Якщо точка $\bar{x}_K$ не знайдена, то слід перейти до кроку 4.

3. Якщо $F(\bar{x}_K) \geq F(x_K^*)$, то приймаємо $\rho = \gamma\rho$ та переходимо до кроку 2. У протилежному випадку приймаємо $x_{K+1} = \bar{x}_K$, $K = K + 1$ та переходимо до кроку 1.

4. Вважаємо x_K^* точкою глобального мінімуму і припиняємо роботу алгоритму.

Враховуючи теоретичні властивості функції $R(x,\rho)$, легко бачити, що за скінченну кількість кроків алгоритм згенерує точку x_K^* таку, що $F(x_K^*) < F^* + \varepsilon$ /при відповідній точності розв"язування задач локальної оптимізації/.

1. Ge R.P. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables // Presented at the Dundee Conference on Numerical Analysis, Dundee, Scotland, 1983.
2. Ge R.P. The theory of filled function method for finding global minimizers of nonlinearly constrained minimization problems // J. of Computational Mathematics. 1987. Vol. 5. N1. P. 1-9.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.94

УДК 519.6

Б.М.Голуб, Ю.М.Щербина

РЕЛАКСАЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ КВАЗІНЬЮТОНОВОЇ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

1. Постановка проблеми. Розглянемо задачу оптимізації:

$$\min_{x \in R^n} \left\{ f_0(x) : f_i(x) \leq 0, \ i \in J = \{1, 2, \ldots, m\} \right\}, \qquad /1/$$

де $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ – достатньо гладкі функції.

Для пошуку мінімуму функції $f_0(x)$ при заданих обмеженнях у праці [2] запропонована квазіньютонова модифікація методу лінеаризації Пшеничного, яка показала високу ефективність під час розв"язування широкого класу тестових та практичних задач.

У разі виконання певних умов, накладених на функції $f_i(x)$ доведена [2] надлінійна швидкість збіжності послідовності $\{x_K\}$, яку генерує квазіньютонова модифікація методу лінеаризації, до точки мінімуму задачі /1/.

Однак надлінійну швидкість збіжності вдається досягнути, взагалі кажучи, за рахунок втрати релаксаційності алгоритму по точній штрафній функції:

$$\Phi_N(x) = f_0(x) + NF(x),$$

де $N > 0$ – достатньо велике число; $F(x) = max\{0, f_1(x), ..., f_m(x)\}$.

2. Побудова алгоритму. Сформулюємо квазіньютонів алгоритм методу лінеаризації зі строго монотонним спаданням функції $\Phi_N(x)$.

Позначимо

$$\mathcal{J}_\delta(x) = \{i \in \mathcal{J}: f_i(x) \geq F(x) - \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Поставимо у відповідність точці x такі задачі квадратичного програмування:

$$\min_p \{\langle f_0'(x), p\rangle + \tfrac{1}{2}\langle p, Ap\rangle : \langle f_i'(x), p\rangle + f_i(x) \leq 0, \ i \in \mathcal{J}_\delta(x)\}, \qquad /2/$$

$$\min_y \{\tfrac{1}{2}\|y\|^2 : \langle f_i'(x), y\rangle + f_i(x+p) \leq 0, \ i \in \mathcal{J}_\delta(x)\}, \qquad /3/$$

де A – симетрична додатно означена матриця, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ – скалярний добуток векторів, $\|y\|^2 = \langle y, y\rangle$.

Позначимо розв"язки та множники Лагранжа задач /2/ і /3/ відповідно через $p(x)$, $u^i(x)$ та $y(x)$, $v^i(x)$, $i \in \mathcal{J}_\delta(x)$.

Матрицю A для допоміжної задачі /2/ будуємо за правилом [2].

Нехай матриця A_k відома. Обчислимо матрицю $\bar{A}_{k+1}$ за формулою

$$\bar{A}_{k+1} = A_k + \Delta A_k, \qquad /4/$$

де ΔA_k – поправкова квазіньютонова матриця [2].

За допомогою модифікованого LDL^T розклад Холеського [2] будуємо додатно означену матрицю A_{k+1}:

$$A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} L_{k+1}^T = \bar{A}_{k+1} + E_{k+1}, \qquad /5/$$

де E_{k+1} і D_{k+1} – невід"ємні діагональні матриці, L_{k+1} – одинична нижня трикутна матриця.

Позначимо через I_n одиничну матрицю порядку n.

Нехай вибрані числа $N > 0$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < 1/2$, $S \gg 1$ та початкове наближення x_0. Приймемо $A_0 = I_n$.

Опишемо загальний крок алгоритму. Припустимо, що точка x_k та матриця A_k вже побудовані.

1. Розв"язуючи задачу /2/ при $x = x_k$, $A = A_k$, обчислити $p_k = p(x_k)$ та $u_k^i = u^i(x_k)$, $i \in \mathcal{J}_\delta(x_k)$.

2. Розв"язуючи задачу /3/ при $x = x_K$, $p = p_K$, обчислити $y_K = y(x_K)$.

3. Починаючи з $\alpha = 1$ дробити α шляхом поділу навпіл до першого виконання нерівності

$$\Phi_N(x_K + \alpha p_K + \alpha^2 y_K) \leq \Phi_N(x_K) - \alpha \varepsilon \langle p_K, A_K p_K \rangle . \qquad /6/$$

4. Прийняти

$$x_{K+1} = x_K + \alpha_K p_K + \alpha_K^2 y_K . \qquad /7/$$

5. Переобчислити матрицю A_{K+1} за формулами /4/–/5/. Якщо

$$\max_i a_{K+1}^i \,/\, \min_i d_{K+1}^i \leq S$$

/тут a_{K+1}^i та d_{K+1}^i – i-ті діагональні елементи матриць A_{K+1} та D_{K+1} /, то перейти до кроку I. У протилежному випадку прийняти $A_{K+1} = I_n$ і перейти до кроку I.

3. Достатні умови збіжності. Справедливе таке твердження.

Теорема I. Нехай виконуються умови:

I/ множина $\Omega = \{x : \Phi_N(x) \leq \Phi_N(x_0)\}$ компактна;

2/ градієнти функцій $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ в Ω задовольняють умову Ліпшиця;

3/ задачі /2/ та /3/ мають розв"язок для довільного $x \in \Omega$, причому $\sum\limits_{i \in J_\delta(x)} u^i(x) \leq N$.

Тоді алгоритм будує послідовність точок $\{x_K\}$, для якої $p(x_K) \longrightarrow 0$, $y(x_K) \longrightarrow 0$, $F(x_K) \longrightarrow 0$ при $K \to \infty$ і в довільній граничній точці цієї послідовності задовольняються необхідні умови мінімуму для задачі /I/.

Доведення цієї теореми неістотно різниться від доведення аналогічного результату в праці [2].

4. Локальна швидкість збіжності. Припустимо, що $f_i(x) \in C^3(\Omega)$, $i \in \{0\} \cup J$, а розв"язок x_* задачі /I/ – єдина стаціонарна точка в Ω.

Позначимо через $\mathcal{L}(x,u)$ функцію Лагранжа задачі /2/:

$$\mathcal{L}(x,u) = f_0(x) + \sum_{i \in J} u^i(x) f_i(x) .$$

Наступне твердження дає оцінку швидкості збіжності алгоритму в околі точки x_*.

Теорема 2. Припустимо, що виконуються умови теореми I, а також

I/ градієнти $f_i'(x_*)$, $i \in J_* = \{i \in J : f_i(x_*) = 0\}$, лінійно незалежні;

2/ $u_*^i = u^i(x_*) > 0$, $i \in J_*$;

3/ $\langle \mathcal{L}''_{xx}(x_*,u_*)p,p\rangle > 0$ для всіх $p \neq 0$, які задовольняють рівності $\langle f'_i(x_*),p\rangle = 0,\ i \in J_*$, причому матриця $\mathcal{L}''_{xx}(x_*,u_*)$ невироджена;

4/
$$\lim_{k\to\infty} \|[A_k - \mathcal{L}''_{xx}(x_*,u_*)]p_k\| / \|p_k\| = 0.$$

Тоді алгоритм генерує послідовність точок $\{x_k\}$, для якої
$$\lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_*\| / \|x_k - x_*\| = 0.$$

Доведення цього результату доволі громіздке, тому в даній статті не наведене. Відзначимо лише, що воно за схемою близьке до відповідних викладок праці [4].

5. <u>Обчислювальний аспект.</u> Вибір числових параметрів алгоритму може істотно впливати на його ефективність. Деякі рекомендації стосовно вибору значень ε, S, δ, N а, також методики розв"язування допоміжної задачі /2/ містять праці [2, 3]. У статті [1] докладно описаний процес перерозрахунку факторів Холеського матриць A_{k+1}.

Відзначимо, що крок 2 алгоритму істотно збільшує обсяг обчислень на кожній ітерації порівняно з квазіньютоновою модифікацією методу лінеаризації [2]. Однак додатковий крок у /7/ у напрямі допустимої множини задачі /1/ сприяє досягненню нерівності /6/ без надмірного дроблення α. Окрім цього, область надлінійної швидкості збіжності даного алгоритму набагато більша. Ці міркування підтверджує також чисельний експеримент на низці тестових задач.

Наприкінці зауважимо, що алгоритм очевидно може бути застосований до пошуку мінімуму функції на множині, заданій системою рівностей і нерівностей. За наявності серед обмежень простих типу $a \leq x \leq b$ алгоритм доцільно модифікувати за схемою, викладеною у праці [3].

1. Г о л у б Б.М. Одна схема побудови квазіньютонівських алгоритмів для безумовної мінімізації функції // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.29. С.22-24. 2. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Квазиньютоновская модификация метода линеаризации // Кибернетика. 1988. № 6. С.66-71. 3. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Модификация метода линеаризации для решения задачи математического программирования на простом множестве типа параллелепипеда // Матем. методы и физико-мех. поля. 1989. № 30. С.24-28.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.94