_1^*\| G(0) \leq \rho^2 |F'(\bar{x}; \bar{x} - x_1^*)|.$$

З цієї нерівності легко отримати протиріччя типу $\varepsilon < \varepsilon$. Отже

$$R'(\bar{x}; \bar{x} - x_1^*) < 0. \qquad /9/$$

З означення похідної за напрямом та нерівностей /6/, /9/, випливає, що функція $R(\bar{x} + \alpha(x_1^* - \bar{x}), \rho)$ є строго монотонно спадною в околі точки $\bar{x}$. Отже, точка $\bar{x}$ не є точкою мінімуму. А оскільки /6/ і /9/ – строгі нерівності, то $\bar{x}$ не може бути також сідловою точкою.

Теорема доведена.

Припустимо, що множина $B = \{x \in X : F(x) \leq F_1^* - \varepsilon\}$ непорожня. Тоді на границі множини B функція $R(x, \rho) = \infty$. Звідси випливає існування стаціонарних точок функції $R(x, \rho)$ на X для довільного ρ.

Зауважимо, що на відміну від /3/, в оцінці /4/ для ρ^2 відома нижня границя.

3. Алгоритм глобальної мінімізації. Сформулюємо алгоритм пошуку глобального мінімуму неперервної функції $F(x)$ на множині X, використовуючи модифіковану наповнювальну функцію $R(x, \rho)$.

Виберемо числа ρ_0, $0 < \gamma < 1$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ та початкову точку $x_0 \in X$. Приймемо $\rho = \rho_0$.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка $x_k \in X$ вже обчислена.

1. Оберемо за початкову точку x_k та застосуємо деякий релаксаційний метод локального пошуку екстремуму. Отримаємо точку мінімуму x_k^*.

2. За допомогою деякого методу локальної оптимізації шукаємо стаціонарну точку на множині X функції

$$R(x, \rho) = \frac{1}{F(x) - F(x_k^*) + \varepsilon} e^{-\|x - x_k^*\|^2/\rho^2}.$$

За початкові можна вибрати точки $y_i = x_k^* \pm \delta e_i$, $i = \overline{1, n}$, де e_i – i-й орт. Пошук припиняємо, якщо знайдена така точка, що задовольняється одна з умов:

а/ $\bar{x}_k$ – стаціонарна точка;

б/ $R(\bar{x}_k, \rho) < 0$;

в/ $R(\bar{x}_k, \rho) > R(x_k^*, \rho)$;

г/ $F(\bar{x}_k) < F(x_k^*)$.

Якщо точка $\bar{x}_K$ не знайдена, то слід перейти до кроку 4.

3. Якщо $F(\bar{x}_K) \geq F(x_K^*)$, то приймаємо $\rho = \gamma\rho$ та переходимо до кроку 2. У протилежному випадку приймаємо $x_{K+1} = \bar{x}_K$, $K = K + 1$ та переходимо до кроку 1.

4. Вважаємо x_K^* точкою глобального мінімуму і припиняємо роботу алгоритму.

Враховуючи теоретичні властивості функції $R(x,\rho)$, легко бачити, що за скінченну кількість кроків алгоритм згенерує точку x_K^* таку, що $F(x_K^*) < F^* + \varepsilon$ /при відповідній точності розв"язування задач локальної оптимізації/.

1. Ge R.P. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables // Presented at the Dundee Conference on Numerical Analysis, Dundee, Scotland, 1983.
2. Ge R.P. The theory of filled function method for finding global minimizers of nonlinearly constrained minimization problems // J. of Computational Mathematics. 1987. Vol. 5. N1. P.1-9.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.94

УДК 519.6

Б.М.Голуб, Ю.М.Щербина

РЕЛАКСАЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ КВАЗІНЬЮТОНОВОЇ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

1. Постановка проблеми. Розглянемо задачу оптимізації:

$$\min_{x \in R^n} \{f_0(x) : f_i(x) \leq 0, \ i \in J = \{1, 2, \ldots, m\}\}, \qquad /1/$$

де $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ – достатньо гладкі функції.

Для пошуку мінімуму функції $f_0(x)$ при заданих обмеженнях у праці [2] запропонована квазіньютонова модифікація методу лінеаризації Пшеничного, яка показала високу ефективність під час розв"язування широкого класу тестових та практичних задач.

У разі виконання певних умов, накладених на функції $f_i(x)$ доведена [2] надлінійна швидкість збіжності послідовності $\{x_K\}$, яку генерує квазіньютонова модифікація методу лінеаризації, до точки мінімуму задачі /1/.

Однак надлінійну швидкість збіжності вдається досягнути, взагалі кажучи, за рахунок втрати релаксаційності алгоритму по