УДК 519.6

В.М.Зубов, С.Ю.Терлецька, Г.А.Шинкаренко

РОЗВ"ЯЗУВАНІСТЬ І АПРОКСИМАЦІЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МІГРАЦІЇ АТМОСФЕРНИХ ДОМІШОК

Мета даної роботи - проаналізувати коректність варіаційної задачі про нестаціонарну конвекцію - дифузію пасивної домішки в приземному шарі атмосфери і з"ясувати можливості проекційно-сіткових методів розв"язування даного класу задач. З огляду на це з використанням спеціального трактування конвективних доданків конструюється варіаційна задача і доводиться, що границя послідовності відповідних напівдискретних апроксимацій Гальоркіна є її розв"язком. Більше того, для типових просторів методу скінченних елементів будуються апріорні оцінки швидкості збіжності таких апроксимацій. Повна дискретизація варіаційної задачі досягається побудовою однокрокових рекурентних схем інтегрування по часу, для яких визначаються достатні умови стійкості та оцінки збіжності.

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай Ω утворює обмежену зв"язну область точок $x=(x_1,\dots,x_n)$ евклідового простору $\mathbb{R}^n$ з неперервною за Ліпшицем границею Γ. Позначимо через $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ, t - поточний момент часу з проміжку, що нас цікавить, $[0,T]$, $0<T<+\infty$, $u=(u_1,\dots,u_n)$ - заданий вектор швидкості вітру, що задовольняє умову нестисливості:

$$\operatorname{div} u = u_{i,i} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \qquad /1.1/$$

$f=f(x,t)$ - відома інтенсивність джерел аерозолю, концентрацію якого позначатимемо через $\psi(x,t)$. У рівнянні /1.1/ і всюди далі по індексах, що повторюються, передбачається підсумовування від 1 до n, $\psi_{,i}=\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}$.

Розглянемо задачу перенесення і дифузії пасивного аерозолю в приземному шарі атмосфери: знайти концентрацію $\psi(x,t)$ таку, що

$$\psi' + u_i\psi_{,i} - \{\mu_{ij}\psi_{,j}\}_{,i} + \sigma\psi = f \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \qquad /1.2/$$

$$\psi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi\times[0,T],\ mes(\Gamma_\psi)>0,\ \Gamma_\psi\subset\Gamma, \qquad /1.3/$$

$$\mu_{ij}\psi_{,j}\nu_i + \alpha\psi = 0 \text{ на } \Gamma_q \times [0,T],\ \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_\psi\ , \qquad /I.4/$$

$$\psi = \psi_0 \text{ в } \Omega\ ,\ t=0. \qquad /I.5/$$

Тут $\sigma = \sigma(x) \geq 0$ – коефіцієнт поглинання аерозолю; $\mu_{ij} = \mu_{ij}(x)$ – коефіцієнти турбулентної дифузії, що задовольняють звичайну умову симетрії та еліптичності:

$$\begin{cases} \mu_{ij} = \mu_{ji}\ , \\ \mu_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu_0\xi_i\xi_i\ ,\ \mu_0 = const > 0,\ \forall \xi_i \in R; \end{cases} \qquad /I.6/$$

$\alpha = \alpha(x) \geq 0$ – коефіцієнт взаємодії аерозолю із зовнішнім середовищем; $\Gamma_\psi = \{ x \in \Gamma \mid \nu_i u_i < 0 \}$, $\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial t}$.

Вичерпні і фізично змістовні постановки задач про міграцію аерозолю розглянуті у праці [4]. Відзначимо, що такі задачі, як /I.I/, /I.6/, також виникають під час розв"язування екологічних проблем забруднення промисловими стоками водних басейнів [5], - забруднення пестицидами сільськогосподарських угідь і грунтових вод.

2. Варіаційна постановка задачі. Введемо простори

$$\Phi = \{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_\varphi \}\ ,\ H = L^2(\Omega)\ ,$$
$$U = \{ v \in L^\infty(\Omega)^n \cap H(div; \Omega) \mid div\, v = 0 \text{ в } \Omega \}\ ,$$

де $H^k(\Omega)$ – простори функцій Соболева, інтегрованих з квадратом в області Ω разом зі своїми всеможливими похідними до k-го порядку включно, $H(div; \Omega) = \{ v \in L^2(\Omega)^n \mid div\, v \in L^2(\Omega) \}$; докладніше ці та наведені далі простори описані у праці [1]. Використовуватимемо такі форми:

$$\begin{cases} m(\psi,\varphi) = \int\limits_\Omega \psi\varphi\, dx\ ,\quad b_1(u;\psi,\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [\varphi\, div\, \psi u - \psi\, div\, \varphi u]\, dx, \\ b_2(u;\psi,\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_q} \varphi\psi u_i \nu_i\, d\gamma,\ b(u,\psi,\varphi) = b_1(u;\psi,\varphi) + b_2(u;\psi,\varphi), \\ a(\varphi,\psi) = \int\limits_\Omega \{ \mu_{ij}\varphi_{,i}\psi_{,j} + \sigma\varphi\psi \}\, dx + \int\limits_{\Gamma_q} \alpha\varphi\psi\, d\gamma\ , \\ \langle l,\varphi \rangle = \int\limits_\Omega f\varphi\, dx \qquad \forall \psi,\varphi \in \Phi,\ \forall u \in U. \end{cases} \qquad /2.1/$$

Розглянемо таке /одне із можливих/ варіаційне формулювання початково-крайової задачі /I.I/-I.6/:

$$\begin{cases} \text{задано } \psi_0 \in H,\ l \in L^2(0,T;\Phi'),\ u \in L^2(0,T;U); \\ \text{знайти } \psi \in L^2(0,T;\Phi) \text{ таку, що} \\ m(\psi'(t),\varphi) + b(u(t),\psi(t),\varphi) + a(\psi(t),\varphi) = \langle l(t),\varphi \rangle, \\ m(\psi(0) - \psi_0,\varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \Phi\ . \end{cases} \qquad /2.2/$$

Застосовуючи інтегрування частинами і тотожність

$$b(u,\psi,\varphi)=\int_{\Omega}\varphi u_i\psi_{,i}\,dx=\frac{1}{2}\Big\{\int_{\Omega}[\varphi\,\mathrm{div}\,\psi u-$$

$$-\psi\,\mathrm{div}\,\varphi u\,]dx+\int_{\Gamma_4}\varphi\psi u\nu d\gamma\Big\}\ ,\ \forall\varphi,\psi\in\Phi\ \forall u\in U, \qquad /2.3/$$

неважко перевірити, що розв"язок початково-крайової задачі /1.1/-/1.6/ /якщо він існує/ одночасно є розв"язком варіаційної задачі /2.2/.

Зауваження 2.1. Неважко переконатися [7], що неперервна симетрична білінійна форма $a(\cdot,\cdot):\Phi\times\Phi\to R$ породжує на просторі Φ норму

$$|||\varphi|||=a^{\frac{1}{2}}(\varphi,\varphi)\qquad \forall\varphi\in\Phi. \qquad /2.4/$$

Із визначення /2.1/ зрозуміло також, що трилінійні форми $b_k(\cdot,\cdot,\cdot)$: $U\times\Phi\times\Phi\to R$ мають властивості:

$$\begin{cases} b_1(u,\varphi,\psi)=-b_1(u,\psi,\varphi), \\ b_2(u,\varphi,\varphi)\geq 0 \quad , \qquad \forall u\in U,\ \forall\varphi,\psi\in\Phi. \end{cases} \qquad /2.5/$$

Остання з властивостей /2.5/ дає змогу ввести на Φ ще одну норму:

$$\|\varphi\|=\{a(\varphi,\varphi)+b_2(u,\varphi,\varphi)\}^{\frac{1}{2}}\qquad \forall\varphi\in\Phi \qquad /2.6/$$

3. Напівдискретизація Гальоркіна. Введемо послідовність підпросторів $\{\Phi_h\}\in\Phi$ таку, що

$$\dim\Phi_h=N(h)\to N\to\infty\quad h\to 0, \qquad /3.1/$$

$\bigcup_{h>0}\Phi_h$ щільно вкладені в Φ.

Для кожного фіксованого значення $h>0$ визначимо напівдискретну апроксимацію Гальоркіна $\psi_h\in\Phi_h$ як розв"язок задачі

$$\begin{cases} \text{знайти } \psi_h\in L^2(0,T;\Phi_h) \quad \text{таку, що} \\ m(\psi_h'(t),\varphi)+b(u(t),\psi_h(t),\varphi)+a(\psi_h(t),\varphi)=\langle l(t),\varphi\rangle, \\ m(\psi_h(0)-\psi_0,\varphi)=0\ , \qquad \forall\varphi\in\Phi_h\ . \end{cases} \qquad /3.2/$$

Якщо $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ базис простору Φ_h , то розв"язок задачі /3.2/ можна подати у вигляді лінійної комбінації:

$$\psi_h=\sum_{j=1}^{N}q_j(t)\varphi_j \qquad /3.3/$$

з невідомими коефіцієнтами $Q(t)=(q_1(t),\dots,q_N(t))$.

Підставляючи в рівняння задачі /3.3/ послідовно $\varphi = \varphi_i$, $i=1,\dots,N$, приходимо до такої задачі Коші для визначення цих невідомих:

$$\begin{cases} MQ'(t)+\{B(t)+A\}Q(t)=R(t), & t\in(0,T], \\ M[Q(0)-Q_0]=0 . \end{cases} \qquad /3.4/$$

Оскільки

$$\begin{cases} \text{матриці } M=\{m(\varphi_i,\varphi_j)\}_{i,j=1}^{N},\ A=\{a(\varphi_i,\varphi_j)\}_{i,j=1}^{N}, \\ \text{симетричні і додатно визначені,} \end{cases} \qquad /3.5/$$

то задача Коші /3.4/ розв"язується однозначно. Отже, для кожного $h>0$ напівдискретні апроксимації ψ_h розв"язку ψ задачі /2.2/ єдино визначаються задачею Коші /3.4/ і формулою /3.3/.

Зауваження 3.I. Неважко перевірити, що складові матриці $B(t)$ мають властивості:

$$\begin{cases} \text{матриця } \quad C(t)=\{b_1(u(t);\ \varphi_i,\varphi_j)\}_{i,j=1}^{N} \quad \text{кососиметрична,} \\ \text{матриця } \quad D(t)=\{b_2(u(t);\varphi_i,\varphi_j)\}_{i,j=1}^{N} \quad \text{симетрична} \\ \text{і невід"ємна} \end{cases} \qquad /3.6/$$

Відзначені факти разом із /3.5/ відіграють ключову роль у конструюванні методів розщеплення і роблять цілком обгрунтованою можливість їх успішного застосування для розв"язування задачі Коші /3.4/ [4].

4. Розв"язуваність варіаційної задачі. Підставляючи в рівняння /3.2/ $\varphi=\psi_h(t)$, знаходимо, що

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi_h(t)|^2+\|\psi_h(t)\|^2=<l(t),\psi_h(t)>, & t\in(0,T], \\ |\psi_h(0)|^2=m(\psi_h(0),\psi_0), \end{cases} \qquad /4.I/$$

де $|\cdot|$ – норма простору $L^2(\Omega)$.

З останніх рівнянь випливають апріорні оцінки:

$$|\psi_h(t)|^2+\int_0^t\|\psi_h(\tau)\|^2d\tau \le$$
$$\le|\psi_0|^2+\int_0^t\|l(\tau)\|_*^2\,d\tau\ ,\quad \forall h>0,\ \forall t\in(0,T], \qquad /4.2/$$

де $\|\cdot\|_*$ норма в просторі Φ' , спряженому до Φ

Звідси робимо висновок, що

$$\begin{cases} \text{послідовність напівдискретних апроксимацій} \\ \{\psi_h\} \text{ обмежена в } L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;\Phi), \end{cases} \qquad /4.3/$$

і, отже, з цієї послідовності можна вибрати підпослідовність, яку знову позначимо як $\{\psi_h\}$, і функцію ψ з $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;\Phi)$ такі, що

9–3I74

$$\begin{cases} \{\psi_h\} \text{ збігаються до } \psi \text{ в } L^\infty(0,T;H) \quad * \text{- слабо}, \\ \{\psi_h\} \text{ збігаються до } \psi \text{ в } L^2(0,T;\Phi) \quad \text{слабко}. \end{cases} \qquad /4.4/$$

Теорема 4.1 /про коректність варіаційної задачі/. Нехай виконані включення

$$\psi_0 \in H, \ l \in L^2(0,T;\Phi'), \ u \in L^2(0,T;U). \qquad /4.5/$$

Тоді існує єдиний розв"язок ψ варіаційної задачі /2.2/, причому

$$\begin{cases} \psi \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;\Phi), \\ \psi' \in L^2(0,T;\Phi') \end{cases} \qquad /4.6/$$

і

$$|\psi(t)|^2 + \int_0^t \|\psi(\tau)\|^2 d\tau \le |\psi_0|^2 + \int_0^t \|l(\tau)\|_*^2 d\tau, \ \forall t \in [0,T]. \qquad /4.7/$$

Доведення теореми завершується перевіркою, що функція з /4.4/ ψ задовольняє рівняння задачі /2.2/ і лише неістотно різниться від міркувань [1, 2].

5. Швидкість збіжності напівдискретних апроксимацій. Вважатимемо, що щільність вкладення з /3.1/ характеризується властивостями /типовими для більшості просторів апроксимацій методу скінченних елементів [6, 7]/:

$$\begin{cases} \text{для кожного } \varphi \in \Phi \cap H^{k+1}(\Omega),\ k \ge 0, \\ \text{знайдуться функція } \varphi_h \in \Phi_h \text{ і} \\ \text{константа } C > 0, \text{ значення якої не} \\ \text{залежить від величин, що нас цікавлять, такі, що} \\ \|\varphi - \varphi_h\|_{m,\Omega} \le C h^{k+1-m} \|\varphi\|_{k+1,\Omega}, \ 0 \le m \le k. \end{cases} \qquad /5.1/$$

Вводемо також оператори ортогонального проектування $\Pi_h : \Phi \to \Phi_h$, які діють згідно з правилом

$$\|\psi - \Pi_h \psi\| = \inf_{\varphi \in \Phi_h} \|\psi - \varphi\|, \quad \forall \psi \in \Phi. \qquad /5.2/$$

Тоді складові похибки напівдискретизації

$$e_h(t) = \varepsilon_h(t) - E_h(t), \qquad /5.3/$$

де

$$\varepsilon_h(t) = \psi_h(t) - \Pi_h \psi(t), \quad E_h(t) = \psi(t) - \Pi_h \psi(t) \qquad /5.4/$$

задовольняють енергетичне рівняння

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varepsilon_h'(t)|^2 + \|\varepsilon_h(t)\|^2 = m(E_h'(t), \varepsilon_h(t)) + b(E_h(t), \varepsilon_h(t)). \qquad /5.5/$$

Останнє приводить до оцінки

$$|\varepsilon_h(t)|^2+\int_0^t\|\varepsilon_h(\tau)\|^2 d\tau\leq\mathcal{K}\left\{|\varepsilon_h(0)|^2+\int_0^t[|E_h'(\tau)|^2+\|E_h(\tau)\|^2]d\tau\right\}. \quad /5.6/$$

З огляду на те, що /5.2/ і /5.I/ передбачають оцінку

$$\|E_h(\tau)\|\leq Ch^k\|\psi(t)\|_{k+1,\Omega}\qquad \forall t\in[0,T], \qquad /5.7/$$

і, зауважуючи, що оператор $\Pi_h:\Phi\to\Phi_h$ здійснює проектування лише за просторовими змінними, на основі нерівності трикутника, /5.6/ і /5.7/ приходимо до оцінки

$$|\psi(t)-\psi_h(t)|^2+\int_0^t\|\psi(\tau)-\psi_h(\tau)\|^2 d\tau\leq$$
$$\leq\mathcal{K}h^{2k}\left\{\|\psi_0\|_F^2+\|\psi(t)\|_F^2+\int_0^t[\|\psi'(\tau)\|_F^2+\|\psi(\tau)\|_F^2]d\tau\right\}, \qquad /5.7/$$

де використаний простір $F=H^{k+1}(\Omega)$ з нормою $\|\cdot\|_F=\|\cdot\|_{k+1,\Omega}$ і $\mathcal{K}=const>0$ не залежить від h і ψ. Таким чином, доведена така теорема.

Теорема 5.I. /про збіжність напівдискретних апроксимацій/. Нехай існує таке натуральне $k\geq 1$, що розв"язок ψ варіаційної задачі /2.2/ характеризується включеннями

$$\begin{cases}\psi\in L^\infty(0,T;F)\cap L^2(0,T;F\cap\Phi),\\ \psi'\in L^2(0,T;F),\ \psi_0\in F,\ F=H^{k+1}(\Omega)\end{cases} \qquad /5.8/$$

і його напівдискретні апроксимації Гальоркіна ψ_h відшуковуються у просторах Φ_h із властивостями /5.I/.

Тоді послідовність $\{\psi_h(t)\}$ при $h\to 0$ збігається відносно норми

$$|||\psi|||=\left\{\|\psi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\psi\|^2_{L^2(0,T;\Phi)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

до розв"язку ψ задачі /2.2/. Більше того, швидкість збіжності похибки $e_h=\psi-\psi_h$ характеризується оцінкою /5.7/, яка показує, що $|||e_h|||=O(h^k)$.

6. Дискретизація варіаційної задачі по часу. Розіб"ємо відрізок часу $[0,T]$ на N_T+1 рівні /хоча це необов"язково/ частини $[t_j,t_{j+1}]$ завдовжки $\Delta t=t_{j+1}-t_j$, $j=0,\dots,N_T$, і розглянемо однокрокову рекурентну схему інтегрування задачі /3.2/:

$$\begin{cases}\text{задані параметри } \Delta t>0,\ \ \theta>0 \ \text{ і } \psi^0\in\Phi_h;\\ \text{знайти } \psi^{j+1}\in\Phi_h \text{ таку, що}\\ m(\psi^{j+\theta},\varphi)+\frac{1}{2}\Delta t\, b(u(t_{j+\frac{1}{2}}),\psi^{j+\theta},\varphi)+\Delta t\theta a(\psi^{j+\theta},\varphi)=\\ =m(\psi^j,\varphi)+\Delta t(\theta-\frac{1}{2})b(u(t_{j+\frac{1}{2}}),\psi^j,\varphi)+\Delta t\theta\langle l(t_{j+\frac{1}{2}}),\varphi\rangle, \\ \psi^{j+1}=\psi^j+\theta^{-1}[\psi^{j+\theta}-\psi^j], \qquad j=0,\dots,N_T.\end{cases} \qquad /6.1/$$

Тут і нижче для скорочення запису введені позначення:

$$\psi^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\psi^{j+1}+\psi^{j}), \quad \dot{\psi}^{j+\frac{1}{2}} = \Delta t^{-1}(\psi^{j+1}-\psi^{j}),$$

$$\psi^{j+\theta} = \psi^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t(\theta-\tfrac{1}{2})\dot{\psi}^{j+\frac{1}{2}}.$$

Застосовуючи лему Лакса-Мільграма, переконуємося, що рівняння задачі /6.I/ однозначно розв"язуються відносно $\psi^{j+\theta}$, якщо відомі значення розв"язку ψ^{j} із попереднього кроку по часу. Зауважимо, що рекурентний розв"язок задач /6.I/ починається після обчислення ψ^{0} з рівняння

$$m(\psi^{0}-\psi_0,\varphi)=0 \qquad \forall\varphi\in\Phi_h. \qquad /6.2/$$

Для визначення стійкості схеми /6.I/ в її рівнянні приймемо $\varphi=\psi^{j+\frac{1}{2}}$. Внаслідок нескладних перетворень отримаємо енергетичне рівняння:

$$\frac{1}{2}|\psi^{j+1}|^2+\Delta t\|\psi^{j+1}\|^2+\frac{1}{2}\Delta t(\theta-\tfrac{1}{2})\|\psi^{j+1}\|^2=$$
$$=\frac{1}{2}|\psi^{j}|^2+\frac{1}{2}\Delta t(\theta-\tfrac{1}{2})\|\psi^{j}\|^2+\Delta t<l(t_{j+\frac{1}{2}}),\psi^{j+\frac{1}{2}}, \quad j=0,\dots,N_T, \qquad /6.3/$$

або

$$\frac{1}{2}|\psi^{m+1}|^2+\Delta t\sum_{j=0}^{m}\|\psi^{j+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{1}{2}\Delta t(\theta-\tfrac{1}{2})\|\psi^{m+1}\|^2=$$
$$=\frac{1}{2}|\psi^{0}|^2+\Delta t\sum_{j=0}^{m}<l(t_{j+\frac{1}{2}}),\psi^{j+\frac{1}{2}}>+\frac{1}{2}\Delta t(\theta-\tfrac{1}{2})\|\psi^{0}\|^2, \qquad /6.4/$$
$$m=0,\dots,N_T.$$

Беручи до уваги оцінки

$$|<l(t_{j+\frac{1}{2}}),\psi^{j+\frac{1}{2}}>|\leq\frac{1}{2}\|\psi^{j+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{1}{2}C\|l(t_{j+\frac{1}{2}})\|_*^2, \qquad /6.5/$$

де $\|\cdot\|_*$ – норма в просторі Φ' і символ C, як і всюди далі, використаний для додатних констант, значення яких не залежать від величин, що нас цікавлять, на основі енергетичного рівняння /6.4/ та умови /6.2/ приходимо до апріорних оцінок:

$$|\psi^{m+1}|^2+\Delta t\sum_{j=0}^{m}\|\psi^{j+\frac{1}{2}}\|^2+\Delta t(\theta-\tfrac{1}{2})\|\psi^{m+1}\|^2\leq$$
$$\leq|\psi_0|^2+\Delta t(\theta-\tfrac{1}{2})\|\psi_0\|^2+\Delta t C\sum_{j=0}^{m}\|l(t_{j+\frac{1}{2}})\|_*^2, \quad j=0,\dots,N_T. \qquad /6.6/$$

Звідси бачимо, що рекурентна схема /6.I/ безумовно/стосовно вибору кроку Δt /, стійка, якщо

$$\theta\geq\frac{1}{2}, \qquad /6.7/$$

та умовно стійка, якщо

$$0\leq\theta\leq\frac{1}{2}, \quad \Delta t\leq\frac{2}{\alpha(1-2\theta)}, \quad \alpha=const>0. \qquad /6.8/$$

Нарешті, для оцінки похибок

$$\varepsilon^{m}=\psi^{m}-\psi_h(t_m), \quad m=0,\dots,N_T+1, \qquad /6.9/$$

припустимо, що розв"язок ψ_h задачі /3.2/ такий, що

$$\psi_h \in C^3(0,T;\Phi_h). \qquad /6.10/$$

Тоді, використовуючи розклади у ряди Тейлора в околі точки $t = t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{1}{2}\Delta t$ і рівняння задач /3.2/ і /6.1/, знаходимо, що похибки /6.9/ визначаються рівняннями

$$m(\dot{\varepsilon}^{j+\frac{1}{2}},\varphi) + b(\varepsilon^{j+\frac{1}{2}},\varphi) + a(\varepsilon^{j+\theta},\varphi) =$$
$$= -\Delta t(\theta - \tfrac{1}{2})a(\psi_h''(t_{j+\frac{1}{2}}),\varphi) - \Delta t^2 \langle R_j,\varphi\rangle, \; j=0,\dots,N_T, \qquad /6.11/$$
$$m(\varepsilon^0,\varphi) = 0, \qquad \forall\varphi \in \Phi_h.$$

Тут функціонали $R_j \in \Phi'$, якщо виконані умови /6.7/. Остаточно, приймаючи в /6.11/ $\varphi = \varepsilon^{j+\frac{1}{2}}$ і, використовуючи попередні міркування, обчислюємо, що

$$|\varepsilon^{m+1}|^2 + \Delta t\sum_{j=0}^{m}\|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t(\theta - \tfrac{1}{2})\|\varepsilon^{m+1}\|^2 \le \qquad /6.12/$$
$$\le 2\Delta t^2 T\Big\{(\theta - \tfrac{1}{2})^2 \|u_h'\|_{C(0,T;\Phi)} +$$
$$+ C\Delta t^2 \max_{j=0,\dots,N_T+1}\|R_j\|_*^2\Big\}, \; m=0,\dots,N_T.$$

Таким чином, доведена така теорема.

Теорема 6.1. /про збіжність рекурентної схеми/. Нехай розв"язок $\psi_h(t)$ напівдискретної задачі /3.2/ задовольняє умову /6.10/. Позначимо через ψ^m його наближене значення в точці $t_m = m\Delta t$, обчислене за допомогою однокрокової рекурентної схеми /6.1/.

Тоді, якщо виконана одна з умов стійкості /6.7/ або /6.8/, похибки /6.9/ дискретизації по часу прямують до нуля /стосовно енергетичної норми $\{|\varepsilon^{m+1}|^2 + \Delta t\sum_{j=0}^{m}\|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\|^2\}^{1/2}$ /, і при цьому справедливі апріорні оцінки швидкості збіжності /6.12/. Зокрема, оптимальний порядок швидкості збіжності /дорівнює двом/ досягається вибором

$$\theta = \tfrac{1}{2} + O(\Delta t). \qquad /6.13/$$

Зауваження 6.1. Запис запропонованої схеми інтегрування в часі у вигляді /6.1/ найзручніший для реалізації алгоритму рекурентних обчислень.

7. Висновок. У даній роботі з метою формулювання варіаційної постановки початково-крайової задачі про міграцію пасивних аерозолей у нестисливій атмосфері використане спеціальне трактування конвективних складових рівняння конвекції і дифузії /див. тотожність /2.3//. Такий підхід дав змогу, по-перше, повною

[illegible] застосувати енергетичні міркування для конструктивного доведення коректності варіаційної задачі із залученням напівдискретних за просторовими змінними апроксимацій Гальоркіна. Особливість запропонованого формулювання така, що в стаціонарному випадку коректність варіаційної задачі є простим наслідком теореми Лакса-Мільграма [3].

По-друге, на основі результатів [8] отримані оцінки швидкості збіжності згаданих напівдискретних розв"язків у просторах апроксимацій методу скінченних елементів.

Нарешті, для інтегрування розглянутої задачі в часі запропонована однокрокова рекурентна схема, для якої на основі енергетичних оцінок визначені умови стійкості і швидкісні збіжності.

Викликаючи самостійне зацікавлення, отримані результати також служать обгрунтуванням для успішного аналізу міграції аерозолю методами розщеплення [5], зокрема, по фізичних процесах.

I. Д ю в о Г., Л и о н с Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с. 2. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с. 3. З у б о в В.М., Ш и н к а р е н к о Г.А. Розв"язуваність та апроксимація варіаційних задач переносу та дифузії домішок у нестисливій атмосфері // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип. 37. С.55-60. 4. М а р ч у к Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с. 5. М а р ч у к Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 264 с. 6. С т р е н г Г., Ф и к с Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 350 м. 7. С ь я р л е Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с. 8. Ш и н к а р е н к о Г.А. Проекційно-сіткові методи розв"язування початково-крайових задач. К., Наук.-метод. каб. вищ. освіти, 1991. 88 с.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.94