а невідомі коефіцієнти c_{kl} визначаємо зі системи

$$A(u_n^m, x_j(x)\varphi_i(x,y)) = \iint_D f x_j(x)\varphi_i(x,y)\,dx\,dy \qquad /16/$$

$$i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m.$$

Система /16/ зводиться до системи нелінійних алгебраїчних або трансцендентних рівнянь, розв"язок яких існує та є єдиним [1].

Аналогічно, як і в праці [3], можна показати, що послідовність розв"язків $\{u_n^m\}$ системи /16/ при $m \to \infty$ слабо збігається у просторі H_T до єдиного узагальненого розв"язку системи методу Канторовича /12/-/13/.

Теорема. Якщо обмеження на вихідні дані задачі /1/-/2/ такі, що виконуються умови /8/, /9/, то для довільної функції $f(x,y) \in H$ задача /1/-/2/ має єдиний узагальнений розв"язок $u(x,y) \in H_T$ і при довільному n система методу Канторовича /12/-/13/ має єдиний узагальнений розв"язок $u_n(x,y) \in H_n \cap H_T$.

1. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М., 1974. 2. Ж у к М.В. Застосування методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.37. С.12-16. 3. Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для нелинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. 1976. Т.28. № 2. С.183-193.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.94

УДК 519.6

В.М.Зубов, С.Ю.Терлецька

ПРОТИПОТОКОВА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗАБРУДНЕННЯ АТМОСФЕРИ

1. Постановка задачі про поширення домішок в атмосфері. Усталений у часі процес поширення пасивної домішки в приземному шарі атмосфери описується рівнянням турбулентної дифузії [1]:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_x \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_y \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + div(\bar{u}\varphi) + \sigma\varphi = f, \quad /1/$$

що встановлює залежність між шуканою концентрацією домішки $\varphi(x,y,z)$, вектором швидкості вітру $\bar{u} = (u(x,y,z), v(x,y,z), \omega(x,y,z))$, коефіцієнтами турбулентної дифузії $\mu_x(x,y,z)$, $\mu_y(x,y,z)$, $\nu(x,y,z)$ коефіцієнтом поглинання/розкладу домішки, функцією $f(x,y,z)$, яка описує інтенсивність джерел домішки.

Рівняння /1/ розглядається в циліндричній області Ω, на границі якої задаються такі умови:

$$\varphi = 0, \quad (\bar{u},\bar{n}) < 0 \ \text{на} \ \Sigma; \qquad /2/$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad (\bar{u},\bar{n}) \geq 0 \ \text{на} \ \Sigma; \qquad /3/$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\alpha\varphi \ \text{на} \ \Sigma_0; \qquad /4/$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{на} \ \Sigma_H, \qquad /5/$$

де $\bar{n}(x,y,z)$ – вектор одиничної зовнішньої нормалі до Σ; $\alpha(x,y)$ – коефіцієнт взаємодії домішки з поверхнею землі; Σ – бічна поверхня циліндра; Σ_0 – нижній торець циліндра, Σ_H – верхній торець циліндра.

2. Модельне одновимірне рівняння. 2.1. Формулювання допоміжної крайової задачі. Для дослідження впливу параметрів крайової задачі на поведінку її розв"язку розглянемо на відрізку $[0,L]$ найпростіше одновимірне рівняння адвекції-дифузії /2, 3/:

$$-k\frac{d^2\varphi}{dx^2} + u\frac{d\varphi}{dx} = 0 \qquad /6/$$

з постійними коефіцієнтом дифузії k та швидкістю потоку u /обидва додатні/. Рівняння /6/ доповнимо граничними умовами:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = 1. \qquad /7/$$

Крайову задачу /6/, /7/ можна трактувати як математичну модель одновимірного перенесення домішки на відрізку $[0,L]$, на правому кінці якого $(x = L)$ підтримується постійний рівень домішки, що дорівнює 1.

Точний розв"язок задачі /6/, /7/ має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{1 - \exp(Pe\, x/L)}{1 - \exp(Pe)}, \qquad /8/$$

де $Pe = uL/k$ – безрозмірний параметр, який називається числом Пекле.

При малих числах Пекле $(Pe \ll 1)$ розв"язок задачі /6/, /7/ практично лінійно залежить від x, тоді як при великих Pe $(Pe \gg 1)$ розв"язок $\varphi(x)$ неістотно змінюється майже на всьому відрізку $[0,L]$ $(\varphi(x) = 0)$, за винятком деякого малого околу точки $x=L$, який називається примежовим шаром, в якому градієнт функції $\varphi(x)$ досягає великих значень. Товщина примежового шару пропорційна до $1/Pe$ /2/.

Наявність примежового шару істотно ускладнює відшукання розв"язку задачі /6/, /7/ стандартними чисельними методами /методом сіток, методом скінченних елементів/. Тому потрібні спеціальні підходи, що враховують специфіку таких задач.

2.2. <u>Метод скінченних різниць. Протипотокові різниці.</u> Як приклад розглянемо розв"язок задачі /6/, /7/ методом скінченних різниць. Для цього апроксимуємо похідні, що входять до рівняння /6/, різницями першого порядку:

$$\frac{d\varphi}{dx} \approx \frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \approx \frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2},$$

де $h=L/N$ – параметр дискретизації /вузли скінченно-різницевої сітки $x_i=x_0+ih,\ i=1,\dots,N$/. У результаті отримаємо різницеву схему:

$$-k\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2}+u\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}=0. \qquad /9/$$

Чисельні розв"язки задачі /6/, /7/ на сітці, що складається з II вузлів ($N=10$), побудовані з використанням схеми /9/, демонструють осцилюючий характер скінченно-різницевої апроксимації вигляду /9/ при $\alpha \geq 1$. Причому осциляції наближеного розв"язку викликані лише недоліками чисельної схеми і не мають жодної фізичної інтерпретації.

Типовим прийомом для вгамування осциляцій скінченно-різницевого розв"язку рівняння адвекції-дифузії з використання несиметричної протипотокової різниці для апроксимації першої похідної в рівнянні /6/:

$$\frac{d\varphi}{dx} \approx \frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h}.$$

При цьому друга похідна надалі апроксимується центральною різницею другого порядку:

$$-k\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2}+u\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h}=0. \qquad /10/$$

Аналіз чисельних розв"язків задачі /6/, /7/, отриманих з використанням протипотокової схеми /10/, приводить до висноввку, що схема з центрально-різницевою апроксимацією адвективного члена має від"ємну штучну дифузію, тоді як у протипотоковій схемі закладена додатна штучна дифузія.

Неважко переконатись у тому, що адвективний член у /10/ можна подати у вигляді суми члена із центральною різницею, а також додаткового дифузійного члена:

$$u\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h}=u\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}}{2h}-\bar{k}\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2},$$

де $\bar{k}=uh/2$ – надлишкова дифузія різницевої схеми /10/ порівняно зі схемою /9/.

Таким чином, чисельний розв"язок можна уточнити, якщо в різницевій схемі записати деяку лінійну комбінацію центральної та протипотокової різниць. Або, що еквівалентно, вибрати потрібне значення коефіцієнта штучної дифузії $\bar{k}$.

Дійсно, у праці [5] з"ясовано, що якщо до схеми /9/ додати дифузійний член з коефіцієнтом дифузії

$$\bar{k}=\frac{uh}{2}\xi, \qquad /11/$$

де $\xi=\coth(\alpha)-1/\alpha$, $\alpha=uh/(2k)$, тоді розв"язок отриманої різницевої схеми початково збігатиметься з точним розв"язком задачі /6/, /7/ (у вузлах сітки/.

2.3. <u>Метод скінченних елементів. Формулювання Петрова-Гальоркіна.</u> Аналогічна проблема, що стосується осциляцій чисельного розв"язку, виникає під час розв"язування задачі /6/, /7/ з великими числами Пекле методом скінченних елементів за допомогою стандартного формулювання варіаційних рівнянь методу Гальоркіна:

$$\int_0^L\left(k\frac{d\varphi}{dx}\ \frac{d\Phi_i}{dx}+u\frac{d\varphi}{dx}\Phi_i\right)dx=0, \qquad /12/$$

де $\Phi_i(x)$ – деяка функція з простору пробних функцій Φ_h, в якому потрібно знайти наближений розв"язок задачі /6/, /7/.

Неважко перевірити, що якщо Φ_h вибирається згідно з методом скінченних елементів, причому

$$\Phi_h=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h}, & x\in[x_{i-1},x_i],\\ -\dfrac{x-x_{i+1}}{h}, & x\in[x_i,x_{i+1}],\end{cases}\quad i=1,\dots,N-1, \qquad /13/$$

тоді варіаційне формулювання /12/ задачі /6/, /7/ зводиться до рівняння /9/, що відповідає центрально-різницевій апроксимації адвективного члена в /6/.

На відміну від методу скінченних різниць, у методі скінченних елементів існує декілька шляхів боротьби з осциляціями, викликаними від"ємною штучною дифузією чисельної схеми /що відповідає формулюванню Гальоркіна методу скінченних елементів/.

Перший з них припускає додавання у вихідне формулювання крайової задачі штучної дифузії, що в наступному компенсує від"ємну схемну дифузію методу Гальоркіна [6]. Для задачі /6/, /9/ такий підхід приводить до формулювання

$$\int_0^L \left((k+\bar{k}) \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\Phi_i}{dx} + u \frac{d\varphi}{dx} \Phi_i \right) dx = 0, \qquad /14/$$

де $\bar{k}$ вибирається згідно з /11/.

Друга можливість полягає у використанні квадратурної формули спеціального вигляду для інтегрування адвективного члена в /11/, що врешті-решт приводить до дискретної задачі [4], еквівалентної до /10/.

І, нарешті, третій шлях пов"язаний з використанням методу Петрова-Гальоркіна для отримання варіаційного формулювання вихідної крайової задачі. У цьому методі використовуються вагові функції, що різняться від пробних функцій, тоді як у методі Гальоркіна простори вагових та пробних функцій збігаються.

Для задачі /6/, /7/ варіаційне формулювання Петрова-Гальоркіна має вигляд /рівняння /6/ множимо на вагову функцію $\Phi_i = \Phi_i^1 + \Phi_i^2$ та інтегруємо від 0 до L з використанням формули інтегрування частинами/:

$$\int_0^L \left(k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\Phi_i^1}{dx} + k \frac{d^2\varphi}{dx^2} \Phi_i^2 + u \frac{d\varphi}{dx} (\Phi_i^1 + \Phi_i^2) \right) dx = 0, \qquad /15/$$

при цьому розв"язок шукаємо у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i \Phi_i^1(x).$$

Якщо Φ_i^1 вибираємо згідно /13/, а

$$\Phi_2^i = \frac{\bar{k}}{u} \frac{d\Phi_i^1}{dx},$$

тоді рівняння /15/ еквівалентне /14/ за рахунок того, що

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

всередині кожного скінченного елемента.

Таким чином, у випадку задачі /6/, /7/ всі три підходи до конструювання протипотокової схеми методу скінченних елементів приводять до одного і того ж дискретного рівняння.

3. <u>Протипотокова схема МСЕ у випадку декількох просторових вимірів</u>. Під час використання розглянутих протипотокових схем МСЕ, адаптованих до випадку декількох вимірів, виникають

труднощі, пов"язані з виникненням так званого ефекту поперечної дифузії.

Суть цього ефекту полягає в появі додаткової штучної дифузії в напрямі перпендикулярному до напряму швидкості потоку, що зумовлює істотні похибки чисельного розв"язку.

Для уникнення ефекту поперечної дифузії у праці [6] запропоновано використовувати тензор штучної дифузії $\bar{k}_{ij}$ замість скалярного коефіцієнта $\bar{k}$. При цьому

$$k_{ij} = \bar{k}\hat{u}_i\hat{u}_j\ ,\ \hat{u}_i = u_i/\|\bar{u}\|, \qquad /16/$$

де u_i – компоненти вектора швидкості потоку. Заміна скалярного коефіцієнта штучної дифузії $\bar{k}$ тензором $\bar{k}_{ij}$ знищує поперечну схемну дифузію, оскільки в останньому випадку штучна дифузія вводиться тільки в напрямі вектора швидкості потоку.

У праці [5] зазначено, що у випадку наявності правої частини f у рівнянні адвекції-дифузії несумісність вагових функцій, що відповідають f та адвективному членові, також приводить до перебільшеної дифузії чисельної апроксимації. Цим пояснюється необхідність використання методу Петрова-Гальоркіна для формулювання варіаційної задачі.

Розглянемо n-вимірне рівняння адвекції-дифузії:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\sum_{j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+u_i\varphi\right)=f \text{ в } \Omega\subset R^n. \qquad /17/$$

Сформулюємо такі граничні умови:

$$\varphi=0 \text{ на } \Gamma_g\ ; \qquad /18/$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}n_i=s \text{ на } \Gamma_s\ , \qquad /19/$$

де Γ_g та Γ_s – частини границі області Ω, в якій розглядається рівняння /17/, що задовольняють умови:

$$\overline{\Gamma_g\cup\Gamma_s}=\partial\Omega\ ,\ \overline{\Gamma_g\cap\Gamma_s}=0.$$

Формулювання Петрова-Гальоркіна крайової задачі /17/-/19/ має вигляд

$$\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi_k^1}{\partial x_j}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(k_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\Phi_k^2\right)+u_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\Phi_k^1+\Phi_k^2)\right)-\right.$$

$$\left.f\Phi_k\right\}dx+\int_{\Gamma_s}s\Phi_k^1 d\Gamma=0,$$

де
$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{N}\Phi_i^1(x).$$

Якщо $\Phi_i^1(x)$ - полілінійна функція, то на прямокутній сітці похідна $\partial^2\varphi/\partial x_j^2$ перетворюється в нуль. У цьому випадку формулювання Петрова-Гальоркіна задачі /17/-/18/ набуває вигляду

$$\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi_k^1}{\partial x_j}\right)+u_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\Phi_k^1+\Phi_k^2)\right)-f\Phi_k\right\}dx+\int_{\Gamma_2}s\Phi_k^1 d\Gamma=0.$$

Ефект "протипотоковості" досягається за рахунок вибору функцій $\Phi_i^2(x)$ у вигляді

$$\Phi_i^1(x)=\bar{k}\sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{u}_j}{\|u\|}\frac{\partial\Phi_k^1}{\partial x},$$

де $\bar{k}$ - коефіцієнт штучної дифузії, що у двовимірному випадку /для одного скінченного елемента/ визначається за формулами:

$$\bar{k}=(\bar{\xi}u_\xi h_\xi+\bar{\eta}u_\eta h_\eta)/2,$$
$$\bar{\xi}=\coth(\alpha_\xi)-1/\alpha_\xi,\quad \eta=\coth(\alpha_\eta)-1/\alpha_h,$$
$$\alpha_\xi=u_\xi h_\xi/(2k),\ \alpha_\eta=u_\eta h_\eta/(2k),$$
$$u_\xi=(\bar{e}_\xi,\bar{u}),\ u_\eta=(\bar{e}_\eta,\bar{u}),$$

де $\bar{e}_\xi$, $\bar{e}_\eta$, h_ξ, h_η - геометричні характеристики скінченного елемента.

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с. 2. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с. 3. Finite Element Methods for Convection Dominated Flows/Ed. T.J.R. Hughes. New York: ASME, 1988. 227p. 4. Hughes T.J.R. A simple scheme for developing "upwind" finite elements// Int.J. Numer. Meth. Eng. 1978. Vol. 12. P.1359-1362. 5. Hughes T.J.R., Brooks A. A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion // Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, AMD. 1979. Vol.34. 6. Kelly D.W., Nakazawa S., Zienkiewicz O.C., Heinrich J.C. A note of upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problem. Internat. J. Numer. Methods Eng. 1980. Vol.15. P.1705-1711.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.94