УДК 517.956

Марія Д.Мартиненко, Н.В.Горбачова

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ОДНІЄЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

В області $D=\{(x,t): -\infty<x<+\infty, t>0\}$ розглянемо таку задачу Коші:

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=f(u,x,t),\quad (x,t)\in D; \qquad /1/$$

$$\frac{\partial^l u(x,0)}{\partial t^l}=\varphi_l(x),\ -\infty<x<+\infty,\ 0\le l\le 2m-1. \qquad /2/$$

Припустимо, що $a_k\neq a_l$, $k\neq l$, $|\varphi_0(x)|>0$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$. та задача /1/–/2/ має єдиний класичний розв"язок в області D. Крім цього, вважатимемо, що $f(u,x,t)$ обмежена, неперервна та задовольняє умову Ліпшиця по змінній u зі сталою $\mathcal{L}$, яка не залежить від $(x,t)\in D$.

Задачі /1/–/2/ поставимо у відповідність таку лінійну задачу:

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\tilde u=K\tilde u,\quad (x,t)\in D, \qquad /3/$$

$$\frac{\partial^l\tilde u(x,0)}{\partial t^l}=\varphi_l(x),\quad 0\le l\le 2m-1, \qquad /4/$$

де

$$K=\frac{f(u_0,x,t)}{u_0},\quad u_0\equiv u(x,0)=\varphi_0(x).$$

Оцінимо близькість розв"язків задач /1/–/2/ та /3/–/4/. Для цього позначимо через v їхню різницю: $v=u-\tilde u$. Тоді з /1/–/4/ дістанемо:

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v=f(u,x,t)-K\tilde u\equiv F(u,\tilde u,x,t), \qquad /5/$$

$$\frac{\partial^l v(x,0)}{\partial t^l}=0,\quad 0\le l\le 2m-1. \qquad /6/$$

Звідки на основі відомої теореми Боджіо [4] та принципу Дюгамеля [1] матимемо таке інтегральне зображення для v:

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{2m-1,k}\int_0^t\left\{\int_0^{x+a_k(t-\tau)}\frac{[x+a_k(t-\tau)-\xi]^{2m-2}}{(2m-2)!}F(u,\tilde u,\xi,\tau)d\xi-\right.$$

$$\left.-\int_0^{x-a_k(t-\tau)}\frac{[x-a_k(t-\tau)-\xi]^{2m-2}}{(2m-2)!}F(u,\tilde u,\xi,\tau)d\xi\right\}d\tau, \qquad /7/$$

де сталі $\alpha_{2m-1,k}$ є розв"язками такої системи алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{2m-1,k} a_k^{2l+1} = \delta_{l,m-1} \quad (l=\overline{0,m-1}), \quad \delta_{l,m} = \begin{cases} 0, & l \neq m, \\ 1, & l = m. \end{cases} \qquad /8/$$

Система /8/ має єдиний розв"язок, оскільки її визначник є визначником Вандермонда, який завжди не дорівнює нулю при $a_k \neq a_l$, $k \neq l$.

Звичайними міркуваннями з формули /7/ маємо таку нерівність при $(x,t) \in D_\Delta$, де D_Δ - найбільший з трикутників, утворених прямими $\xi = x + a_k(t-\tau)$, $\xi = x - a_k(t-\tau)$ та $\xi = 0$; $k=\overline{1,m}$:

$$\max_{(x,t)\in D_\Delta} |v| \leq \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{|\alpha_{2m-1,k}|}{a_k (2m)!}(\mathcal{L}+K)}{1-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{|\alpha_{2m-1,k}|}{a_k (2m)!} A_{km}\mathcal{L}} \max_{(x,t)\in D_\Delta} |\tilde{u} - u_0|, \qquad /9/$$

де

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{|\alpha_{m-1,k}|}{a_k (2m)!} \mathcal{L} A_{km} < 1,$$

$$A_{km} = \max_{(x,t)\in D_\Delta} \left\{ (x+a_k t)^{2m} - (x-a_k t)^{2m} \right\}, \qquad /10/$$

$$K \overset{df}{=} \max_{x\in(-\infty,+\infty),\, t\in[0,T]} |K(x,t)|.$$

Лінеаризація /3/-/4/ може бути ефективно спрощена, якщо замість $K(x,t)$ у /3/ взяти $K_0 = K(x_0, 0)$. Тоді у нерівності /9/ замість K, u_0 треба взяти $|K_0|$, $u_0(x_0)$ відповідно. Точку x_0 вибираємо з умови $\varphi(x_0) \neq 0$.

Дана стаття є узагальненням праць [2, 3].

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир. 1964. С.832. 2. Мартиненко М.Д. Басьюні Х. Лінеаризація для нелінійної задачі Коші першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.35. С.69-72. 3. Мартиненко М.Д., Басьюні Х. Лінеаризація для однієї задачі Дарбу другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 37. 1992. С.84-85. 4. Boggio T. Sull integrazione di alcuna equationi linerari alle derivate parziale // Ann. Mat. Ser. III. 1903. Vol. 8. P.181.

Стаття надійшла до редколегії 25.08.93