УДК 519.68:519.1

І.І.Дияк, Ю.Б.Марчук

ЗАСТОСУВАННЯ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ КОМБІНОВАНИХ СХЕМ МЕТОДІВ СКІНЧЕННИХ ТА ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Побудова адаптивних схем та алгоритмів розв"язання задач теорії пружності, які дають змогу апостеріорно оцінювати похибку одержаних результатів – одна з найактуальніших проблем досліджень у теорії та практиці застосувань методу скінченних елементів /МСЕ/ і методу граничних елементів /МГЕ/. Ці дослідження спрямовані на адаптичне поліпшення числових розв"язків як в МСЕ, так і в МГЕ.

Головним чином чотири типи адаптивного поліпшення числових розв"язків використовуються у моделюванні реальної фізичної поведінки об"єктів:

d – адаптивність /використання моделей різної вимірності для різних частин об"єкта [1]/;

h – адаптивність /досягнення належної точності чисельного розв"язку, подрібнення сітки елементів з використанням даного типу елемента/;

p – адаптивність /в цьому випадку дискретизаційна сітка зберігається, а точність досягається за рахунок зростання порядку використовуваних апроксимаційних поліномів/;

h-p – адаптивність, яка є комбінацією h та p версій.

У розвитку комбінованих схем МСЕ та МГЕ побудова адаптивних схем та алгоритмів – відкрите питання. При цьому ефективність програмного забезпечення для розв"язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь /СЛАР/, які одержують в результаті застосування побудованих алгоритмів, великою мірою визначає ефективність власне підходу.

Відомі підходи комбінування МСЕ та МГЕ [6, 8] не приділяють уваги розробці спеціальних алгоритмів розв"язання СЛАР. Здебільшого використовуються прямі методи розв"язання СЛАР. Із розробкою ітераційних методів, які для СЛАР великих порядків мають вищі показники ефективності, ніж прямі методи [5], та враховуючи, що в адаптивних схемах одержуємо добре початкове наближення до розв"язку з попереднього кроку, застосування ітераційних методів є перспективним.

Відомо, що в разі вдалої нумерації вузлів, а саме коли останні вузли СЕ області є першими для границі ГЕ області, загальна матриця системи для комбінованої схеми має вигляд, як на рис. I.

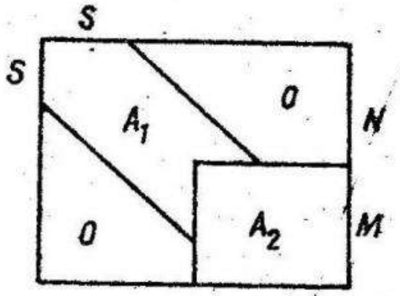

Рис. I

тут A_1 – симетричний блок стрічкової структури, який одержуємо в результаті СЕ апроксимації; A_2 – несиметричний блок, який одержуємо в результаті ГЕ апроксимації.

Більшість відомих ітераційних методів розв"язання СЛАР ефективні для систем зі симетричними додатно визначеними матрицями. Відомі підходи, які грунтуються на симетризації матриці комбінованого підходу. Водночас у праці [5] показано, що симетризація допустима для обмеженого кола задач.

З огляду на це у даній роботі розроблений та реалізований у вигляді C^{++} коду підхід для розв"язання систем з матрицями структури, зображеної на рис. I, який грунтується на модифікації методу спряжених градієнтів [4].

Знаходимо розв"язок СЛАР

$$Au = b \qquad /1/$$

з використанням рекурсивної процедури:

$$u^{n+1} = u^n + \lambda_n p^n , \qquad /2/$$

де p^n – вектор напряму; λ_n – скаляр, який мінімізує в напрямі p^n квадратичний функціонал:

$$F(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (u, b) + c, \qquad /3/$$

Скаляр λ_n в /2/ обчислюємо зі співвідношення

$$\lambda_n = \frac{r^{n,T} r^n}{p^n A p^{n,T}} . \qquad /4/$$

Тут нев"язку r^n знаходимо з виразу

$$r^n = b - Au^n , \qquad /5/$$

або

$$r^n = r^{n-1} - \lambda_{n-1} A p^{n-1} . \qquad /6/$$

Використання співвідношення /6/ економніше, тому що обчислення добутку Ap^{n-1} використовується також для λ_{n-1} /див. /4//. Знаходження напряму для ітерації задаємо

$$p^n = \begin{cases} r^0, & n=0, \\ r^n + \alpha_n p^{n-1}, & n \geq 1, \end{cases} \qquad /7/$$

де α_n обчислюється з

$$\alpha_n = \frac{r^{n,T} r^n}{r^{n-1,T} r^n} . \qquad /8/$$

Критерієм спинення ітераційного процесу є умова, що величина

$$\varepsilon = \left(\frac{r^{n,T} r^n}{b^n b} \right)^{1/2} \qquad /9/$$

менша від заданої точності /TOL/.

Якщо застосуємо /2/, /4/, /6/, /7/ і /8/ до СЛАР вигляду

$$(Q^{-1}A)u = Q^{-1}b , \qquad /10/$$

то отримаємо прискорений ітераційний метод. Матриця Q може бути матрицею основного ітераційного методу, приміром Якобі чи Зейделя. Система /10/ лішне зумовлена, ніж вихідна система. Тоді параметр ε цієї системи обчислюємо за формулою

$$\varepsilon = \left[\frac{\delta^{n,T} \delta^T}{(Q^{-1}b)^T (Q^{-1}b)} \right]^{1/2} , \qquad /11/$$

де

$$\delta^n = Q^{-1} r^n . \qquad /12/$$

Описаний метод спряжених градієнтів з прискоренням застосовуються для систем зі симетричною матрицею. Якщо ж A - несиметрична, то симетричну систему отримуємо заміною Q^{-1} в /10/ на A^T. Проте матриця системи одержана у такий спосіб, має число зумовленості більше, ніж вихідна матриця. Отже, ітераційний процес у такому випадку вимагає більшої кількості ітерацій. Поліпшений метод запропонований у праці [5]. Цей метод побудований на основі /2/, /6/ і /7/ та додаткового визначення вектора $\bar{p}^n$, який обчислюється зі співвідношення

$$\bar{p}^n = \begin{cases} \bar{r}^0 = r^0, & n=0, \\ \bar{r}^n + \alpha_n \bar{p}^{n-1}, & n \geq 1, \end{cases} \qquad /13/$$

де

$$\bar{r}^n = r^{n-1} - \lambda_{n-1} A^T \bar{p}^n . \qquad /14/$$

Тепер λ_n і α_n визначаються як

$$\lambda_n = \frac{\bar{z}^{n,T} z^n}{\bar{p}^{n,T} A p^n} ; \qquad /15/$$

$$\alpha_n = \frac{\bar{z}^{n,T} z^n}{\bar{z}^{n-1,T} z^{n-1}} . \qquad /16/$$

Отже, модифікований алгоритм подається співвідношеннями /2/ /6/, /7/, /13/, /14/, /15/ і /16/. При цьому елементи матриці Q визначаються

$$q_{ij} = \begin{cases} a_{ij} , & i = j , \\ 0 , & i \neq j . \end{cases} \qquad /17/$$

Цей алгоритм можна подати у такому вигляді:

```
u = u^0                           // початкове наближення
z = b - Au                        // нев"язка
δ = Q^-1 z                        // нормалізована нев"язка
DELTA0 = δ^T δ                    // похибка
IF(DELTA0 ≤ TOL) → STOP           // умова спинення
p = p̄ = δ̄ = δ
:h = Ap
h1 = Q^-1 h
λ = DELTA0 / p^T h1               // скаляр для мінімізації
u = u + λp                        // обчислюємо наступне набли-
                                     ження
δ = δ - λh1                       // наступна нормалізована
                                     нев"язка
DELT1 = δ^T δ                     // похибка
IF DELT1 ≤ TOL → STOP             // умова спинення
h = Q^-1 p̄
h1 = A^T h
δ̄ = δ̄ - λh1                       // наступна нормалізована
                                     нев"язка
DELT1 = δ̄^T δ                     // похибка
α = DELT1 / DELT0
DELT0 = DELT1
p = δ + αp                        // вектор напряму
p̄ = δ̄ + αp̄                        // вектор напряму
GOTO R                            // повернення на крок R.
```

Даний алгоритм реалізований у вигляді програми на мові $C++$. Для розв"язання систем великих розмірів передбачена можливість використання зовнішньої пам"яті ПЕОМ.

<u>Приклад</u>. Як текстову задачу розглянемо застосування комбінованого скінченно-гранично елементного підходу для визначення пружно-деформівного стану в об"єкті, поперечний переріз якого поданий на рис. 2. Як бачимо на межі Γ_1 задаються умови жорсткого защемлення, на Γ_2 – нормальне одиничне навантаження.

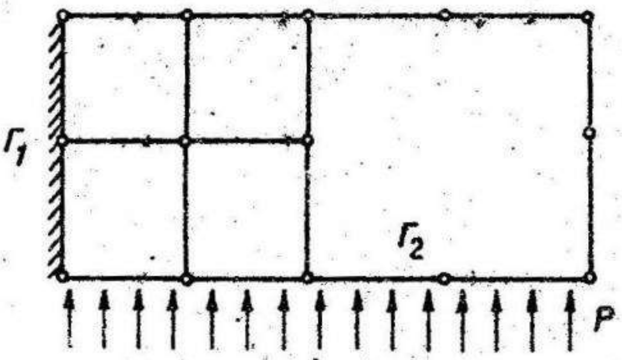

Рис. 2

У таблиці наведені результати розв"язування СЛАР, яку одержують застосуванням комбінованого підходу /3/ методами: Зейделя, вищеописаним методом та прямим методом Гаусса /3/ для двох різних сіток комбінованих апроксимацій та різних початкових наближень.

Розміри матриці /рис.1/ S/N/M	Кількість ітерацій I	Кількість ітерацій 2	Час рахунку /с/ I	Час рахунку /с/ 2	Час рахунку /с/ 3	Початкове наближення
	444	7	38	4		
I4/30/42	854	43	72	9	5	
	365	2I	32	5		
	3I5	33	25	I4		
I4/70/66	I66	37	33	I6	I2	

Тут використані позначення: I – метод Зейделя; 2 – прискорений ітераційний метод спряжених градієнтів; 3 – метод Гаусса; a –/розв"язок – 0.I*розв"язок/, b – всі значення вектора початкового наближення – I.0, c – всі значення вектора початкового наближення – 0.Ie – 3, d – початкове наближення – значення розв"язку для попередньої сітки, решта значень – 0.0; e – початкове наближення – значення розв"язку для попередньої сітки, решта значень одержані шляхом лінійної інтерполяції.

Як бачимо з таблиці, за швидкодією описаний ітераційний метод порівняльний з прямим методом /3/ та ефективніший від методу Зейделя. Процес збіжності цього методу не сильно залежить від початкового наближення.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных елементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с. 2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с. 3. Дияк І.І., Чернуха А.Ю. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.39. С.41–46. 4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: В 2 т. М.: Наука, 1976. Т.1. 302 с. 5. Araujo F.C., Mansur W.J., Malaghim J.E.B. Biconjugate Gradient Acceleration for Large BEM System of Equations. BEM XII. Vol 1. Applications in Stress Analysis, Potential and Diffusion // Proc. of Twelth Int. Conf. on BE in Eng. Septem., 1989. P. 24-27. 6. Mang H.A., Torzicky P., Chen Z.Y. On the mechanical inconsistency of symmetrization of unsymmetric coupling matrices for BEFEM discretization of solids // Computational Mechanics, 1989. Vol.4. P.301-308. 7. Stein E., Ohnimus S. Concept and realisation of integrated adaptive finite element methods in solid- and structural mechanics // Numerical Methods in Engineering'92. Ed. Ch. Hirsch. 1992. P. 163-170. 8. Zienkiewicz O.C., Kelly D.W., Bettess P. The coupling of the finite element method and boundary solution methods // Int. J. Numer. Methods Eng., 1977. Vol. 11(2). P. 355-375.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.94

УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДЕЯКОГО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Останнім часом велику увагу приділяють вивченню нелокальних задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних різних типів. Це пов"язане як з розмаїтим практичним застосуванням таких задач, так і з їхньою теоретичною важливістю.

Зацікавлення викликають також задачі даного типу для сингулярно збурених рівнянь. Для побудови асимптотики розв"язку таких задач може бути використана ідея побудови асимптотики роз-