7. Ц и м б а л В.Н. Некоторые неклассические сингулярно возмущенные задачи // Методы малого параметра и их применение: Тез. лекций и кратких науч. сообщ. всесоюз. школы-семинара /г.Минск, 13-18 сент. 1982 г./ М.: АН СССР, 1982. 8. Ц и м б а л В.Н. Нелокальная задача для сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений // Тез. 8 Респ. конф. "Нелинейные задачи математической физики и задачи со свободной границей" /г.Донецк, 3-8 сент. 1991 г./. Донецк: Ин-т прикл. математики и механики, 1991. 9. Ц и м б а л В.Н. Приближенное решение смешанной задачи для некоторого уравнения математической физики // Тез. лекций и докл. всесоюз. школы молодых ученых "Численные методы решения задач математической физики" /г.Москва, 26 мая-4 июня 1988 г./ М.: Изд-во Всесоюз. об-ва "Знание", 1983. Ч.2. С.29-30.

Стаття надійшла до редколегії 18.03.94

УДК 518:517.948

М.В.Жук

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv -\frac{\partial p\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial q\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + r\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y) \qquad /1/$$

за однорідної крайової умови:

$$Pu\Big|_\Gamma = \left[p\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\nu,x) + q\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\nu,y)\right]\Big|_\Gamma = 0 \qquad /2/$$

де Γ – межа області D, обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y – достатньо гладкими кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x)<h(x)$, ν – зовнішня нормаль до Γ.

На функції $p(x,y,s,t,z)$, $q(x,y,s,t,z)$, $r(x,y,s,t,z)$ і $f(x,y)$ накладаються ті ж обмеження, що і в праці [2].

Введемо допоміжний оператор T, який визначається за формулами:

$$Tu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u, \qquad /3/$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y)\right]\Big|_\Gamma = 0. \qquad /4/$$

За область визначення $D(T)$ оператора T приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x,y)$ у замкнутій множині $\bar{D}$, які задовольняють крайові умови /4/.

При цьому оператор T на лінеалі $D(T)$ буде додатно визначеним:

$$(Tu,u)=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u^2\right]dxdy\geqslant\|u\|^2. \qquad /5/$$

Позначимо через $H_T\subset H=L_2(D)$ енергетичний простір оператора T, тобто замикання $D(T)$ у метриці

$$[u,v]=(Tu,v)=\iint\limits_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+uv\right]dxdy,$$

$$|u|^2=[u,u].$$

Можна показати, що функції $u(x,y)\in H_T$ мають перші узагальнені похідні, сумовані з квадратом в D, і що крайові умови /4/ – природні, тобто $H_T=W_2^1(D)$.

Із нерівності /5/ внаслідок граничного переходу для довільного $u\in H_T$ отримуємо

$$\|u\|\leqslant|u|. \qquad /6/$$

Для довільних $u,v\in H_T$ формально введемо напівлінійну форму:

$$A(u,v)\equiv\iint\limits_D\left[p\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+q\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+z\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)v\right]dxdy. \qquad /7/$$

Припустимо, що при $(x,y)\in\bar{D}$ і довільних s,t,z справедлива нерівність

$$\frac{\partial p}{\partial t}\xi_1^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial t}\right)\xi_1\xi_2+\frac{\partial q}{\partial t}\xi_2^2+\left(\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial t}\right)\xi_1\xi_0+$$

$$+\left(\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\xi_2\xi_0+\frac{\partial z}{\partial s}\xi_0^2\geqslant M(\xi_1^2+\xi_2^2)+N\xi_0^2,$$

де ξ_0,ξ_1,ξ_2 – довільні дійсні числа, $M=const>0$, $N=const>0$. Тоді для довільних $u,v\in H_T$ справедлива нерівність

$$A(u,u-v)-A(v,u-v)\geqslant\mu|u-v|^2, \qquad /8/$$

де $\mu=\min\{M,N\}$.

Крім цього, для довільних $u,v,w\in H_T$ можна визначити виконання нерівності

$$|A(u,w)-A(v,w)|\leqslant\eta|u-v||w|, \qquad /9/$$

де $\eta = 3\max\{M_1, M_2, N_1, N_2\}$ а константи M_1, M_2, N_1, N_2 визначаються умовами задачі /формула /3/ із праці [2]/.

Узагальненим розв"язком задачі /I/-/2/ називається функція $u(x,y) \in H_T$, для якої виконується тотожність

$$A(u,v) = \iint_D f v(x,y)\,dx\,dy \qquad /10/$$

при довільній функції $v(x,y) \in H_T$. Відомо /див., приміром [I]/, що виконання умов /8/, /9/ забезпечує існування та єдиність узагальненого розв"язку.

Наближений розв"язок задачі /I/-/2/ шукаємо методом Канторовича у вигляді

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k(x,y), \qquad /11/$$

де лінійно незалежні у проміжку $[g(x), h(x)]$ функції $\varphi_k(x,y)$ вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{X_l(x)\ \varphi_k(x,y)\} \in H_T$ була повною за енергією. Шукані коефіцієнти $c_k(x)$ визначаємо зі системи

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (Au_n - f)\varphi_i\,dy + \varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,Pu_n\Big|_{y=g(x)} + \varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,Pu_n\Big|_{y=h(x)} = 0 \qquad /12/$$

за умов

$$\int_{g(a)}^{h(a)} \varphi_i Pu_n\Big|_{x=a} dy = 0, \quad \int_{g(b)}^{h(b)} \varphi_i Pu_n\Big|_{x=b} dy = 0, \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad /13/$$

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду

$$v_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\varphi_k(x,y).$$

Узагальненим розв"язком системи методу Канторовича /12/-/13/ називається функція $u_n(x,y) \in H_n \cap H_T$, що задовольняє тотожність

$$A(u_n, v_n) = \iint_D f v_n(x,y)\,dx\,dy \qquad /14/$$

при довільній функції $v_n(x,y) \in H_n \cap H_T$.

Покажемо, що узагальнений розв"язок системи методу Канторовича існує та є єдиним. Для цього до задачі /I/-/2/ застосовуємо метод Бубнова-Гальоркіна, тобто наближений розв"язок шукаємо у вигляді:

$$u_n^m(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} c_{kl}\, X_l(x)\varphi_k(x,y), \qquad /15/$$

а невідомі коефіцієнти C_{kl} визначаємо зі системи

$$A(u_n^m, x_j(x)\varphi_i(x,y)) = \iint_D f x_j(x)\varphi_i(x,y)\,dx\,dy \qquad /16/$$
$$i=1,2,\dots,n,\; j=1,2,\dots,m.$$

Система /16/ зводиться до системи нелінійних алгебраїчних або трансцендентних рівнянь, розв"язок яких існує та є единим [1].

Аналогічно, як і в праці [3], можна показати, що послідовність розв"язків $\{u_n^m\}$ системи /16/ при $m \to \infty$ слабо збігається у просторі H_T до єдиного узагальненого розв"язку системи методу Канторовича /12/-/13/.

Теорема. Якщо обмеження на вихідні дані задачі /1/-/2/ такі, що виконуються умови /8/, /9/, то для довільної функції $f(x,y) \in H$ задача /1/-/2/ має єдиний узагальнений розв"язок $u(x,y) \in H_T$ і при довільному n система методу Канторовича /12/-/13/ має єдиний узагальнений розв"язок $u_n(x,y) \in H_n \cap H_T$.

1. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М., 1974. 2. Ж у к М.В. Застосування методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.37. С.12-16. 3. Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для нелинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. 1976. Т.28. № 2. С.183-193.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.94

УДК 519.6

В.М.Зубов, С.Ю.Терлецька

ПРОТИПОТОКОВА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗАБРУДНЕННЯ АТМОСФЕРИ

1. Постановка задачі про поширення домішок в атмосфері. Усталений у часі процес поширення пасивної домішки в приземному шарі атмосфери описується рівнянням турбулентної дифузії [1]:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_x \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_y \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + div(\bar{u}\varphi) + \sigma\varphi = f, \quad /1/$$

що встановлює залежність між шуканою концентрацією домішки $\varphi(x,y,z)$, вектором швидкості вітру $\bar{u} = (u(x,y,z), v(x,y,z), \omega(x,y,z))$,