

І.С.Муха, Я.Г.Савула

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ
ТОНКОСТІННИХ ІНУЧКИХ ТІЛ

Тонкостінні тіла є поширеними елементами конструкцій, що використовуються в авіабудуванні, енергетичному машинобудуванні і будівництві. У сучасній механіці існує багато різних теорій пружного деформування тонкостінних тіл, загальний підхід до побудови яких розглянутий у праці [7]. Усіх їх об'єднує той факт, що в рамках цих теорій внаслідок нелінійних залежностей Коші між деформаціями і переміщеннями виникають складні системи диференціальних рівнянь. Застосування таких теорій для побудови чисельних схем веде до громіздких обчислень, обсяг яких часто перевищує можливості сучасних комп'ютерів.

У даній роботі запропонований дуже простий і наочний варіант нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка. Він відрізняється від відомих аналогів тим, що під час його побудови ніде не нехтувались члени порядку $K_1 h$ порівняно з одиницею. Крім цього, слід відзначити, що шляхом граничного переходу із запропонованих рівнянь можна отримати рівняння нелінійної класичної теорії [6], застосовуючи більш жорсткі гіпотези деформування типу Кірхгофа-Лява, а також лінійні рівняння уточненої теорії типу Тимошенка [10] у разі відмови від нелінійних членів у співвідношеннях Коші.

1. Тривимірне теорія деформування. Нехай недеформоване пружне тіло віднесене до криволінійної системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ і задане в ній за допомогою радіус-вектора
$$\vec{R} = \vec{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \vec{V}, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \omega_3.$$

Припустимо, що тіло є тонкостінним, тобто характерний розмір тіла вздовж напрямку α_3 істотно менший від двох інших. Надалі вважатимемо, що коваріантна база $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$ недеформованої конфігурації є триортogonalною. Усі співвідношення записуватимемо для фізичних компонентів векторів і тензорів, тому круглі дужки біля індексів відсутні.

Унаслідок пружної деформації тіло переходить в актуальну конфігурацію і у фіксований момент часу t задається в ній радіус-вектором

$$\bar{R}^t = \bar{R}^t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in V.$$

Локальний рух матеріальної частинки визначає тензор градієнта руху F , компоненти якого в недеформованій базі мають вигляд

$$F = \delta_{ij} + \frac{1}{H_i H_j} \dot{V}_j (H_i u_i), \quad /1.1/$$

де u_i - компоненти вектора переміщення точок тіла під час деформації; $\dot{V}_j$ - коваріантна похідна в недеформованій базі $\bar{R}_i$; $H_i = \sqrt{\bar{R}_i \cdot \bar{R}_i}$.

Введемо у розгляд тензор лінійних деформацій і тензор лінійних поворотів:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji}) - \delta_{ij}; \quad /1.2/$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} - F_{ji}). \quad /1.3/$$

Із /1.2/ і /1.3/ випливає, що

$$F_{ij} = \delta_{ij} + E_{ij} + \Omega_{ij}. \quad /1.4/$$

Використовуючи подання градієнта руху у вигляді /1.4/, отримуємо вираз для компонент тензора деформацій Гріна:

$$\varepsilon_{ij} = E_{ij} + \frac{1}{2}(E_{ki} E_{kj} + E_{ki} \Omega_{kj} + \Omega_{ki} E_{kj} + \Omega_{ki} \Omega_{kj}). \quad /1.5/$$

Припускаємо, що компоненти тензора Ω є величинами порядку $\sqrt{\delta}$, а компоненти тензора E величинами порядку δ , що справедливо для тонкостінних гнучких тіл [9, II, 12]. За таких припущень підкресленими у виразі /1.5/ членами можна знехтувати як членами вищого порядку малості порівняно з членами порядку δ , і для компонент тензора ε отримуємо вираз

$$\varepsilon_{ij} = E_{ij} + \frac{1}{2} \Omega_{ki} \Omega_{kj}. \quad /1.6/$$

У рамках прийнятих припущень вираз для кратності зміни об'єму має вигляд

$$\bar{J} = |F_{ij}| = 1 + E_{11} + E_{22} + E_{33} + \Omega_{12}^2 + \Omega_{13}^2 + \Omega_{23}^2.$$

У випадку, коли тіло є трансверсально-ізотропним, а процес навантаження адіабатичним, співвідношення пружності можна записати для стандартного матеріалу другого порядку у вигляді

$$\Sigma_{ij} = A_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th}), \quad /1.7/$$

де $\varepsilon_{kl}^{th} = \alpha \Delta T \delta_{kl}$ - компоненти тензора температурних деформацій; Σ_{ij} - фізичні компоненти другого /симетричного/ тензора Піоли-Кірхгофа в недеформованій базі. Вони відображають /з точністю до множника J / значення напружень на координатних площинках у деформованому тілі. Подання закону пружності у вигляді /1.7/ виправдане у випадку малих деформацій тонкостінних тіл при не малих кутах повороту [11, 12].

Використовуючи вираз для густини роботи напружень у вигляді згортки енергетичної пари [12] можна записати

$$\delta W = \Sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \Sigma_{ij}^* \delta F_{ij}.$$

Тут Σ_{ij}^* - фізичні компоненти тензора номінальних напружень в недеформованій базі. Зокрема з другої тотожності можна визначити вирази для компонент тензора Σ^* з урахуванням гіпотез /1.6/. Детальні викладки цього питання наведені у праці [8].

Процес деформування тіла опишемо варіаційним рівнянням Гамільтона [3]:

$$\delta \int_0^t [K(U) - L(U)] dt = 0,$$

де $K(U) = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV$ - кінетична енергія, а

$$L(U) = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) A_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th}) dV - \int_V q_i u_i dV - \int_{S_z} \hat{\Sigma}_{ni}^* u_i dS$$

- потенціальна енергія тіла в момент часу t

Для забезпечення єдиності розв'язку потрібно задати початкові умови і на частині граничної поверхні S_u крайові умови на переміщення.

2. Теорія оболонок типу Тимошенка. Припустимо, тепер, що тонкостінне тіло має форму оболонки, тобто

$$\hat{V} = \{ \hat{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega_2, h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2 \}.$$

При цьому вважатимемо, що значення h на порядок менше від характерних розмірів образу тіла в декартовому просторі x_1, x_2, x_3 .

Розглянемо поверхню $\hat{S}_2 = \{ \hat{z}(\alpha_1, \alpha_2) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega_2 \}$, яка є серединою поверхнею недеформованого тонкостінного тіла. Нехай у цьому тілі вибрана така система криволінійних координат, що радіус-вектор точок тіла записується у вигляді

$$\hat{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \hat{z}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \hat{n}(\alpha_1, \alpha_2), \quad /2.1/$$

де $\hat{n}$ - одиничний вектор нормалі до $\hat{S}_2$. Нехай $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ - коваріантна база $\hat{S}_2$. Для коефіцієнтів справедливі співвідношення

$$H_i(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = A_i(\alpha_1 \alpha_2)(1 + \alpha_3 K_i(\alpha_1 \alpha_2)), \quad i=1,2,$$

$$H_3(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 1;$$

/2.2/

$$\text{де } A_i = \sqrt{\frac{g}{z_i} \cdot \frac{g}{z_i}}, \quad K_i = \frac{1}{A_i^2} \left(\frac{g}{z_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \alpha_i} \right).$$

Для побудови теорії деформування оболонок прийmemo такі гіпотези. По-перше, вважатимемо, що справедливий узагальнений плоский напружений стан, тобто $\sum_{33} = 0$. При цьому співвідношення пружності запишемо у вигляді

$$\sum_{ij} = A_{ijkl}^0 (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th}); \quad /2.3/$$

де тензор A_{ijkl}^0 має такі ненульові компоненти:

$$A_{zzzz}^0 = \lambda^* + 2\mu, \quad A_{zzss}^0 = \lambda^*, \quad A_{zszs}^0 = A_{zssz}^0 = \mu,$$

$$A_{zszs}^0 = A_{zssz}^0 = A_{zzzz}^0 = A_{zssz}^0 = \mu', \quad z, s = 1, 2; \quad z \neq s.$$

$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{2\mu + \lambda}$, λ, μ, μ' - пружні константи трансверсально-ізо-тропного тіла.

По-друге, вважатимемо, що компоненти

$$\Omega_{12} = 0.$$

/2.4/

Можливість такого припущення обгрунтована у працях [9, 13].

По-третє, прийmemo гіпотези Тимошенка для деформування нормалі, згідно з якими

$$U_s(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = u_s(\alpha_1 \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_s(\alpha_1 \alpha_2); \quad s=1,2;$$

$$U_3(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = u_3(\alpha_1 \alpha_2). \quad /2.5/$$

Обтиском оболонки будемо нехтувати, що не суперечить основним припущенням теорії середнього згину оболонок [5]. За припущення /2.5/ компоненти тензора градієнту руху /I.I/ можна подати у вигляді

$$F_{ij} = \frac{f_{ij} + \alpha_3 \varphi_{ij}}{1 + \alpha_3 K_j}, \quad i, j = 1, 3. \quad /2.6/$$

Тут K_1, K_2 - головні кривини поверхні $\bar{S}_2$, $K_3 = 1$;

$$f_{zs} = \delta_{zs} + \frac{1}{A_z A_s} \bar{\nabla}_s (A_z u_z) + K_z \delta_{zs} u_3,$$

$$\varphi_{zs} = \delta_{zs} K_z + \frac{1}{A_z A_s} \bar{\nabla}_s (A_z \gamma_z),$$

$$f_{z3} = \gamma_z, \quad f_{33} = \frac{1}{A_s} \partial_s u_3 - K_s u_s,$$

$$\varphi_{z3} = 0, \quad \varphi_{33} = -K_s \gamma_s.$$

$\bar{\nabla}_j$ - символ коваріантної похідної відносно метрики недеформованої поверхні $\bar{S}_2$; $z, s = 1, 2$.

Аналогічно подаємо компоненти тензорів лінійних деформацій та лінійних поворотів:

$$E_{zz} = \frac{e_{zz} + \alpha_3 K_{zz}}{1 + \alpha_3 K_z},$$

$$E_{12} = \frac{e_{12} + \alpha_3 K_{12}}{(1 + \alpha_3 K_1)(1 + \alpha_3 K_2)},$$

/2.7/

$$E_{z3} = \frac{e_{z3}}{1 + \alpha_3 K_z}.$$

Тут

$$e_{rs} = \frac{1}{2}(f_{rs} + f_{sr}) - \delta_{rs};$$

$$K_{zz} = \varphi_{zz} - K_z, \quad K_{12} = \frac{1}{2}(\varphi_{12} + K_1 f_{12} + \varphi_2 + K_2 f_{21});$$

$$\mathcal{E}_{z3} = \frac{\omega_{z3} + \alpha_3 \tau_{z3}}{1 + \alpha_3 K_z},$$

/2.8/

де

$$\omega_{z3} = \frac{1}{2}(f_{z3} - f_{3z});$$

$$\tau_{z3} = K_z \gamma_z = \varphi_{z3}.$$

Відзначимо, що у виразі для E_{z3} відсутня складова по α_3 внаслідок взаємного знищення членів вигляду $K_z \gamma_z$. У виразі для $\mathcal{E}_{z3}$ ці члени додаються, і внаслідок цього компоненти тензора $\mathcal{E}$ змінюються за лінійним законом у напрямі α_3 .

Виходячи з подання компонент тензора $\mathcal{E}$ у вигляді /1.6/, можемо записати, що

$$\mathcal{E}_{zz} = \frac{e_{zz} + \alpha_3 \mathcal{E}_{zz}}{1 + \alpha_3 K_z},$$

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{e_{12} + \alpha_3 \mathcal{E}_{12}}{(1 + \alpha_3 K_1)(1 + \alpha_3 K_2)},$$

/2.9/

$$\mathcal{E}_{z3} = \frac{e_{z3}}{1 + \alpha_3 K_z},$$

де

$$\mathcal{E}_{rs} = e_{rs} + \frac{1}{2}\omega_{z3}\omega_{s3};$$

$$\mathcal{E}_{z3} = K_{z3} - \frac{1}{2}(\omega_{z3}\tau_{s3} + \omega_{s3}\tau_{z3}) - \frac{1}{2}\omega_{z3}\omega_{s3}\delta_{zs}K_z;$$

$$\mathcal{E}_{z3} = e_{z3}.$$

Тут доцільно відзначити, що лінеаризовані вирази для $\mathcal{E}_{z3}$ не відповідають дійсності, тому що вказані деформації не є постійними по товщині оболонки. Тому під час побудови теорії оболонок приймають ще й четверту гіпотезу, яка полягає у тому, що розподіл деформацій поперечного зсуву по товщині оболонки зображають у вигляді [4]

$$\mathcal{E}_{z3} = \frac{e_{z3} \chi(\alpha_3)}{1 + \alpha_3 K_z},$$

$$\text{де } \chi(\alpha_3) = 5[1/4 - (\alpha_3/h)^2].$$

Вираз для роботи напружень тепер можна подати у вигляді

$$\int_V \delta W = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{ij} \delta \varepsilon_{ij} (1 + K_1 \alpha_3) (1 + K_2 \alpha_3) d\alpha_3 d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} m_{ij} \delta \kappa_{ij} d\Omega, \quad /2.10/$$

де

$$\sigma_{zz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{zz} (1 + \alpha_3 K_s) d\alpha_3; \quad z, s = 1, 2; \quad z \neq s; \quad /2.11/ \\ \sigma_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{12} d\alpha_3;$$

$$\sigma_{z3} = \sigma_{3z} = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{z3} (1 + \alpha_3 K_s) d\alpha_3; \\ m_{zz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{zz} \alpha_3 (1 + \alpha_3 K_s) d\alpha_3, \quad m_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{12} \alpha_3 d\alpha_3, \quad m_{z3} = 0. /2.12/$$

Ідея визначення σ_{12} та m_{12} у вигляді /2.11/, /2.12/ належить Новожилову В.В. [9] і дає змогу ввести в теорії оболонок симетричні тензори зусиль та моментів, аналогічні симетричному тензору Піоли-Кірхгофа у тримірній теорії.

Використовуючи далі вирази для густини роботи напружень у вигляді згортки тензорів, і збираючи члени при δf_{ij} і $\delta \varphi_{ij}$ отримуємо [8]

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} m_{ij} \delta \kappa_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \delta f_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} m_{ij}^* \delta \varphi_{ij} d\Omega. \quad /2.13/$$

$$\text{Тут } \sigma_{zs}^* = \sigma_{zs}, \quad z, s = 1, 2;$$

$$\sigma_{z3}^* = \sigma_{z3} - \frac{1}{2}(\sigma_{zz} \omega_{z3} + \sigma_{12} \omega_{s3}) - \frac{1}{2}(m_{zz} \tau_{z3} + m_{12} \tau_{s3}) + \frac{1}{2}K_z \omega_{z3} m_{zz};$$

$$\sigma_{3z}^* = \sigma_{3z} + \frac{1}{2}(\sigma_{zz} \omega_{z3} + \sigma_{12} \omega_{s3}) + \frac{1}{2}(m_{zz} \tau_{z3} + m_{12} \tau_{s3}) + \frac{1}{2}K_z \omega_{z3} m_{zz} + K_z \omega_{z3} m_{12};$$

$$m_{zs}^* = m_{zs}, \quad m_{z3}^* = m_{z3} = 0. \quad /2.14/$$

Цікаво відзначити, що вирази /2.14/ можна отримати також шляхом безпосереднього усереднення напружень $\sum_{ij}^*$ за формулами, аналогічними /2.11/ і /2.12/.

Закон пружності в теорії оболонок визначимо із закону пружності тривимірної теорії. Для цього розглянемо вираз для густини роботи напружень:

$$\delta W = \delta W = [(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) A_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th})] \delta t.$$

Нехай

$$\int_V \delta W dV = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \delta W (1 + \alpha_3 K_1) (1 + \alpha_3 K_2) d\alpha_3 d\Omega = \int_{\Omega} \delta W d\Omega.$$

Введемо також позначення

$$T^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) d\alpha_3; \quad T^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) d_3 d\alpha_3.$$

Враховуючи ці позначення і нехтуючи членами порядку $O(h^2)$ порівняно з одиницею, дістаємо вираз для $\delta\Phi$.

Закон пружності в теорії оболонок отримуємо зі співвідношень

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad m_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_{ij}}.$$

У тензорному вигляді його можна записати

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}^{(11)} \varepsilon_{kl} + a_{ijkl}^{(12)} \kappa_{kl} + \sigma_{ij}^{th},$$

$$m_{ij} = a_{ijkl}^{(21)} \varepsilon_{kl} + a_{ijkl}^{(22)} \kappa_{kl} + m_{ij}^{th},$$

/2.15/

Тут σ_{ij}^{th} , m_{ij}^{th} - тензори температурних зусиль і моментів з ненульовими компонентами:

$$\sigma_{zz}^{th} = \frac{\alpha^{th} E h}{1-\nu} \Delta T^{(0)},$$

$$m_{zz}^{th} = \frac{\alpha^{th} E h^3}{12(1-\nu)} \Delta T^{(1)}, \quad z=1, 2,$$

де Δ - символ приросту температурних моментів $T^{(0)}$ і $T^{(1)}$

за час деформації; $a_{ijkl}^{(pq)}$ - тензори пружних констант з ненульовими компонентами:

$$a_{zzzz}^{(11)} = \beta_h, \quad a_{zzss}^{(11)} = \nu \beta_h, \quad a_{zssz}^{(11)} = a_{sszz}^{(11)} = \frac{\beta_h}{2} (1-\nu),$$

$$a_{z3z3}^{(11)} = a_{z33z}^{(11)} = a_{3z2z}^{(11)} = a_{3z3z}^{(11)} = g_h,$$

$$a_{zzzz}^{(22)} = \delta_h, \quad a_{zzss}^{(22)} = \nu \delta_h, \quad a_{zssz}^{(22)} = a_{sszz}^{(22)} = \frac{\delta_h}{2} (1-\nu),$$

$$\beta_h = (\lambda^* + 2\mu)h = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad \delta_h = (\lambda^* + 2\mu) \frac{h^3}{12} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$g_h = \mu' \int_{-h/2}^{h/2} \kappa^2(\alpha_3) d\alpha_3 = \frac{5}{8} G' h; \quad z, s = 1, 2; \quad z \neq s.$$

Процес деформування оболонок описується варіаційним рівнянням Гамільтона:

$$\delta \int_0^t [\kappa(u, y) - l(u, y)] dt = 0,$$

/2.16/

де

$$\kappa(u, y) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} \rho h \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial \gamma_z}{\partial t} \frac{\partial \gamma_z}{\partial t} d\Omega \right\};$$

$$l(u, y) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} a_{ijkl}^{(11)} \varepsilon_{kl} d\Omega + \int_{\Omega} \kappa_{rs} a_{rspt}^{(22)} \kappa_{pt} d\Omega - \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^{th} d\Omega - \int_{\Omega} \kappa_{rs} m_{rs}^{th} d\Omega - \right.$$

$$\left. - \int_{\Sigma} q_i^{(1)} u_i d\Sigma - \int_{\Sigma} q_z^{(2)} \gamma_z d\Sigma - \int_{\Gamma} \hat{\sigma}_{ni}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{m}_{nz}^* \gamma_z d\Gamma; \right.$$

$$q_i^{(1)} = (1 + K_1 \frac{h}{2})(1 + K_2 \frac{h}{2}) \hat{\Sigma}_{3i}^* (\frac{h}{2}) - (1 - K_1 \frac{h}{2})(1 - K_2 \frac{h}{2}) \hat{\Sigma}_{3i}^* (-\frac{h}{2}) + \int_{-h/2}^{h/2} Q_i (1 + K_1 \alpha_3)(1 + K_2 \alpha_3) d\alpha_3;$$

$$q_i^{(2)} = \frac{h}{2} (1 + K_1 \frac{h}{2})(1 + K_2 \frac{h}{2}) \hat{\Sigma}_{3i}^* (\frac{h}{2}) + \frac{h}{2} (1 - K_1 \frac{h}{2})(1 - K_2 \frac{h}{2}) \hat{\Sigma}_{3i}^* (-\frac{h}{2}) + \int_{-h/2}^{h/2} Q_i \alpha_3 (1 + K_1 \alpha_3)(1 + K_2 \alpha_3) d\alpha_3$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3; r, s, p, t = 1, 2.$

Аналогічно, як і у тривимірному випадку, для забезпечення єдиності розв'язку необхідно задати початкову умову, і на частині граничного контура Γ_u — крайові умови на переміщення.

За переміщеннями і кутами повороту, визначеними з варіаційної задачі /2.16/ можна знайти компоненти оболонкових тензорів ϵ_{ij} і κ_{ij} , і далі за формулами /2.9/ — тривимірне поле тензора ϵ_{ij} . Компонента ϵ_{33} цього тензора визначається при узагальненому плоскому напруженому стані зі співвідношення $\Sigma_{33} = 0$:

$$\epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}).$$

Із співвідношень /2.3/ одержуємо напруження в тонкостінному тілі.

Наприкінці зупинимось на дослідженні інваріантності тензора деформацій до обертання тіла як твердого цілого. Нехай точки тіла здійснюють жорсткі переміщення в просторі, яке задається формулами

$$\bar{u} = \bar{R} \cdot \bar{r} = \theta \bar{R} \cdot \bar{r} = (\theta \cdot I) \bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

де

$$\theta = \begin{bmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{bmatrix}.$$

Компоненти тривимірного тензора деформацій Гріна /1.5/ за таких зміщень дорівнюють нулю. При використанні тензора деформацій у вигляді /1.6/ вони становлять

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2}(1 - \cos \chi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(1 - \cos \chi)^2 \end{matrix} \right] \frac{1}{2}, \quad /2.17/$$

Беручи до уваги той факт, що члени $1 - \cos \chi$ мають порядок $O(\epsilon_{ij})$, отримуємо, що деформації $\epsilon_{ij} \sim O(\epsilon_{ij}^2) \sim O(\delta^2)$, тобто ϵ_{ij} дорівнюють нулю з точністю прийнятих у виразі /1.6/ гіпотез.

Подано тепер вектор переміщень у вигляді

$$\bar{U} = \bar{u} + \alpha_3 \bar{y},$$

де $\bar{u} = (\theta \cdot I) \bar{r}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\bar{y} = (\theta \cdot I) \bar{n}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Якщо прийняти гіпотези типу Тимошенка без урахування обтіку, то вектор $\bar{y}$ можна подати у вигляді

$$\bar{y}_* = [\theta - (1 + \gamma_n) \dot{t}] \bar{n}(\alpha_1, \alpha_2),$$

де

$$\gamma_n = \bar{n}(\theta^T - \dot{t}) \bar{n} = (1 - \cos \chi)(n_1^2 + n_3^2) \sim O(E_{ij}).$$

Деформації, отримані по таких переміщеннях для індексів $i, j = 1, 2$, збігаються з виразами /2.17/ з точністю до членів порядку $K_i h$ порівняно з одиницею. Для деформацій поперечного зсуву маємо вирази

$$\varepsilon_{i3} = \bar{n} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[(1 - \cos \chi)^2 + \gamma_n] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}[(1 - \cos \chi)^2 + \gamma_n] \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Таким чином, члени ε_{i3} не дорівнюють нулю з точністю прийнятих у виразі /1.6/ гіпотез, і цим самим порушують інваріантність тензора деформацій розглянутої теорії до обертання тіла як твердого цілого. Тому запропонований варіант теорії оболонок доцільно використовувати для дослідження тонкостінних тіл під дією навантажень, які не ведуть до виникнення великих деформацій поперечного зсуву. Однак таке звуження області застосованості запропонованої теорії є неістотним оскільки спільномірне за порядком з гіпотезами, прийнятими в /1.6/.

Чисельне розв'язання задач зі запропонованою теорією і зіставлення результатів із результатами, отриманими в рамках інших теорій містить праця [2].

І. Б а ж е н о в В.Г. Численное исследование нестационарных процессов деформации упругопластических оболочек // Пробл. прочности. 1984. № 11. С.51-54. 2. В а г і н П.П., М у х а І.С., С а в у л а Я.Г. Розв'язування геометрично нелінійних задач статки оболонок типу Тимошенка методом скінченних елементів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. С.67-74. 3. В а с и л з у К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир. 1987. 4. В о л ь м и р А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 5. Г а л и м о в К.З. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 6. Г р и г о р е н к о Я.М., М у к о е л А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К.: Вища шк. 1983. 7. К а ю к Я.Ф. Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. К.: Наук. думка, 1987. 8. М у х а І.С., С а в у л а Я.Г. Постановки задач упругого равновесия тонкостенных гибких тел с учетом геометрической нелинейности. Львов; 1988. 48 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 19.12.88 г., № 2969-Ук88. 9. Н о в о ж и л о в В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 10. П е л е х Б.И. Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища шк. 1978.

11. П о б е д я Б.Е. О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений // Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. № 4. С.15-26.
 12. Ч е р н ы х К.Ф., Л и т в и н е н к о в а З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1988.
 13. Ш а п о в а л о в Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. Механика твердого тела. 1968. № 1.

Стаття надійшла до редколегії 25.02.94

УДК 517:547.534

С.М.Левицька.

ВИОКРЕМЛЕННЯ ЕЛІПТИЧНИХ ІНТЕГРАЛІВ В ОСЕСИМЕТРИЧНІЙ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Граничні задачі математичної фізики на незамкнутах поверхнях методом потенціалу зводяться до розв'язування інтегральних рівнянь другого роду. Застосування методики виокремлення особливостей має змогу регуляризувати отримане інтегральне рівняння. Якщо поверхня має осьову симетрію, просторову задачу можна звести до розв'язування одномірного інтегрального рівняння. Вводячи циліндричну систему координат, отримуємо інтеграли, залежні від кута. Їх можна обчислити аналітично.

Мета даної роботи – обчислення інтегралів, які виникають під час розв'язування третьої граничної задачі нестационарної теплопровідності на незамкнутах поверхнях з осьовою симетрією методом інтегральних рівнянь. При цьому вдалося явно виокремити еліптичні інтеграли першого і другого роду.

Зупинимось на обчисленні інтегралів вигляду

$$P_1 = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{a}\right)}{z} d\varphi; \quad P_2 = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{z^2}{a^2}}}{a^2} d\varphi;$$

$$P_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{a}\right)}{z} d\varphi; \quad P_4 = \int_0^{2\pi} \cos\varphi e^{-\frac{z^2}{a^2}} d\varphi;$$

$$P_5 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial z^2}{\partial n} \left(\frac{e^{-\frac{z^2}{a^2}}}{z^2} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{a}\right)}{z^3} \right) d\varphi,$$

де $\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{a}\right)$ – інтеграл нехибок;