11. Победря Б.Е. О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений // Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. № 4. С.15-26.
12. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1988.
13. Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. Механика твердого тела. 1968. № 1.

Стаття надійшла до редколегії 25.02.94

УДК 517:547.534

С.М.Левицька

# ВИОКРЕМЛЕННЯ ЕЛІПТИЧНИХ ІНТЕГРАЛІВ В ОСЕСИМЕТРИЧНІЙ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Граничні задачі математичної фізики на незамкнутих поверхнях методом потенціалу зводяться до розв"язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. Застосування методики виокремлення особливостей дає змогу регуляризувати отримане інтегральне рівняння. Якщо поверхня має осьову симетрію, просторову задачу можна звести до розв"язування одномірного інтегрального рівняння. Вводячи циліндричну систему координат, отримуємо інтеграли, залежні від кута, їх можна обчислити аналітично.

Мета даної роботи – обчислення інтегралів, які виникають під час розв"язування третьої граничної задачі нестаціонарної теплопровідності на незамкнутих поверхнях з осьовою симетрією методом інтегральних рівнянь. При цьому вдалося явно виокремити еліптичні інтеграли першого і другого роду.

Зупинимось на обчисленні інтегралів вигляду

$$P_1=\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\varphi;\qquad P_2=\int_0^{2\pi}e^{-\frac{r^2}{a^2}}\,d\varphi;$$

$$P_3=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\varphi;\qquad P_4=\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, e^{-\frac{r^2}{a^2}}\,d\varphi;$$

$$P_5=\int_0^{2\pi}\frac{\partial r^2}{\partial n}\left(\frac{e^{-\frac{r^2}{a^2}}}{r^2}+\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{a}\right)}{r^3}\right)d\varphi,$$

де $\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{a}\right)$ – інтеграл похибок;

---

$r = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + (z-z_0)^2}$ – віддаль між двома точками $(\rho, z, \varphi)$ і $(\rho_0, z_0, 0)$ ; $\frac{\partial r^2}{\partial n} = -\frac{2}{J}(\rho^2 z' - (z-z_0)\rho\rho' - \rho\rho_0 z' \cos\varphi)$ – нормальна похідна від відстані; $J = \rho\sqrt{\rho'^2 + z'^2}$ – якобіан переходу; $a = const$ .

Для обчислення цих інтегралів підінтегральні функції розкладаються в ряди:

$$erfc(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)\ell!} ; \qquad /1/$$

$$e^x = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell!} . \qquad /2/$$

Докладніше зупинимось на обчисленні інтеграла $P_1$ :

$$P_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)\ell!\, a^{2\ell+1}} \int_0^{2\pi} r^{2\ell} d\varphi. \qquad /3/$$

Перший інтеграл у формулі /3/ за відомою методикою зводиться до еліптичного інтеграла першого роду:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+(z-z_0)]^{1/2}} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos 2\theta+(z-z_0)^2]^{1/2}} =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[\rho^2+\rho_0^2+2\rho\rho_0-4\rho\rho_0\sin^2\theta+(z-z_0)^2]^{1/2}} = \frac{4}{\sqrt{(\rho+\rho_0)^2+(z-z_0)^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-p^2\sin^2\theta}} = \frac{4}{\sqrt{\mathfrak{z}}} K(p),$$

де $\theta = \frac{\varphi-\pi}{2}$; $\mathfrak{z} = (\rho+\rho_0)^2 + (z-z_0)^2$ ; $p = \frac{4\rho\rho_0}{\mathfrak{z}}$ ;

$K(p)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Виконуючи аналогічні перетворення в другому інтеграл /3/, отримуємо

$$\int_0^{2\pi} r^{2\ell} d\varphi = 4\mathfrak{z}^\ell \int_0^{\pi/2} [1-p^2\sin^2\theta]^\ell d\theta . \qquad /4/$$

Застосуємо біном Ньютона.

$$\int_0^{2\pi} r^{2\ell} d\varphi = 4\mathfrak{z}^\ell \sum_{\nu=0}^{\ell} (-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu}\theta\, d\theta = 2\pi\mathfrak{z}^\ell \sum_{\nu=0}^{\ell} (-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu} \frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!} . \qquad /5/$$

Остаточно інтеграл $P_1$ набере вигляду

$$P_1 = \frac{4}{\sqrt{\mathfrak{z}}} K(p) + f_1(a, p, \mathfrak{z}) . \qquad /6/$$

Ці ж перетворення застосуємо до обчислення інтеграла

$$P_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r} d\varphi - C_1 \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell+1)\ell!\, a^{2\ell+1}} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, r^{2\ell} d\varphi . \qquad /7/$$

Перший інтеграл в $P_3$ зводиться до повних еліптичних інтегралів першого роду $K(p)$ і другого роду $E(p)$ :

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{r} = -\frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{p^2}E(p)-\frac{1-p^2}{p^2}K(p)\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}K(p).$$

Останній інтеграл в /7/ обчислюємо аналогічно, як у /5/.

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, r^{2\ell}d\varphi = -4z^\ell\int_0^{\pi/2}(1-2\sin^2\theta)(1-p^2\sin^2\theta)^\ell d\theta =$$

$$=8z^\ell\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta(1-p^2\sin^2\theta)^\ell d\theta-4z^\ell\int_0^{\pi/2}(1-p^2\sin^2\theta)^\ell d\theta =$$

$$=8z^\ell\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\ell}(-1)^\ell C_\ell^\nu p^{2\nu}\frac{(2\nu+1)!!}{2^{\nu+1}(\nu+1)!}-4z^\ell\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\ell}(-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!}=$$

$$=2z^\ell\pi\sum_{\nu=0}^{\ell}(-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!}\,\frac{\nu}{\nu+1}.$$

Таким чином,

$$P_3=-\frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{p^2}E(p)-\frac{1-p^2}{p^2}K(p)\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}K(p)+f_2(a,p,z).$$

Ці ж міркування застосовуємо для обчислення інших інтегралів:

$$P_2=-\frac{8\sqrt{\pi}}{a^3}\left[1+\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^\ell z^\ell}{\ell!\,a^{2\ell}}\sum_{\nu=0}^{\ell}(-1)^\ell C_\ell^\nu p^{2\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!}\right];$$

$$P_4=-\frac{8\sqrt{\pi}}{a^3}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^\ell z^\ell}{a!\,a^{2\ell}}\sum_{\nu=0}^{\ell}(-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!}\,\frac{\nu}{\nu+1}.$$

Складніші вирази отримуємо під час обчислення $P_5$ . Тут потрібно розглянути інтеграли:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{r^3}=\frac{4}{z^{3/2}}\,\frac{E(p)}{1-p^2};$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{r^3}=-\frac{4}{z^{3/2}}\,\frac{E(p)}{1-p^2}+\frac{8}{z^{3/2}}\left[\frac{E(p)}{p(1-p^2)}-\frac{1}{p^2}K(p)\right];$$

$$\int_0^{2\pi}r^{2(\ell-1)}d\varphi=\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\ell-1}(-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!};$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, r^{2(\ell-1)}d\varphi=\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\ell-1}(-1)^\nu C_{\ell-1}^\nu p^{2\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!}\,\frac{\nu}{\nu+1}.$$

Тому

$$P_5 = \frac{2}{J_3^{3/2}}\left[z'(\rho^2-\rho_0^2-(z-z_0)^2)-2\rho\rho'(z-z_0)\right]\frac{E(p)}{1-p^2}+\frac{2z'}{J\sqrt{J}}K(p)+f_3(a,p,\zeta).$$

Аналізуючи поведінку отриманих функцій при $(\rho,z)\to(\rho_0,z_0)$ і враховуючи розклад еліптичних інтегралів в ряди:

$$K(p)=U(\delta)+V(\delta)\ln\frac{1}{\delta};$$

$$E(p)=\bar{U}(\delta)+\bar{V}(\delta)\ln\frac{1}{\delta},$$

де $\delta = 1-p^2$, можна зробити висновок про наявність логарифмічної особливості в ядрі інтегрального рівняння. Крім цього, в $P_5$ наявна особливість $\frac{E(p)}{1-p^2}$, яка послаблюється множником

$$z'(\rho^2-\rho_0^2-(z-z_0)^2)-2\rho\rho'(z-z_0).$$


1. Бережанская З.С., Левицкая С.М., Свырида М.И. Численное решение нестационарной задачи теплопроводности на незамкнутых поверхностях методом интегральных уравнений // Лучевая технология электрон. техники: теория и эксперимент: Межвуз. сб. М., 1988. С.55-62. 2. Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. Таблицы неопределенных интегралов. М., 1986. 3. Левицкая С.М., Бережанская З.С. Задача Неймана для уравнения теплопроводности в случае разомкнутых границ с осевой симметрией // Програм. средства машиностроения. К., 1990. С.51-57.



Стаття надійшла до редколегії 03.02.94


УДК 517.947


Р.М.Пасічник, Р.С.Хапко


## ПОЄДНАННЯ МЕТОДІВ СІТОК ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ РОЗВ"ЯЗУВАННІ ЗАДАЧІ ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Наближене розв"язування нестаціонарних задач математичної фізики на незамкнених поверхнях пов"язане із деякими труднощами, які викликані наявністю часу як незалежної змінної, необмеженістю області, де шукається розв"язок, та складністю граничної поверхні. Тому найбільш придатним для розв"язування таких задач виявився метод інтегральних рівнянь*.

У даній роботі розглядувана задача за допомогою сіткової апроксимації по часу зводиться до послідовності стаціонарних



* Хапко Р.С. Про три підходи чисельного розв"язування нестаціонарних задач на незамкнених поверхнях за допомогою методу інтегральних рівнянь // Доп. АН України. 1991. № 12. С.19-22.