Тому

$$P_5 = \frac{2}{J_3^{3/2}}\left[z'(\rho^2-\rho_0^2-(z-z_0)^2)-2\rho\rho'(z-z_0)\right]\frac{E(p)}{1-p^2}+\frac{2z'}{J\sqrt{J}}K(p)+f_3(a,p,z).$$

Аналізуючи поведінку отриманих функцій при $(\rho,z)\to(\rho_0,z_0)$ і враховуючи розклад еліптичних інтегралів в ряди:

$$K(p)=U(b)+V(b)\ln\frac{1}{b};$$

$$E(p)=\bar{U}(b)+\bar{V}(b)\ln\frac{1}{b},$$

де $b=1-p^2$, можна зробити висновок про наявність логарифмічної особливості в ядрі інтегрального рівняння. Крім цього, в P_5 наявна особливість $\frac{E(p)}{1-p^2}$, яка послаблюється множником

$$z'(\rho^2-\rho_0^2-(z-z_0)^2)-2\rho\rho'(z-z_0).$$

1. Бережанская З.С., Левицкая С.М., Свирида М.И. Численное решение нестационарной задачи теплопроводности на незамкнутых поверхностях методом интегральных уравнений // Лучевая технология электрон. техники: теория и эксперимент: Межвуз. сб. М., 1988. С.55-62. 2. Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. Таблицы неопределенных интегралов. М., 1986. 3. Левицкая С.М., Бережанская З.С. Задача Неймана для уравнения теплопроводности в случае разомкнутых границ с осевой симметрией // Програм. средства машиностроения. К., 1990. С.51-57.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.94

УДК 517.947

Р.М.Пасічник, Р.С.Хапко

ПОЄДНАННЯ МЕТОДІВ СІТОК ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ РОЗВ"ЯЗУВАННІ ЗАДАЧІ ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Наближене розв"язування нестаціонарних задач математичної фізики на незамкнених поверхнях пов"язане із деякими труднощами, які викликані наявністю часу як незалежної змінної, необмеженістю області, де шукається розв"язок, та складністю граничної поверхні. Тому найбільш придатним для розв"язування таких задач виявився метод інтегральних рівнянь*.

У даній роботі розглядувана задача за допомогою сіткової апроксимації по часу зводиться до послідовності стаціонарних

* Хапко Р.С. Про три підходи чисельного розв"язування нестаціонарних задач на незамкнених поверхнях за допомогою методу інтегральних рівнянь // Доп. АН України. 1991. № 12. С.19-22.

задач. Застосовуючи спеціально введені функції, цю послідовність редукують до послідовності інтегральних рівнянь першого роду зі слабкою особливістю в ядрі та правими частинами спеціального вигляду.

1. Розглянемо граничну задачу для хвильового рівняння:

$$\Delta u = u''_{tt}, \; x \in R^3 \setminus S, \; t \in [0,T], \qquad /1/$$

$$u\big|_{t=0} = u'_t\big|_{t=0} = 0, \; x \in R^3, \qquad /2/$$

$$u(x,t) = f(x,t), \; x \in S, \; t \in [0,T], \qquad /3/$$

де $u = u(x,t)$ – шуканий розв"язок; S – кусково-Ляпуновська замкнена чи розімкнена гранична поверхня. Дискретизуємо задачу /1/–/3/ за допомогою різницевих співвідношень:

$$\Delta u_i - \varkappa^2 u_i + 2\varkappa^2 u_{i-1} - \varkappa^2 u_{i-2} = 0; \qquad /4/$$

$$u_0 = 0, \; u_1 = 0, \; i = \overline{2,N}; \qquad /5/$$

$$u_i(x) = f_i(x), \; x \in S, \qquad /6/$$

де $u_i = u_i(x) = u(x,t_i)$, $f_i(x) = f(x,t_i)$, $h_t = T/N$, $\varkappa = 1/h_t$, $t_i = i h_t$. Таким чином, приходимо до послідовності стаціонарних задач, яку намагатимемося розв"язати за допомогою методу інтегральних рівнянь.

Покажемо, що розв"язок i-ї задачі з послідовності /4/–/6/ можна подати у вигляді

$$u_i(x) = \iint_S \Big\{ q_i(y) H(\varkappa R) + \sum_{j=3}^{i} q_{i+2-j}(y)\, \mathcal{E}_j(\varkappa R) \Big\} dS_y, \qquad /7/$$

де $q_i(y)$, $\mathcal{E}_i(\varkappa R)$ задовольняють такі рівняння

$$\iint_S q_i(y) H(\varkappa R) dS_y = f_i(x) - \sum_{j=3}^{i} \iint_S q_{i+2-j}(y)\, \mathcal{E}_j(\varkappa R)\, dS_y, \qquad /8/$$
$$x \in S,$$

$$\Delta \mathcal{E}_i(\varkappa R) - \varkappa^2 \mathcal{E}_i(\varkappa R) + 2\varkappa^2 \mathcal{E}_{i-1}(\varkappa R) - \varkappa^2 \mathcal{E}_{i-2}(\varkappa R) = \delta(R), \; x \in S, \qquad /9/$$

$R = R(x,y) = |x - y|$, $H(\varkappa R) = \dfrac{e^{-\varkappa R}}{R}$, $\delta(R)$ – дельта-функція; $q_i(y)$, $\mathcal{E}_j(\varkappa R)$, $j = \overline{2,i-1}$ – функції, визначені на попередніх кроках, причому

$$\mathcal{E}_1(\varkappa R) = \mathcal{E}_0(\varkappa R) = 0, \; \mathcal{E}_2(\varkappa R) = H(\varkappa R). \qquad /10/$$

Підставляючи зображення /7/ в рівняння /4/, після нескладного перегрупування отримуємо:

$$\iint_S q_k(y)[\Delta H(\varkappa R) - \varkappa^2 H(\varkappa R)] dS_y + \iint_S q_{k-1}(y)[\Delta \mathcal{E}_3(\varkappa R) -$$

$$-\varkappa^2 \mathcal{E}_3(\varkappa R) + 2\varkappa^2 H(\varkappa R)]dS_y + \ldots + \iint\limits_S q_2(y)[\Delta \mathcal{E}_K(\varkappa R) -$$

$$-\varkappa^2 \mathcal{E}_K(\varkappa R) + 2\varkappa^2 \mathcal{E}_{K-1}(\varkappa R) - \varkappa^2 \mathcal{E}_{K-2}(\varkappa R)]dS_y = 0.$$

Використовуючи співвідношення /9/ та /10/ неважко переконатися, що отримане рівняння перетворюється в тотожність. Умова /6/ задовольняється, оскільки виконується співвідношення /8/. Отже, наше твердження доведене і послідовність задач /4/–/7/ зведена до послідовності інтегральних рівнянь /8/, після розв"язання яких розв"язки задач /4/–/6/ визначаються за допомогою співвідношення /7/.

2. Визначимо вигляд функцій $\mathcal{E}_j(\varkappa R)$, які задовольнятимуть умови /9/ та /10/. Зобразимо шукані функції у такій формі

$$\mathcal{E}_j(\varkappa R) = P_i(\varkappa R) H(\varkappa R), \; i = \overline{3,N}; \qquad /11/$$

$$P_{i+2}(\varkappa R) = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i-1} a_{i,i-j} (\varkappa R)^{i-j}, \; i = \overline{1,N-2}. \qquad /12/$$

Спочатку визначимо вигляд функцій $\mathcal{E}_3(\varkappa R)$ та $P_3(\varkappa R)$. Підставляючи зображення /11/ при $i=3$ в рівняння /9/, враховуючи умови /10/ а також те, що $H(\varkappa R)$ є фундаментальним розв"язком рівняння Гельмгольца, отримуємо співвідношення

$$(\Delta P_3(\varkappa R) + 2\varkappa^2) H(\varkappa R) = 0.$$

Якщо врахувати зображення оператора Лапласа у сферичній системі координат, то можна отримати простіше рівняння:

$$P_3''(\varkappa R) - 2\varkappa P_3'(\varkappa R) + 2\varkappa^2 = 0.$$

Із останнього співвідношення та із зображення /12/ при $i=1$ отримуємо

$$P_3(\varkappa R) = a_{11}\, \varkappa R, \quad a_{11} = 1. \qquad /13/$$

Аналогічно для $P_4(\varkappa R)$ маємо рівняння

$$P_4''(\varkappa R) - 2\varkappa P_4'(\varkappa R) + 2\varkappa^2 P_3(\varkappa R) - \varkappa^2 = 0 \qquad /14/$$

та зображення

$$P_4(\varkappa R) = \frac{1}{2}[a_{22}(\varkappa R)^2 + a_{21}(\varkappa R)],$$

причому із рівняння /14/ визначаємо, що

$$a_{22} = 1, \quad a_{21} = 2. \qquad /15/$$

Розглянемо тепер зображення /12/ при $i > 2$. Воно повинно задовольняти рівняння

$$P''_{i+2}(\varkappa R) - 2\varkappa P'_{i+2}(\varkappa R) + 2\varkappa^2 P_{i+1}(\varkappa R) - \varkappa^2 P_i(\varkappa R) = 0,$$

Підставляючи зображення /I2/ в останнє рівняння і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при $(\varkappa R)^{i-1}$, $(\varkappa R)^{i-2}$, $(\varkappa R)^{i-j-1}$ та $(\varkappa R)$, отримуємо співвідношення:

$$a_{ii} = a_{i-1,i-1}, \quad i=\overline{2,N-2}; \qquad /I6/$$

$$a_{i,i-1} = \frac{i}{i-1} a_{i-1,i-2}, \quad i=\overline{2,N-2}; \qquad /I7/$$

$$a_{i,i-j} = \frac{(i-j+1)(i-j)a_{i,i-j+1} + 2i a_{i-1,i-j-1} - i(i-1)a_{i-2,i-j-1}}{2(i-j)}; \quad i-j \geq 2; \qquad /I8/$$

$$a_{i2} = a_{i1}, \quad i=\overline{3,N-2}. \qquad /I9/$$

Із співвідношень /I6/ та /I4/ можна знайти більш загальне

$$a_{ii} = 1, \quad i=\overline{2,N-2}. \qquad /20/$$

Аналогічно, зі співвідношень /I7/ та /I5/ виводимо

$$a_{i,i-1} = i, \quad i=\overline{2,N-2}. \qquad /21/$$

Неважко бачити, що формули /I8/, /I9/, /20/ та /21/ задають співвідношення, достатні для побудови всіх функцій $P_i(\varkappa R)$, а отже, і функцій $\mathcal{E}_i(\varkappa R)$, $i=\overline{2,N}$.

3. Знайдемо простіші формули для побудови функцій $P_i(\varkappa R)$. Зокрема, за допомогою співвідношення /I8/ можна довести, що

$$a_{ij} = \frac{i}{j} a_{i-1,j-1}, \quad i=\overline{2,N-2}, \quad j=\overline{2,i}. \qquad /22/$$

Доведення виконаємо методом індукції. Дійсно, при $j=i$ отримуємо співвідношення, яке збігається із формулою /I6/. При $j=i-1$ отримуємо співвідношення, яке збігається з формулою /I7/. Допустимо тепер, що формула /22/ справедлива при $j=i-k+1$. Покажемо, що тоді вона справедлива також для випадку $j=i-k$. Використовуючи співвідношення /I8/ при $i=m$, $j=k$ та формулу /22/ при $i=m$, $j=i-k+1$ та $i=m-1$, $j=i-k+1$, отримуємо

$$a_{m,m-k} = \frac{(m-k+1)(m-k)a_{m,m-k+1} + 2m a_{m-1,m-k-1} - m(m-1)a_{m-2,m-k-1}}{2(m-k)} =$$

$$= \frac{(m-k+1)(m-k)\frac{m}{m-k+1} a_{m-1,m-k} + 2m a_{m-1,m-k-1} - m(m-1)\frac{m-k}{m-1} a_{m-1,m-k}}{2(m-k)} =$$

$$= \frac{m}{m-k} a_{m-1,m-k-1},$$

що й доводить справедливість формули /22/.

Формула /22/ дає підставу сформулювати вираз для обчислення коефіцієнтів a_{ij} в явному вигляді:

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ \dfrac{i!}{j!\,2^{i-j-1}} & \text{при } i\neq j, \quad i=\overline{2,N-2}. \end{cases} \qquad /23/$$

Покажемо, що співвідношення /23/ справедливе при $j=2$. Дійсно, за допомогою співвідношень /22/ та /19/ можна записати

$$a_{i2}=\frac{i}{2}a_{i-1,1}=\ldots=\frac{i(i-1)\ldots 2}{2^{i-1}}\,a_{21}=\frac{i!}{2^{i-2}}.$$

Використовуючи отримане співвідношення, доведемо справедливість формули /23/ для решти випадків, коли $i\neq j$, $j>2$. Справді,

$$a_{ij}=\frac{i}{j}a_{i-1,j-1}=\ldots=\frac{i(i-1)\ldots(i-j+3)}{j(j-1)\ldots 3}\,a_{i-j+2,2}=\frac{i!}{j!\,2^{i-j-1}}.$$

Формула /23/ дає підставу спростити зображення функцій $P_i(\varkappa R)$

$$P_{i+2}(\varkappa R)=\sum_{j=0}^{i-1} b_{i,i-j}(\varkappa R)^{i-j}, \quad i=\overline{1,N-2}, \qquad /24/$$

$$b_{ij}=\begin{cases} \dfrac{1}{i!} & \text{при } i=j, \\ \dfrac{1}{j!\,2^{i-j-1}} & \text{при } i\neq j. \end{cases}$$

Із зображення /24/ неважко бачити, що при $i\to\infty$, $P_{i+2}(\varkappa R)$ прямує до нескінченності не швидше як $e^{\varkappa R}$. Тому при $i\to\infty$ $\varepsilon_i(\varkappa R)$ не перевищує $1/R$.

Підсумовуючи, зауважимо, що схема запропонованого методу утворена формулами /7/, /8/, /11/, /24/, які зводять задачу /1/-/3/ до послідовності стаціонарних інтегральних рівнянь /8/.

Викладену схему можна застосовувати для розв"язування складніших задач, а також для теоретичних досліджень.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.94