УДК 539.377

Б.В.Ковальчук, О.І.Гой

УЗАГАЛЬНЕНЕ ВАРІАЦІЙНЕ РІВНЯННЯ І ТЕОРЕМА ВЗАЄМНОСТІ РОЗВ"ЯЗКІВ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА

Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω, обмежену поверхнею S, в природному стані має температуру t_0. Внаслідок дії теплових або силових чинників тіло деформуватиметься, а його температура змінюватиметься. У тілі виникнуть переміщення u_i і приріст температури $\theta = t - t_0$, а це в свою чергу приведе до виникнення деформацій e_{ij} та напружень σ_{ij}, які є функціями координат x_i і часу τ. Причому надалі вважатимемо, що зміна температури невелика і не спричиняє істотних змін температурних характеристик матеріалу.

Для випадку, коли час релаксації теплового потоку має різні значення для головних напрямів, узагальнений закон теплопровідності можна записати у вигляді

$$(1+\tau_p \frac{\partial}{\partial \tau}) q_p = -\lambda_{pj}^t t_{,j} \quad (p, j = 1,2,3), \qquad /1/$$

де τ_p – час релаксації теплового потоку в напрямі осі x_p; λ_{pj}^t – коефіцієнти теплопровідності; q_p – компоненти вектора теплового потоку.

Якщо в початковий момент часу швидкість нагрівання та швидкість переміщення дорівнюють нулю і внутрішні джерела тепла відсутні, то на основі рівняння /1/ можна одержати інтегродиференціальні рівняння теплопровідності [1]:

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i} \int_0^{\tau} \theta_{,ij}(M,\zeta) \exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right) d\zeta = t_0 \beta_{ij} \dot{e}_{ij} + c_e \dot{\theta} - \omega_t . \qquad /2/$$

Тут c_e – об"ємна теплоємність за сталої деформації; ω_t – густина внутрішніх джерел тепла; $\beta_{ij} = \alpha_{kl}^t c_{ijkl}$, де c_{ijkl} декартові компоненти тензора пружної жорсткості анізотропного тіла; α_{ij}^t – температурні коефіцієнти лінійного розширення анізотропного тіла.

У даній роботі розглянута аналогічна релаксаційна модель, для якої одержане узагальнене варіаційне рівняння і доведена теорема взаємності розв"язків крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла.

1. Варіаційне рівняння. Запишемо рівняння /1/ у вигляді

$$l_p q_p = -\lambda_{pj}^t \theta_{,j} , \qquad /1'/$$

Введемо вектор H, який зв"язаний з вектором теплового потоку співвідношенням

$$q = t_0 H . \qquad /3/$$

Із /1'/ і /3/ випливає, що

$$\theta_{,p} = -t_0 \kappa_{pj} l_j \dot{H}_j , \qquad /4/$$

де κ_{pj} – обернена матриця для λ_{pj}^t.

Запишемо тепер відоме рівняння швидкості росту ентропії S_t [2]:

$$t_0 \dot{S}_t = c_e \dot{t} + t_0 \beta_{ij} \dot{e}_{ij} , \qquad /5/$$

яке можна подати також у вигляді

$$\dot{H}_{i,i} = -\frac{c_e}{t_0}\dot{\theta} - \beta_{ij}\dot{e}_{ij} . \qquad /5'/$$

Помноживши рівняння /4/ на δH_i, проінтегруємо його по області Ω і застосуємо теорему Гаусса-Остроградського. Використавши /5'/, одержимо

$$\int_S \theta \delta H_i n_i dS + \frac{c_e}{t_0}\int_\Omega \theta \delta \theta d\Omega + \int_\Omega \beta_{ij} \theta \delta e_{ij} d\Omega +$$
$$+ t_0 \int_\Omega \kappa_{ij} \delta H_i l_j \dot{H}_j d\Omega = 0. \qquad /6/$$

З іншого боку, варіацію роботи деформації можна подати у вигляді [3]

$$\delta W_e = \int_\Omega x_i \delta u_i d\Omega + \int_S p_i \delta u_i dS - \rho \int_\Omega \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega +$$
$$+ \int_\Omega \beta_{ij} \theta \delta e_{ij} d\Omega , \qquad /7/$$

де в правій частині цього рівняння присутні варіації переміщень, деформацій і відсутні варіації температури.

Вилучивши із /6/ і /7/ члени, які містять варіації деформацій, приходимо до узагальненого варіаційного рівняння:

$$\delta(W_e + P_t + D) = \delta L - \int_S \theta \delta H_n dS, \qquad /8/$$

де

$$\delta H_n = n_i \delta H_i, \qquad P_t = \frac{c_e}{2t_0} \int_\Omega \theta^2 d\Omega,$$

$$\delta D = t_0 \int_\Omega K_{ij} \delta H_i l_j \dot{H}_j d\Omega. \qquad /9/$$

З формули /8/ випливає, що варіація суми роботи деформації, теплового потенціалу і функції дисипації дорівнює віртуальній роботі зовнішніх сил, сил інерції і нагріванню поверхні тіла.

2. <u>Теорема взаємності.</u> Розглянемо для рівняння теплопровідності /2/ дві системи величин $\{x_i, p_i, \omega_t, h\}$ і $\{x_i', p_i', \omega_t', h'\}$ де h, h' – поверхневі нагріви. Переміщення і температуру позначимо відповідно $\{u_i, t\}$ і $\{u_i', t'\}$. Припускаємо, що деформації та напруження є функціями класу $C^{(1)}$, а переміщення і температура – функціями класу $C^{(2)}$.

На основі співвідношення Дюгамеля-Неймана зв"язок між компонентами тензорів деформацій, напружень і температури запишемо так [2, 3]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij}\theta, \quad \sigma_{ij}' = c_{ijkl} e_{kl}' - \beta_{ij}\theta'. \qquad /10/$$

Перша частина теореми взаємності доведена в монографії [3]. Там наведене рівняння

$$\int_S (\bar{p}_i \bar{u}_i' - \bar{p}_i' \bar{u}_i) dS + \int_\Omega (\bar{x}_i \bar{u}_i' - \bar{x}_i' \bar{u}_i) d\Omega + \int_\Omega \beta_{ij} (\bar{e}_{ij}' \bar{\theta} - \bar{e}_{ij} \bar{\theta}') d\Omega = 0, \qquad /11/$$

де $\bar{\theta}$ – трансформанта перетворення Лапласа по τ.

Доведемо другу частину теореми взаємності. Для цього розглянемо рівняння теплопровідності /2/ для обох систем величин за таких початкових умов:

$$u_i(M,0) = 0, \quad \dot{u}_i(M,0) = 0, \quad u_i'(M,0) = 0, \quad \dot{u}_i'(M,0) = 0, \quad M \in \Omega \qquad /12/$$

та за крайових умов:

$$\theta(p,\tau) = h(p,\tau), \quad \theta'(p,\tau) = h'(p,\tau), \quad p \in S, \ \tau > 0, \qquad /13/$$

$$\theta(M,0) = 0, \quad \theta'(M,0) = 0, \quad M \in \Omega. \qquad /14/$$

За таких умов, застосовуючи до рівняння теплопровідності /2/ для обох систем величин перетворення Лапласа по часу, одержуємо

$$\frac{\lambda_{ij}^{t}}{\tau_i s+1}\bar{\theta}_{,ij}=t_0\beta_{ij}s\bar{e}_{ij}+c_e s\bar{\theta}-\bar{\omega}_t\,, \qquad /I5/$$

$$\frac{\lambda_{ij}^{t}}{\tau_i s+1}\bar{\theta}'_{,ij}=t_0\beta_{ij}s\bar{e}'_{ij}+c_e s\bar{\theta}'-\bar{\omega}'_t\,, \qquad /I6/$$

s – параметр перетворення Лапласа.

Помноживши тепер рівняння /I5/ і /I6/ відповідно на $\bar{\theta}'$ і $\bar{\theta}$, віднімемо їх почленно, а потім зінтегруємо по області Ω. В результаті матимемо

$$\int_{\Omega}\frac{\lambda_{ij}^{t}}{\tau_i s+1}(\bar{\theta}_{,ij}\bar{\theta}'-\bar{\theta}'_{,ij}\bar{\theta})d\Omega=\int_{\Omega}\beta_{ij}(\bar{e}_{ij}\bar{\theta}'-\bar{e}'_{ij}\bar{\theta})d\Omega-$$

$$-\int_{\Omega}(\bar{\omega}_t\bar{\theta}'-\bar{\omega}'_t\bar{\theta})d\Omega. \qquad /I7/$$

Із /I7/, враховуючи співвідношення

$$(\lambda_{ij}^{t}\bar{\theta}_{,i}\bar{\theta}')_{,j}=\lambda_{ij}^{t}\bar{\theta}_{,ij}\bar{\theta}'+\lambda_{ij}^{t}\bar{\theta}_{,j}\bar{\theta}'_{,i}\,, \qquad /I8/$$

$$(\lambda_{ij}^{t}\bar{\theta}'_{,i}\bar{\theta})_{,j}=\lambda_{ij}^{t}\bar{\theta}'_{,ij}\theta+\lambda_{ij}^{t}\bar{\theta}'_{,j}\theta_{,i} \qquad /I9/$$

і рівняння /I6/, після застосування теореми Гаусса-Остроградського знайдемо

$$\int_{S}\frac{\lambda_{ij}^{t}}{\tau_i s+1}(\bar{h}'\bar{\theta}_{,j}-\bar{h}\bar{\theta}'_{,j})n_i dS-st_0\int_{\Omega}\beta_{ij}(\bar{e}_{ij}\bar{\theta}'-$$

$$-\bar{e}'_{ij}\bar{\theta})d\Omega+\int_{\Omega}(\bar{\omega}_t\bar{\theta}'-\bar{\omega}'_t\bar{\theta})d\Omega=0. \qquad /20/$$

Рівняння /20/ є другою частиною теореми взаємності.

На основі /II/ і /20/ запишемо загальну формулу:

$$st_0\int_{S}(\bar{p}_i\bar{u}'_i-\bar{p}'_i\bar{u}_i)dS+t_0 s\int_{\Omega}(\bar{x}_i\bar{u}'_i-\bar{x}'_i\bar{u}_i)d\Omega=$$

$$=\int_{S}\frac{\lambda_{ij}^{t}}{\tau_i s+1}(\bar{h}'\theta_{,i}-\bar{h}\bar{\theta}'_{,i})n_j dS+\int_{\Omega}(\bar{\omega}_t\bar{\theta}'-\bar{\omega}'_t\theta)d\Omega. \qquad /2I/$$

Нарешті, застосувавши до рівняння /2I/ обернене перетворення Лапласа, одержимо

$$t_0\int_{S}\left\{\int_0^{\tau}\left[p_i(M,\tau-\tau_0)\frac{\partial u'_i(M,\tau_0)}{\partial\tau_0}-p'_i(M,\tau-\tau_0)\frac{\partial u_i(M,\tau_0)}{\partial\tau_0}\right]d\tau_0\right\}dS+$$

$$+t_0\int_{\Omega}\left\{\int_0^{\tau}\left[x_i(M,\tau-\tau_0)\frac{\partial u'_i(M,\tau_0)}{\partial\tau_0}-x'_i(M,\tau-\tau_0)\frac{\partial u_i(M,\tau_0)}{\partial\tau_0}\right]d\tau_0\right\}d\Omega=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\left\{\int_0^{\tau}[\theta'(M,\tau-\tau_0)\,\omega_t(M,\tau_0)-\theta(M,\tau-\tau_0)\,\omega'_t(M,\tau_0)]\,d\tau_0\right\}d\Omega+$$

$$+\iint\limits_{S} n_j\,\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\left\{\int_0^{\tau}[h'(M,\tau-\tau_0)\varphi_i(M,\tau_0)-h(M,\tau-\tau_0)\varphi'_i(M,\tau_0)]\,d\tau_0\right\}dS, \qquad /22/$$

де

$$\varphi_i(M,\tau)=\int_0^{\tau}\theta_{,i}(M,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta. \qquad /23/$$

Таким чином, доведена узагальнена теорема взаємозв"язаної динамічної задачі термопружності анізотропного тіла з урахуванням ортотропії часу релаксації теплового потоку.

1. Коляно Ю.М., Ковальчук Б.В., Гой О.И. Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела, учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока // Изв. высш. уч. заведений. Математика. 1988. № 9. С.81-83. 2. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975. 3. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.94

УДК 519.6

С.Б.Костенко, Б.О.Попов

РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ФУНКЦІЙ МНОГОЧЛЕННИМИ СПЛАЙНАМИ

Для прискорення обчислення математичних функцій розглядаються нові підходи до вибору ланок сплайнів, за допомогою яких можна здійснити рівномірне наближення.

Теорема 1. Нехай $f(x)\in C^2[a,b]$ і похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ перетворюється в нуль в s внутрішніх точках $C=\{c_i\}_{i=1}^{s}$ інтервалу (a,b), $s=0,1,2\ldots(s\ll r)$, а в інших точках цього інтервалу не дорівнює нулю. Тоді максимальна похибка ε рівномірного наближення чебишовими відрізками сталих функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ при $w(x)\equiv 1$ із заданою кількістю r цих відрізків, де $r\to\infty$ можна знайти за формулою

$$\varepsilon=\frac{1}{2r}\left|f(a)+2\sum_{i=1}^{s}(-1)^i f(c_i)+(-1)^{s+1}f(b)\right|\left[1+O\left(s\left(\frac{b-a}{r}\right)^2\right)\right]. \qquad /1/$$

Формула /1/ точніше, ніж відомий вираз [2].