$$=\iint_{\Omega}\left\{\int_0^{\tau}[\theta'(M,\tau-\tau_0)\,\omega_t(M,\tau_0)-\theta(M,\tau-\tau_0)\,\omega'_t(M,\tau_0)]\,d\tau_0\right\}d\Omega+$$

$$+\int_S n_j\,\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\left\{\int_0^{\tau}[h'(M,\tau-\tau_0)\varphi_i(M,\tau_0)-h(M,\tau-\tau_0)\varphi'_i(M,\tau_0)]\,d\tau_0\right\}dS, \qquad /22/$$

де

$$\varphi_i(M,\tau)=\int_0^{\tau}\theta_{,i}(M,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta. \qquad /23/$$

Таким чином, доведена узагальнена теорема взаємозв"язаної динамічної задачі термопружності анізотропного тіла з урахуванням ортотропії часу релаксації теплового потоку.

1. Коляно Ю.М., Ковальчук Б.В., Гой О.И. Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела, учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока // Изв. высш. уч. заведений. Математика. 1988. № 9. С.81-83. 2. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975. 3. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.94

УДК 519.6

С.Б.Костенко, Б.О.Попов

РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ФУНКЦІЙ МНОГОЧЛЕННИМИ СПЛАЙНАМИ

Для прискорення обчислення математичних функцій розглядаються нові підходи до вибору ланок сплайнів, за допомогою яких можна здійснити рівномірне наближення.

Теорема 1. Нехай $f(x)\in C^2[a,b]$ і похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ перетворюється в нуль в s внутрішніх точках $C=\{c_i\}_{i=1}^{s}$ інтервалу (a,b), $s=0,1,2\ldots(s\ll r)$, а в інших точках цього інтервалу не дорівнює нулю. Тоді максимальна похибка ε рівномірного наближення чебишовими відрізками сталих функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ при $w(x)\equiv 1$ із заданою кількістю r цих відрізків, де $r\to\infty$ можна знайти за формулою

$$\varepsilon=\frac{1}{2r}\left|f(a)+2\sum_{i=1}^{s}(-1)^i f(c_i)+(-1)^{s+1}f(b)\right|\left[1+O\left(s\left(\frac{b-a}{r}\right)^2\right)\right]. \qquad /1/$$

Формула /1/ точніше, ніж відомий вираз [2].

Якщо функція $f(x)$ – монотонна, то формула для обчислення похибки наближення є точною і виглядає так

$$\varepsilon = |f(a) - f(b)|/2r.$$

<u>Наслідок.</u> В умовах теореми 1 розміщення вузлів сплайну $Z = \{z_i\}_{i=0}^{r}$ $a = z_0 < z_1 < \ldots < z_r = b$. за асимптотичного рівномірного абсолютного наближення визначається за формулою

$$z_i = f^{-1}\left((-1)^{j}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{j}(-1)^k f(c_k) - \frac{i}{r}E\right]\right),\ i = \overline{0,r},$$

де $E = f(a) + 2\sum_{i=1}^{s}(-1)^i f(c_i) + (-1)^{s+1} f(b)$, $c_{j-1} < z_i \le c_j$, $c_0 = a$, $c_{s+1} = b$; $f^{-1}(u)$ – функція обернена до функції $f(x)$.

У випадку рівномірного абсолютного наближення монотонної функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ розміщення вузлів $\{z_i\}_{i=0}^{r}$ визначається як

$$z_i = f^{-1}\left(f(a) + \frac{i}{r}[f(b) - f(a)]\right),\ i = \overline{0,r}.$$

<u>Теорема 2.</u> Нехай $f(x) \in C^2[a,b]$, $f(x) > 0$ при $x \in [a,b]$ і похідна $f'(x)$ перетворюється в нуль в s точках $C = \{c_i\}_{i=1}^{s}$ інтервалу (a,b), $s = 0,1,2,\ldots$ $(s \ll r)$, а в інших точках цього інтервалу не дорівнює нулю. Тоді максимальна похибка δ рівномірного відносного наближення чебишовими відрізками сталих із заданою кількістю r цих відрізків при $r \to \infty$ обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{\left|1 - f(a)^{\frac{1}{r}} \prod_{i=1}^{s} f(c_i)^{(-1)^i \frac{2}{r}} f(b)^{\frac{(-1)^{s+1}}{r}}\right|}{1 + f(a)^{\frac{1}{r}} \prod_{i=1}^{s} f(c_i)^{(-1)^i \frac{2}{r}} f(b)^{\frac{(-1)^{s+1}}{r}}}\left[1 + O\left(\frac{s}{r}\left(\frac{b-a}{r}\right)^2\right)\right].$$

Для монотонної на проміжку $[a, b]$ функції $f(x)$ формула для обчислення похибки набирає вигляду

$$\delta = |f(b)^{\frac{1}{r}} - f(a)^{\frac{1}{r}}| / (f(b)^{\frac{1}{r}} + f(a)^{\frac{1}{r}}).$$

<u>Наслідок.</u> В умовах теореми 2 розміщення вузлів $Z = \{z_i\}_{i=0}^{r}$ асимптотичного рівномірного відносного наближення функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ визначається як

$$z_i = f^{-1}\left(E^{(-1)^{j+1}\frac{i}{r}} f(a)^{(-1)^j}\left(\prod_{k=1}^{j} f(c_k)^{2(-1)^k}\right)^{(-1)^{j+1}}\right),\ i = \overline{0,r},$$

де $E = f(a)\prod_{i=1}^{s} f(c_i)^{(-1)^i 2} f(b)^{(-1)^{s+1}}$, $c_{j-1} < z_i \le c_j$, $c_0 = a$, $c_{s+1} = b$.

Якщо функція $f(x)$ на $[a,b]$ монотонна то

$$z_i = f^{-1}\left(f(a)^{(r-i)/r} f(b)^{i/r}\right),\ i = \overline{0,r}.$$

Рівномірне наближення функцій многочленними сплайнами досліджено у праці [2]. Використовуючи замість останнього коефіцієнта многочлена степеня m величину $W = 2^{\pm l}$, $l = 1,2,\ldots$, одержуємо

$$V_{m-1}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i + W x^m. \qquad /2/$$

Величину w вибираємо близькою до відповідного коефіцієнта найліпшого чебишового наближення многочленом. Такі вирази називають економічними, оскільки при обчисленні на ЕОМ вони дають економію часу. Це досягається завдяки тому, що операція множення заміняється зсувом або додаванням порядків відповідних двійкових зображень.

Головним чином використовують лінійні економічні наближення:

$$V_0(x)=A+wx. \qquad /3/$$

Функція похибки такого наближення для функції $f(x)$ визначається як

$$\mu(x)=f(x)-A-wx=(f(x)-w(x)-A.$$

Таким чином, наближення функції $f(x)$ економічним лінійним виразом зводиться до наближення функції $\varphi(x)=f(x)-wx$ постійною, а у випадку кускової апроксимації рівномірне наближення функції $f(x)$ економічним лінійним сплайном /сплайном з ланками вигляду /3/ / зводиться до наближення чебишовими відрізками постійних. Властивості таких наближень випливають з теорем 1 і 2, а також з їхніх наслідків.

Для парних і непарних функцій вибір виразу економічних наближень доцільніше здійснювати відповідно до структури ряду розкладу функції за степенями аргументу. Якщо функція $f(x)$ – парна, то здійснюватимемо її наближення, а якщо непарна, – наближення функції $f(x)/x$ економічним виразом вигляду

$$\tilde{V}_0(x)=A+wx^2, \qquad /4/$$

де величина w вибирається аналогічно. Як і у випадку наближення лінійними економічними сплайнами наближення парних і непарних функцій сплайнами з ланками вигляду /4/ можна звести до наближення чебишовими відрізками постійних.

Парні та непарні функції належать до множини функцій, що зображаються такими степеневими рядами:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{ip+s}, \ |x|<R. \qquad /5/$$

Ці функції зручно наближати сплайнами з ланками у вигляді многочленів за степенями x^2:

$$P_m(x)=\sum_{i=0}^{m} d_i x^{ip+s}. \qquad /6/$$

Розглянемо властивості таких сплайнів.

Теорема 3. Максимальна похибка ε рівномірного абсолютного наближення функції /5/ чебишовим сплайном з r ланками вигляду /6/ при $\omega(x) \equiv 1$ і на проміжку $[0,b]$, $b < R$ визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{2b^{p(m+1)+s}p^{m+1}}{(4r)^{m+1}}\alpha_{m+1}\Big[\frac{1}{1+s/(m+1)} + \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1}\Big(\frac{1}{m+1}-i\Big)\times$$

$$\times\sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j\\ k=\overline{1,\infty}}}\frac{b^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1!\dots n_k!\{(1+n_1+\dots+kn_k)p+\frac{s}{m+1}\}}\prod_{l=1}^{k}\Big(\frac{(m+2)_l}{l!}\frac{\alpha_{l+m+1}}{\alpha_{m+1}}\Big)^{n_l}\Big]^{m+1}\Big[1+O\Big(\frac{b}{r}\Big)\Big].$$

Наслідок. Границі ланок $Z=\{z_i\}_{i=0}^{r}$ асимптотичного рівномірного абсолютного наближення функції /5/ сплайном з r ланками вигляду /6/ на проміжку $[0,b]$ задаються рівняннями:

$$\frac{i}{r}\Big[\frac{1}{1+\frac{s}{m+1}} + \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1}\Big(\frac{1}{m+1}-i\Big)\sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j\\ k=\overline{1,\infty}}}\frac{b^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1!n_2!\dots n_k!\{(1+n_1+\dots+kn_k)p+\frac{s}{m+1}\}}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{k}\Big(\frac{(m+2)_l}{l!}\frac{\alpha_{l+m+1}}{\alpha_{m+1}}\Big)^{n_l}\Big] = \frac{1}{1+\frac{s}{m+1}} + \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1}\Big(\frac{1}{m+1}-i\Big)\times$$

$$\times\sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j\\ k=\overline{1,\infty}}}\frac{z_i^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1!\dots n_k!\{(1+n_1+\dots+kn_k)p+\frac{s}{m+1}\}}\times\prod_{l=1}^{k}\Big(\frac{(m+2)_l}{l!}\frac{\alpha_{l+m+1}}{\alpha_{m+1}}\Big)^{n_l}.$$

Теорема 4. Якщо для функції $f(x)$ і для функції $1/f(x)$ існують розклади в ряди за степенями аргументу, то максимальна похибка δ рівномірного відносного наближення функції $f(x)$ вигляду /5/ чебишовим сплайном із r ланками вигляду /6/ на проміжку $[0,b]$, $b<R$ визначається за формулою

$$\delta = \frac{2b^{p(m+1)}\alpha_{m+1}\beta_0}{(4r)^{m+1}}\Big[1+\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1}\Big(\frac{1}{m+1}-i\Big)\times$$

$$\times\sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j\\ k=\overline{1,\infty}}}\frac{b^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1!\dots n_k!(1+n_1+\dots+kn_k)}\prod_{l=1}^{k}\Big(\sum_{q=1}^{l}\frac{(m+2)_q}{q!}\frac{\alpha_{q+m+1}}{\alpha_{m+1}}\frac{\beta_{l-q}}{\beta_0}\Big)^{n_l}\Big]^{m+1}\Big[1+O\Big(\frac{b}{r}\Big)\Big],$$

де $1/f(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\beta_i x^{ip-s}$.

Наслідок. Границі ланок $Z=\{z_i\}_{i=0}^{r}$ асимптотичного рівномірного відносного наближення функції $f(x)$ сплайном з r ланками вигляду /6/, якщо для функцій $f(x)$ і $1/f(x)$ існують зображення /5/ і /7/ відповідно, є розв"язками рівняння

$$\frac{i}{r}\Big[1+\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1}\Big(\frac{1}{m+1}-i\Big)\sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j\\ k=\overline{1,\infty}}}\frac{b^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1!\dots n_k!(1+n_1+\dots+kn_k)}\times$$

$$\times \prod_{\ell=1}^{k}\left(\sum_{q=1}^{\ell}\frac{(m+2)_q}{q!}\,\frac{\alpha_{q+m+1}}{\alpha_{m+1}}\,\frac{\beta_{\ell-q}}{\beta_0}\right)^{n_\ell}=1+\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1}\left(\frac{1}{m+1}-i\right)\times$$

$$\times \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_k=j\\ k=\overline{1,\infty}}}\frac{z_i^{-p(n_1+2n_2+\ldots+kn_k)}}{n_1!\ldots n_k!(1+n_1+\ldots+kn_k)}\prod_{\ell=1}^{k}\left(\sum_{q=1}^{\ell}\frac{(m+2)_q}{q!}\cdot\frac{\alpha_{q+m+1}}{\alpha_{m+1}}\cdot\frac{\beta_{\ell-q}}{\beta_\ell}\right)^{n_\ell}.$$

Доцільність запропонованих підходів до вибору структури ланок сплайнів проілюструємо на такому прикладі.

Приклад. Здійснимо рівномірне абсолютне наближення функції $f(x)=\cos x$ сплайнами з ланками різного вигляду на проміжку $[0, \pi/2]$. Похибки відповідних наближень для різних значень r наведені у таблиці /верхнє значення – похибка, визначена теоретично, за допомогою однієї із виведених формул/; нижнє – максимальна із похибок, отриманих на кожній ланці сплайну внаслідок реалізації методу найліпших чебишових наближень/. Приклад підтверджує також точність отриманих формул.

Вигляд ланки сплайну	$r=2$	$r=4$	$r=8$
A	$2,5000\cdot 10^{-1}$ $2,5000\cdot 10^{-1}$	$1,25000\cdot 10^{-1}$ $1,2500\cdot 10^{-1}$	$6,2500\cdot 10^{-1}$ $6,2600\cdot 10^{-1}$
$A+wx$	$1,1756\cdot 10^{-1}$ $1,1756\cdot 10^{-1}$	$5,8781\cdot 10^{-2}$ $5,8781\cdot 10^{-2}$	$2,9390\cdot 10^{-2}$ $2,9390\cdot 10^{-2}$
$A+Bx$	$2,2430\cdot 10^{-2}$ $2,2637\cdot 10^{-2}$	$5,6075\cdot 10^{-3}$ $5,6232\cdot 10^{-3}$	$1,4019\cdot 10^{-3}$ $1,4104\cdot 10^{-3}$
$A+wx^2$	$5,8425\cdot 10^{-2}$ $5,8425\cdot 10^{-2}$	$2,9213\cdot 10^{2}$ $2,9213\cdot 10^{-2}$	$1,4606\cdot 10^{-2}$ $1,4606\cdot 10^{-2}$
$A+Bx^2$	$6,9953\cdot 10^{-3}$ $6,9968\cdot 10^{-3}$	$1,7488\cdot 10^{-3}$ $1,7489\cdot 10^{-3}$	$4,3721\cdot 10^{-4}$ $4,3721\cdot 10^{-4}$

де $w=-1/2$.

1. Благовещенский Ю.В., Теслер Г.С. Вычисление элементарных функций на ЭВМ. К.: Техника, 1977. 205 с. 2. Попов Б.О. Равномерное приближение сплайнами. К.: Наук. думка, 1989. 272 с. 3. Попов Б.О., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. К.: Наук. думка, 1980. 350 с.

Стаття надійшла до редколегії 3.02.94 р.