ходячи зі несиметричних розв"язків $\varphi \in T^*(M)$ рівняння типу Лакса $\varphi_t + K'^*\varphi = grad\,\eta$, де $\eta \in D(M)$ – деякий довільний функціонал. У цьому випадку $u_t = K[u] = -\theta\, grad\, H$, де $H = (\varphi - K) - \eta$, $\theta = \varphi' - \varphi'^*$.

3. Слід відзначити, що у праці [1] одержана повна інтегрованість за Ліувіллем нелінійної динамічної системи:

$$u_t = 6uu_x + u_{3x} + \varepsilon u^3 u_x = K[u;\varepsilon] \qquad /9/$$

тільки на односолітонному інваріантному підмноговиді $M^2(\varepsilon) \hookrightarrow M$ при будь-яких $\varepsilon \in \mathbb{R}$; інших інваріантних підмноговидів не існує, тобто динамічна система /9/ на M не інтегрована.

1. Куйбида В.С., Притула Н.Н., Прикарпатский А.К. Исследование свойств параметрической изоспектральной интегрируемости нелинейных динамических систем на функциональных многообразиях и их конечномерных аппроксимаций. Львов, 1991. 41 с. /Препринт/ АН Украины. Ин-т прикл. пробл. механики и математики им. Я.С.Подстригача; № 10-91. 2. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н., Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. К.: Наук. думка, 1987. 296 с.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.94

УДК 536.2:519.6

Я.Г.Савула, Є.Я.Чапля, В.М.Кухарський

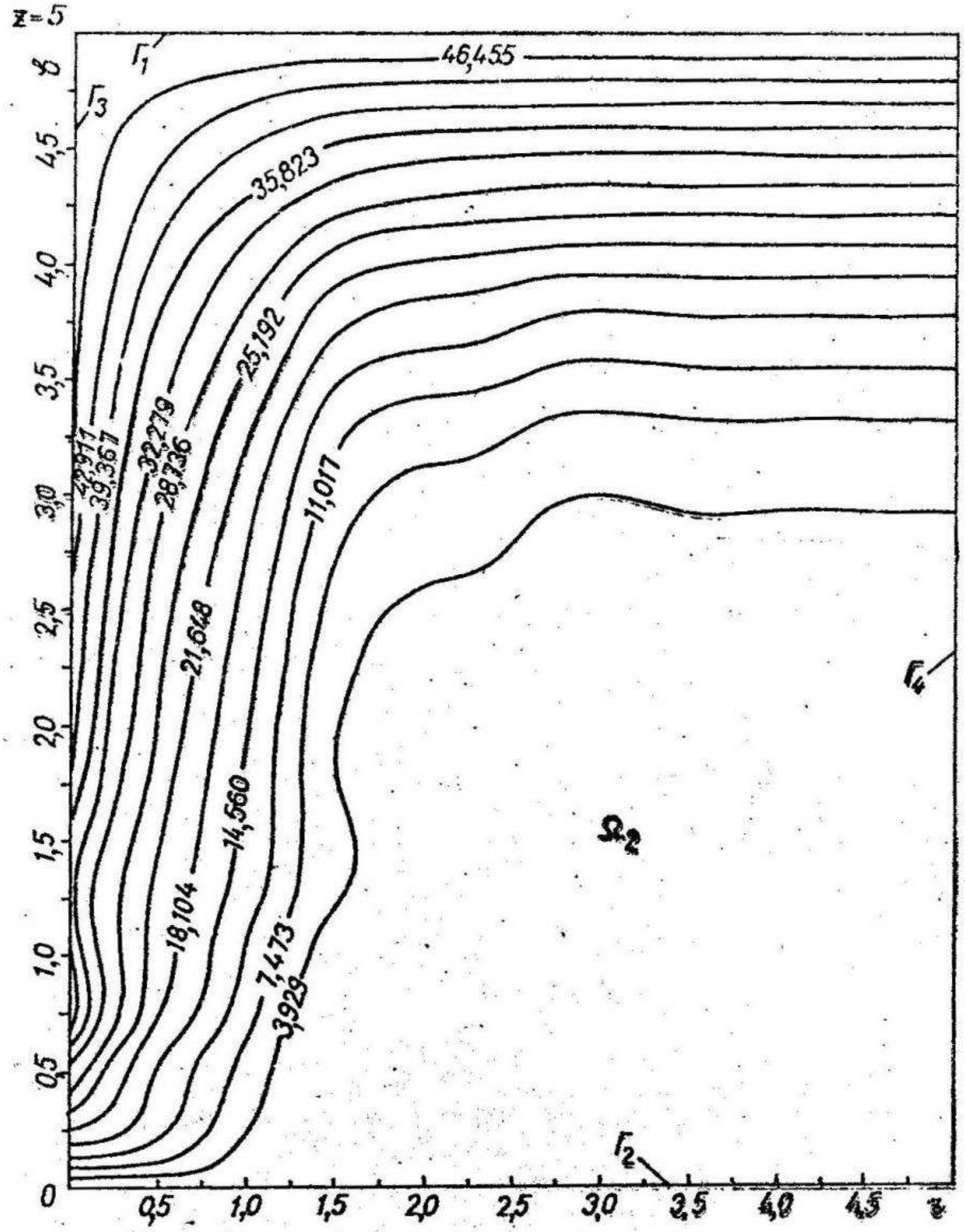
ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В СЕРЕДОВИЩІ З ТОНКИМ КАПІЛЯРОМ

1. Постановка задачі. У праці [3] запропонований спосіб побудови математичних моделей теплопереносу [1] в середовищах з тонкими покриттями і включеннями. Використовуючи основні ідеї цієї праці, подамо ключову систему двовимірної задачі /плоска та осесиметричні задачі/ теплопереносу в середовищі з прямолінійним капіляром завтовшки h вздовж осі Oz /див. рисунок/ у вигляді

$$\varkappa_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - \varkappa_1^{(0)} v \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\lambda_1^{(0)}\frac{\partial T_1}{\partial z} = -q_0', \ в\ \Omega_1 \times (0,T], \qquad /1/$$

$$\varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - \frac{1}{\beta}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial z}\right) + \beta\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial z}\right)\right] = 0,\ в\ \Omega_2 \times (0,T]. \qquad /2/$$

Тут $\varkappa_1^{(0)} = \gamma h \varkappa_1$, $\lambda_1^{(0)} = \gamma h \lambda_1$, $q_0^+ = hq^+$; $\gamma = 1$, $\beta = 1$


z=5
5
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
4,5
r
Γ_1
Γ_2
Γ_3
Γ_4
Ω_2
46,455
42,911
39,367
35,823
32,279
28,736
25,192
21,648
18,104
14,560
11,017
7,473
3,929

– для плоскої задачі; $\gamma = h/2$, $\beta = r$ – для осесиметричної задачі; $\varkappa_1, \varkappa_2$ – об"ємні теплоємності середовищ Ω_1 та Ω_2; λ_1, λ_2 – коефіцієнти теплопровідності середовищ Ω_1 та Ω_2; q^+ – густина теплового потоку на спільній межі областей Ω_1 та Ω_2, v – швидкість конвективного переносу через капіляр.

Через $T_1(\tau, z)$, $T_2(\tau, r, z)$ позначимо розподіли температур в областях Ω_1 і Ω_2. З огляду на умови симетрії відносно осі Or, температуру по товщині капіляра вважаємо сталою.

До рівнянь /1/, /2/, потрібно додати граничні умови:

$$
\begin{gathered}
\lambda_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial z} = -\alpha_1^{(1)}(T_1 - T_c^{(1)}), \; z = b, \; \tau \in (0, T], \\
\lambda_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial z} = \alpha_1^{(2)}(T_1 - T_c^{(2)}), \; z = 0, \; \tau \in (0, T], \\
\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \nu} = -\alpha_2^{(1)}(T_2 - T_c^{(1)}) \text{ на } \Gamma_1 \times (0, T], \\
\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \nu} = -\alpha_2^{(2)}(T_2 - T_c^{(2)}) \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T], \\
\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_4 \times (0, T],
\end{gathered} \tag{3}
$$

умови спряження

$$
\begin{gathered}
T_1 = T_2, \\
\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = -q^+ \quad \text{на } \Gamma_3 \times (0, T];
\end{gathered} \tag{4}
$$

та початкові умови

$$
\begin{gathered}
T_1 = T_1^{(0)}, \; \tau = 0, \; z \in [0, b]; \\
T_2 = T_2^{(0)}, \; \tau = 0, \; (r, z) \in \Omega_2.
\end{gathered} \tag{5}
$$

2. Варіаційна постановка задачі. Введемо простори

$$
\begin{gathered}
V_1 = \{ v(z) \mid v(z) \in W_2^{(1)}[0, b] \}, \\
V_2 = \{ v(r, z) \mid v(r, z) \in W_2^{(1)}(\Omega_2) \}.
\end{gathered}
$$

Розглянемо функції $T_1 \in L_2(0, T; V_1)$, $T_2 \in L_2(0, T; V_2)$ і білінійні форми:

$$
\begin{gathered}
m_1(T_1', \tilde{T}_1) = \int_0^b \varkappa_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \tilde{T}_1 \, dz; \\
a_1(T_1, \tilde{T}_1) = \int_0^b \varkappa_1^{(0)} v \frac{\partial T_1}{\partial z} \tilde{T}_1 \, dz; \\
b_1(T_1, \tilde{T}_1) = \int_0^b \lambda_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial z} \, dz + \alpha_1^{(2)} T_1 \tilde{T}_1 \big|_{z=0} + \\
+ \alpha_1^{(1)} T_1 \tilde{T}_1 \big|_{z=b}; \\
m_2(T_2', \tilde{T}_2) = \int_\Omega \varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} \tilde{T}_2 \, d\Omega; \\
b_2(T_2, \tilde{T}_2) = \int_\Omega \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial z} \right) d\Omega + \\
+ \int_{\Gamma_1} \alpha_1^{(1)} T_2 \tilde{T}_2 r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \alpha_1^{(2)} T_2 \tilde{T}_2 r \, d\Gamma;
\end{gathered}
$$

$$<l_1,\tilde T_1> = \alpha_1^{(2)} T_c^{(2)} \tilde T_1|_{z=0} + \alpha_1^{(1)} T_c^{(1)} \tilde T_1|_{z=\ell} ;$$

$$<l_2,\tilde T_2> = \int_{\Gamma_1} \alpha_2^{(1)} T_c^{(1)} \tilde T_2 r d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \alpha_2^{(2)} T_c^{(2)} \tilde T_2 r d\Gamma ,$$

де $\tilde T_1 \in V_1$, $\tilde T_2 \in V_2$.

Домножуючи рівняння /1/, /2/ на довільні функції $\tilde T_1$, $\tilde T_2$ і додаючи, отримуємо варіаційну задачу:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left[m_1(T_1,\tilde T_1)+m_2(T_2,\tilde T_2)\right]+a_1(T_1,\tilde T_1)+$$
$$+\ell_1(T_1,\tilde T_1)+\ell_2(T_2,\tilde T_2)=<l_1,\tilde T_1>+<l_2,\tilde T_2>,$$
$$m_1(T_1,\tilde T_1)+m_2(T_2,\tilde T_2)=m_1(T^{(0)},\tilde T_1)+m_2(T^{(0)},\tilde T_2) \quad \text{при } \tau=0, \qquad /6/$$
$$T_1=T_2,$$
$$T_1=T_2 \text{ на } \Gamma_3\times(0,T].$$

3. <u>Чисельний аналіз задачі.</u> Для знаходження розв"язку варіаційної задачі використаємо напівдискретний метод Гальоркіна /4/, згідно з яким подамо шукані функції у вигляді

$$T_1^h=\sum_{i=1}^{N} q_{1i}(\tau)\varphi_{1i}^h(z);$$
$$T_2^h=\sum_{i=1}^{N} q_{2i}(\tau)\varphi_{2i}^h(r,z), \qquad /7/$$

де $q_{1i}(\tau)$, $q_{2i}(\tau)$, $i=\overline{1,N}$ – шукані функції; $\varphi_{1i}^h(z)$, $\varphi_{2i}^h(r,z)$ – базові функції, які будуємо методом ізопараметричного відображення з використанням квадратичних та білінійних базисних функцій /2/:

$$\varphi_{11}(\xi)=\frac{1}{2}(1-\xi)(-\xi);$$
$$\varphi_{12}(\xi)=1-\xi^2;$$
$$\varphi_{13}(\xi)=\frac{1}{2}(1+\xi)\xi;$$
$$\varphi_{i2}=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1), \quad i=1,3,5,7;$$
$$\varphi_{i2}=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta), \quad i=2,6;$$
$$\varphi_{i2}=\frac{1}{2}(1+\xi_i\xi)(1-\eta^2), \quad i=4,8.$$

Зауважимо, що згідно з першою умовою /4/ функції $q_{1i}(\tau)$ та $q_{2i}(\tau)$ задовольняють співвідношення

$$q_{i1}(\tau)=q_{i2}(\tau)$$

для скінченно-елементних вузлів і співвідношення, що лежать на границі Γ_3.

З використанням зображення /7/ варіаційна задача /6/ зводиться до задачі Коші вигляду [4]

$$M \frac{dQ}{d\tau} + KQ = F, \qquad /8/$$

$$Q|_{\tau=0} = Q_0 ,$$

де M, K, F – відомі матриці; Q – вузлові значення шуканої температури; Q_0 – вузлові значення у початковий момент часу.

Для розв"язання задачі /8/ використаємо різницеву схему Кранка-Ніколсона [4].

Приклад. Виконаємо чисельний аналіз розподілу температурного поля в середовищі, яке характеризується $\varkappa_2 = 1{,}789$, $\lambda_2 = 0{,}03$ /пісок/ з капіляром завтовшки $h = 0{,}01$ через який протікає вода $(\varkappa_1 = 4{,}181,\ \lambda_1 = 0{,}54)$ зі швидкістю $v = 2$. Вибрані такі значення температур зовнішнього середовища: $T_C^{(1)} = 50$, $T_C^{(2)} = 0$ та коефіцієнти тепловіддачі: $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = 50$. На рисунку подані ізотерми в області Ω_2 при $\tau = 40$ для значень $a = 5$, $b = 5$.

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. В 2 ч. М., 1982. Ч.1. 2. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів. К., 1993. 3. Савула Я.Г., Сипа І.М., Стругинський І.В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.37. С.39-45. 4. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв"язування початково-крайових задач. К., 1991.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.94