чаткове наближення – значення розв"язку для попередньої сітки, решта значень одержані шляхом лінійної інтерполяції.

Як бачимо з таблиці, за швидкодією описаний ітераційний метод порівняльний з прямим методом /3/ та ефективніший від методу Зейделя. Процес збіжності цього методу не сильно залежить від початкового наближення.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных елементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с. 2. Бреббия К., Теллес Ж., Вробел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с. 3. Дияк І.І., Чернуха А.Ю. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.39. С.41–46. 4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: В 2 т. М.: Наука, 1976. Т.1. 302 с. 5. Arauro F.C., Mansur W.J., Malaghim J.E.B. Biconjugate Gradient Acceleration for Large BEM System of Equations. BEM XII. Vol 1. Applications in Stress Analysis, Potential and Diffusion // Proc. of Twelth Int. Conf. on BE in Eng. Septem., 1989. P. 24-27. 6. Mang H.A., Torzicky P., Chen Z.Y. On the mechanical inconsistency of symmetrization of unsymmetric coupling matrices for BEFEM discretization of solids // Computational Mechanics, 1989. Vol.4. P.301-308. 7. Stein E., Ohnimus S. Concept and realisation of integrated adaptive finite element methods in solid- and structural mechanics // Numerical Methods in Engineering'92. Ed. Ch. Hirsch. 1992. P. 163-170. 8. Zienkiewicz O.C., Kelly D.W., Bettess P. The coupling of the finite element method and boundary solution methods // Int. J. Numer. Methods Eng., 1977. Vol. 11(2). P. 355-375.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.94

УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДЕЯКОГО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Останнім часом велику увагу приділяють вивченню нелокальних задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних різних типів. Це пов"язане як з розмаїтим практичним застосуванням таких задач , так і з їхньою теоретичною важливістю.

Зацікавлення викликають також задачі даного типу для сингулярно збурених рівнянь. Для побудови асимптотики розв"язку таких задач може бути використана ідея побудови асимптотики розв"язку складнішої збуреної задачі на основі асимптотики розв"язку простішої сингулярно збуреної задачі. Ця ідея для звичайних диференціальних рівнянь вперше реалізована у праці [1]. Для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних вона виявилася також плідною і вперше реалізована у праці [7] /див. також [6], [8] /.

У даній роботі в області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T\}$ отримане асимптотичне розвинення такої задачі:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+a(x,t)u=f(x,t)\ ; \qquad /1/$$

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\ u(l,t)=0\ ; \qquad /2/$$

$$u(x,0)+\beta u(x,T)=0, \qquad /3/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Нехай N – деяке натуральне число. Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t)$, $f(x,t)$ – достатньо гладкі в D функції;

2/ $a(x,t)>0$ в D, $|\beta|\leq 1$.

Перш ніж будувати асимптотику розв"язку задачі /1/-/3/, побудуємо асимптотику розв"язку допоміжної локальної задачі, тобто задачі розв"язку рівняння /1/ з граничними умовами /2/ і початковою

$$u(x,0,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}z_i(x) \qquad /4/$$

замість нелокальної умови /3/, де $z_i(x)$ $(i=\overline{0,N})$ /на даному етапі/ задані достатньо гладкі функції, такі що

$$z_i(0)=z_i'(0)=z_i(l)=0 \quad (i=\overline{0,N}).$$

Розв'язання розв"язку допоміжної задачі /1/, /2/, /4/ будуватимемо методом примежового шару [1, 2]. Зауважимо, що у випадку $N=0$ асимптотичне розвинення цієї задачі отримане у праці [9].

Асимптотичне розвинення шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\Pi_i(x,\tau)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /5/$$

де $\tau=t/\varepsilon$.

Випишемо задачі, у яких визначаються функції, що входять у /5/. Вони визначаються стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ є розв"язками граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь / t входить як параметр/:

$$M\bar{u} = -\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + a(x,t)\bar{u}_i = f_i(x,t); \qquad /6/$$

$$\bar{u}_i(0,t)=0, \ \frac{\partial \bar{u}_i(0,t)}{\partial x}=0, \ \bar{u}_i(l,t)=0, \qquad /7/$$

де $f_0(x,t)\equiv 0$, $f_i(x,t) = -\frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial t}$ $(i=1,\dots,N)$.

Як бачимо, вони визначаються рекурентно. Добре відомо [4], що з єдиності розв"язку задачі /6/, /7/ випливає існування розв"язку цієї задачі. Тому достатньо показати, що рівняння $M\bar{u}_i = 0$ з нульовими граничними умовами /7/ має тільки тривіальний розв"язок. Дійсно, домножуючи це рівняння на $\bar{u}_i$, інтегруючи по x від 0 до l з урахуванням граничних умов /6/, отримуємо

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i(l,t)}{\partial x}\right)^2 + \int_0^l a(x,t)\bar{u}_i^2(x,t)\,dx = 0,$$

звідки випливає єдиність розв"язку задачі /5/, /6/ $i=0,\dots,N$, а це доводить існування розв"язку цієї задачі.

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$ в околі $t=0$ є розв"язками змішаних задач:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^3 \Pi_i}{\partial x^3} + a(x,0)\Pi_i = \varphi_i(x,\tau) \ (i=\overline{0,N}), \qquad /8/$$

$$\Pi_i(0,\tau)=0, \ \frac{\partial \Pi_i(0,\tau)}{\partial x}=0, \ \Pi_i(l,t)=0 \ (i=\overline{0,N}), \qquad /9/$$

$$\Pi_i(x,0) = z_i(x) - \bar{u}_i(x,0) \ (i=\overline{0,N}), \qquad /10/$$

де $\varphi_0(x,\tau)\equiv 0$, $\varphi_i(x,\tau)$ $(i=1,\dots,N)$ легко виписуються явним чином і лінійно залежать від $\Pi_j(x,\tau)$ $(j<i)$.

Після того як знайдені функції $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$, функції $\Pi_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ знаходяться рекурентно як розв"язки змішаних задач /8/–/10/. Показано, що функції $\Pi_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ експоненціально спадають при $\tau\to\infty$, тобто дійсно є функціями примежового шару в околі $t=0$.

Таким чином, формальне асимптотичне розвинення розв"язку допоміжної задачі /1/, /2/, /4/ побудоване. Далі вважаємо $z_i(x)$ $(i=0,\dots,N)$ невідомими, і головним завданням у побудові асимптотики розв"язку вихідної задачі /1/–/3/ є такий підбір $z_i(x)$ $(i=0,\dots,N)$, щоб формальне асимптотичне розвинення розв"язку допоміжної задачі /I/, /2/, /4/ було одночасно і формальним асимптотичним розвиненням розв"язку вихідної задачі /I/-/3/.

Підстановка асимптотичного розвинення /5/ розв"язку допоміжної задачі /I/, /2/, /4/ у нелокальну умову /3/ дає співвідношення для визначення $z_i(x)$ $(i=0,\dots,N)$, а саме

$$z_i(x) = -\beta \bar{u}_i(x,T) \quad (i=0,\dots,N). \qquad /II/$$

Підставляючи отримані вирази /II/ у /I0/, маємо початкові умови для визначення функцій $\Pi_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ – функцій примежового шару асимптотичного розвинення вихідної задачі /I/-/3/. Розв"язуючи задачі /8/-/I0/ з уже визначеними початковими умовами, отримуємо функції примежового шару $\Pi_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$. Разом з уже визначеними функціями $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ це дає всі функції, що входять в асимптотичне розвинення /5/ задачі /I/-/3/.

Застосування методу інтегралів енергії [3] до задачі знаходження залишкового члена дає таку оцінку:

$$\| R_N(x,t,\varepsilon) \|_{L_\varepsilon(D)} \leq C\varepsilon^{N+1}, \qquad /I2/$$

де константа C не залежить від вибору ε.

Таким чином, отримана така теорема.

<u>Теорема</u>. Нехай у D виконуються умови /I/, /2/. Тоді розв"язок задачі /I/-/3/ допускає асимптотичне зображення /5/, де $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ – розв"язки задач /6/, /7/; функції примежового шару $\Pi_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ – розв"язки задач /8/, /9,/ /I0/, де $z_i(x)$ $(i=0,\dots,N)$, що входить у /I0/ визначається з /II/; залишковий член допускає оцінку /I2/.

I. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122. 3. Курант Р. Уравнение с частными производными. М.: Наука, 1964. 4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения// М.: Наука, 1970. 6. Цимбал В. Нелокальна задача для деяких сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних // Тези доп. Всеукр. наук. конф. "Нові підходи до розв"язання диференціальних рівнянь" /м.Дрогобич, 25-27 січня 1994 р./. К.: Ін-т математики АН України, 1994.

7. Ц и м б а л В.Н. Некоторые неклассические сингулярно возмущенные задачи // Методы малого параметра и их применение: Тез. лекций и кратких науч. сообщ. всесоюз. школы-семинара /г.Минск, 13-18 сент. 1982 г./ М.: АН СССР, 1982. 8. Ц и м б а л В.Н. Нелокальная задача для сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений // Тез. 8 Респ. конф. "Нелинейные задачи математической физики и задачи со свободной границей" /г.Донецк, 3-8 сент. 1991 г./. Донецк: Ин-т прикл. математики и механики, 1991. 9. Ц и м б а л В.Н. Приближенное решение смешанной задачи для некоторого уравнения математической физики // Тез. лекций и докл. всесоюз. школы молодых ученых "Численные методы решения задач математической физики" /г.Москва, 26 мая-4 июня 1988 г./ М.: Изд-во Всесоюз. об-ва "Знание", 1983. Ч.2. С.29-30.

Стаття надійшла до редколегії 18.03.94

УДК 518:517.948

М.В.Жук

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv -\frac{\partial p(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial q(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} + r(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = f(x,y) \qquad /1/$$

за однорідної крайової умови:

$$Pu|_{\Gamma} = \left[p(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\cos(\nu,x) + q(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\cos(\nu,y)\right]\Big|_{\Gamma} = 0 \qquad /2/$$

де Γ – межа області D, обмеженої по x прямими $x=b$ і $x=b$, а по y – достатньо гладкими кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x)<h(x)$, ν – зовнішня нормаль до Γ.

На функції $p(x,y,s,t,z)$, $q(x,y,s,t,z)$, $r(x,y,s,t,z)$ і $f(x,y)$ накладаються ті ж обмеження, що і в праці [2].

Введемо допоміжний оператор T, який визначається за формулами:

$$Tu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u, \qquad /3/$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y)\right]\Big|_{\Gamma} = 0. \qquad /4/$$