УДК 517.946

М.М.Притула

ПАРАМЕТРИЧНА ІНТЕГРОВНІСТЬ ЗА ЛАКСОМ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ФУНКЦІОНАЛЬНИХ МНОГОВИДАХ

1. Нехай на нескінченновимірному гладкому функціональному многовиді $M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ задана нелінійна неоднорідна динамічна система типу Кортевега-де Фріза:

$$u_t = u_{3x} + 6uu_x + \varepsilon(2u + xu_x) = K[u;x,\varepsilon], \qquad /1/$$

де $u \in M$; $\varepsilon \in \mathbb{R}$ - довільний параметр; $t \in \mathbb{R}$ - еволюційна змінна. На основі градієнтно-голономного алгоритму [2] у праці [1] доведена параметрична повна інтегровність системи вигляду /1/. Згідно з методом, описаним у працях [1, 2], вивчені асимптотичні при $|\lambda| \to \infty$ розв'язки асоційованого рівняння Лакса:

$$\tilde{\varphi}_\tau + K'^{*}\tilde{\varphi} = 0 \qquad /2/$$

для динамічної системи /1/ по еволюційному параметру $\tau \in \mathbb{R}$; $u_\tau = K[u;x]$:

$$\tilde{\varphi}[u;\tilde{\lambda}] = \exp(\tilde{\lambda}x + \tilde{\lambda}^3\tau + \partial^{-1}\tilde{\sigma}[u;\tilde{\lambda}]), \qquad /3/$$

де $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t,\tau;\lambda)$, $\partial^{-1}(\cdot) = (1/2)\left(\int_{x_0}^{x} dx(\cdot) - \int_{x}^{x_0+2\pi} dx(\cdot)\right)$ - оператор оберненого диференціювання; $x_0 \in \mathbb{R}$ - довільна відмічена точка; $\tau \in \mathbb{R}$ - параметр; $\lambda \in \mathbb{C}$ - довільне число, і при $|\tilde{\lambda}| \to \infty$

$$\tilde{\sigma}[u;\tilde{\lambda}] \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\sigma}_j[u]\tilde{\lambda}^{-j}. \qquad /4/$$

З огляду на те, що $\tilde{\lambda}(t,\tau;\lambda)|_{\tau=0} = \tilde{\lambda}(t,\tau;\lambda)|_{\tau=t} = \tilde{\lambda}(t;\lambda)$, $t \in \mathbb{R}$ - довільне, то при $\tau = t \in \mathbb{R}$ із /2/ і /3/ знаходимо нескінченну рекурентну послідовність для визначення коефіцієнтів розкладу в /4/:

$$\partial^{-1}\tilde{\sigma}_{j,\tau} - 3\tilde{\sigma}_{j+2} - 3\tilde{\sigma}_{j+1-k}\tilde{\sigma}_k - \tilde{\sigma}_{j-k}\tilde{\sigma}_{k-s}\tilde{\sigma}_s - 3\tilde{\sigma}_{j+1,x} - 3\tilde{\sigma}_{j-k}\tilde{\sigma}_{k,x} - \qquad /5/$$
$$- \tilde{\sigma}_{j,xx} - (6u+\varepsilon x)\delta_{j-1} - (6u+\varepsilon x)\tilde{\sigma}_j + \varepsilon\delta_{j,0} = 0.$$

Розв'язуючи /5/, знаходимо з точністю до $O(\varepsilon^2)$:

$$\tilde{\sigma}_0 = 0,\ \tilde{\sigma}_1 = -2u - (1/3)\varepsilon x,\ \tilde{\sigma}_2 = 2u_x + (2/3)\varepsilon,$$
$$\tilde{\sigma}_3 = -2u^2 - 2u_{3x} - (2/3)\varepsilon xu - (2/3)\varepsilon\partial^{-1}u,$$
$$\tilde{\sigma}_4 = 8uu_x + 2u_{3x} + (4/3)\varepsilon xu_x + (10/3)\varepsilon u + (1/9)\varepsilon^2 x,$$
$$\tilde{\sigma}_5 = -4u^3 - 10u_x^2 - 2u_{4x} - 12uu_{2x} - 2\varepsilon xu^2 - (20/3)\varepsilon u_x -$$
$$- 2\varepsilon xu_{2x} - 2\varepsilon\partial^{-1}u^2 - (4/3)u\partial^{-1}u + O(\varepsilon^2), \ldots.$$

Оскільки $|\tilde{\lambda}(t;\lambda)| \to \infty$, вважаємо, що параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ також прямує до безмежності в $\mathbb{C}$, тобто $|\lambda| \to \infty$, причому справедливий розклад:

$$\tilde{\lambda}^{-1}(t;\lambda) \simeq S_1(t)\lambda^{-1} + S_2(t)\lambda^{-2} + \dots , \qquad /6/$$

де $j \in N$, а $S_j \in \mathbb{R} \sim \mathbb{C}$ мають вигляд $S_j(t) = \exp(-\varepsilon t)$, $t \in \mathbb{R}$. Явні вирази для законів збереження записуються так:

$$\gamma_1 = -2\exp(-\varepsilon t)\int_{\mathbb{R}} dx\, u , \quad \gamma_2 = -2\exp(-\varepsilon t)\int_{\mathbb{R}} dx ,$$

$$\gamma_3 = -2\exp(-\varepsilon t)\int_{\mathbb{R}} dx\, u - 2\exp(-3\varepsilon t)\int_{\mathbb{R}} dx\, u^2 , \dots .$$

Крім цього, із /6/ знаходимо, що "спектральний" параметр $\tilde{\lambda}(t;\lambda) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ має такий явний вигляд: $\tilde{\lambda}(t;\lambda) = \exp(\varepsilon t)(\lambda - 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Розв"язуючи також рівняння Картана-Нетер $L_K \mathcal{L} + \partial \mathcal{L}/\partial t = 0$, $t \in \mathbb{R}$, знаходимо, що динамічна система /I/ має узгоджену пару $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ імплектичних операторів на функціональному многовиді M :

$$\mathcal{L} = \exp(2\varepsilon t)\partial/\partial x , \quad \mathcal{M} = \partial^3/\partial x^3 + 2u\partial/\partial x + 2\partial/\partial x \cdot u . \qquad /7/$$

Враховуючи тепер, що "спектральний" параметр $\tilde{\lambda}(t;\lambda) \in \mathbb{C}$ не залежить явно від елемента $u \in M$, на основі градієнтно-голономного алгоритму [2] із /7/ знаходимо в явному вигляді зображення типу Лакса для динамічної системи /I/:

$$L[u;\lambda] = -\partial^2/\partial x^2 + u - \tilde{\lambda}^2(t;\lambda) , \quad \lambda \in \mathbb{C} .$$

Таким чином, ми з"ясували, що нелінійна динамічна система /I/ повністю інтегрована за Лаксом.

Отримані результати можна сформулювати у вигляді твердження.

<u>Твердження</u>. Якщо елемент $\tilde{\varphi} \in T^*(M)$ задовольняє асоційоване визначальне рівняння Лакса /2/, де $\tilde{\varphi}(x;\tilde{\lambda})$ – спеціальний асимптотичний розв"язок /3/ при $|\tilde{\lambda}(t;\lambda)| \to \infty$, $\tilde{\lambda}(t_0;\lambda) = \lambda \in \mathbb{C}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ – фіксоване, то система /I/ має параметричну ізоспектральну інтегрованість за Лаксом тоді і тільки тоді, коли елемент $\varphi(x;\lambda) := \tilde{\varphi}(x;\tilde{\lambda})|_{\tau = t}$ задовольняє асимптотично тотожно при $|\lambda| \to \infty$ визначальне рівняння Лакса:

$$\varphi_t + K'^* \varphi = 0 \qquad /8/$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, причому умовою сумісності рівнянь Лакса /2/ і /8/ є диференціальні співвідношення на параметр $S_j(t)$, $j \in N$ в розкладі /6/ при $|\lambda| \to \infty$.

2. У випадку стандартної ізоспектральної інтегрованості системи $u_t = K[u]$ на M її гамільтоновість визначають ви-

ходячи зі несиметричних розв"язків $\varphi \in T^*(M)$ рівняння типу Лакса $\varphi_t + K'^*\varphi = grad\,\eta$, де $\eta \in D(M)$ – деякий довільний функціонал. У цьому випадку $u_t = K[u] = -\theta\, grad\, H$, де $H = (\varphi - K) - \eta$, $\theta = \varphi' - \varphi'^*$.

3. Слід відзначити, що у праці /1/ одержана повна інтегрованість за Ліувіллем нелінійної динамічної системи:

$$u_t = 6uu_x + u_{3x} + \varepsilon u^3 u_x = K[u;\varepsilon] \qquad /9/$$

тільки на односолітонному інваріантному підмноговиді $M^2(\varepsilon) \hookrightarrow M$ при будь-яких $\varepsilon \in \mathbb{R}$; інших інваріантних підмноговидів не існує, тобто динамічна система /9/ на M не інтегрована.

1. К у й б и д а В.С., П р и т у л а Н.Н., П р и к а р п а т с к и й А.К. Исследование свойств параметрической изоспектральной интегрируемости нелинейных динамических систем на функциональных многообразиях и их конечномерных аппроксимаций. Львов, 1991. 41 с. /Препринт/ АН Украины. Ин-т прикл. пробл. механики и математики им. Я.С.Подстригача; № 10-91. 2. М и т р о п о л ь с к и й Ю.А., Б о г о л ю б о в Н.Н., П р и к а р п а т с к и й А.К., С а м о й л е н к о В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. К.: Наук. думка, 1987. 296 с.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.94

УДК 536.2:519.6

Я.Г.Савула, Є.Я.Чапля, В.М.Кухарський

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В СЕРЕДОВИЩІ З ТОНКИМ КАПІЛЯРОМ

1. Постановка задачі. У праці /3/ запропонований спосіб побудови математичних моделей теплопереносу /1/ в середовищах з тонкими покриттями і включеннями. Використовуючи основні ідеї цієї праці, подамо ключову систему двовимірної задачі /плоска та осесиметричні задачі/ теплопереносу в середовищі з прямолінійним капіляром завтовшки h вздовж осі Oz /див. рисунок/ у вигляді

$$\varkappa_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - \varkappa_1^{(0)} v \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\lambda_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial z} = -q_0', \ в\ \Omega_1 \times (0,T], \qquad /1/$$

$$\varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - \frac{1}{\beta}\Big[\frac{\partial}{\partial z}\Big(\beta\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}\Big) + \beta\frac{\partial}{\partial z}\Big(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}\Big)\Big] = 0, \ в\ \Omega_2 \times (0,T]. \qquad /2/$$

Тут $\varkappa_1^{(0)} = \gamma h \varkappa_1$, $\lambda_1^{(0)} = \gamma h \lambda_1$, $q_0^+ = hq^+$; $\gamma = 1$, $\beta = 1$