УДК 536.2

Н.П.Флейшман, Ч.Н.Койфман

УЗАГАЛЬНЕНІ УМОВИ СПРЯЖЕННЯ СЕРЕДОВИЩ ЗА ДОПОМОГОЮ ТОНКОГО ПЛОСКОГО ПРОШАРКУ

1. Розглянемо ізотропний, однорідний, плоский прошарок малої товщини $2h = const$, який з"єднує два середовища /тіла/ "1" та "2". Припустимо, що в прошарку відбувається деякий фізичний одновимірний нестаціонарний процес, який моделюється рівнянням

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\kappa \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma^2 v - \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial t} = A(z,t), \qquad /1/$$

де $v(z,t)$ - шукана функція; t - час; $-h \le z \le h$; κ, a, γ^2 - відомі константи; $A(z,t)$ - відома функція.

При часткових значеннях коефіцієнтів рівняння /1/ описує, зокрема, теплопровідність рухомого та нерухомого середовища; теплопровідність тіла, теплофізичні параметри якого залежать від температури, дифузію; фільтрацію; поширення теплових хвиль; поширення домішок в атмосфері тощо [1-6].

У середовищах "1", "2" з іншими фізичними характеристиками спостерігається той же фізичний процес, який визначається функціями $u_1(z,t)$ та $u_2(z,t)$. На площинах $z = \pm h$ виконуються умови спряження, які загалом можна записати у вигляді:

$$\beta v(-h,t) = \beta_1 u^+, \quad \beta v(h,t) = \beta_2 u^+, \qquad /2/$$

$$\lambda \frac{\partial v(-h,t)}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial u^+}{\partial z}, \quad \lambda \frac{\partial v(h,t)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial u^+}{\partial z}, \qquad /3/$$

де u^-, u^+ - значення функцій u_1, u_2 відповідно при $z = -h$ та $z = h$; $\beta, \beta_1, \beta_2, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ - відомі числа.

Дискретизуючи область прошарку вздовж осі z, вибираємо три точки $z = 0$ та $z = \pm h$ і записуємо рівняння /1/ лише в точці $z = 0$, заміняючи одночасно похідні по z їхніми симетричними різницевими аналогами з точністю $O(h^2)$. В умовах /3/ похідні по z заміняємо відповідно їхніми несиметричними аналогами з такою ж точністю і після виключення величин $v(-h,t)$, $v(h,t)$ та

$$v(0,t)=\frac{1}{2}\left[v(h,t)+v(-h,t)\right]-\frac{h}{4\lambda}\left(\lambda_2\frac{\partial u^+}{\partial z}-\lambda_1\frac{\partial u^-}{\partial z}\right). \qquad /4/$$

отримуємо остаточно узагальнені умови спряження середовищ "I", "2":

$$\frac{1}{\beta}(\beta_2 u^+-\beta_1 u^-)-\frac{h}{\lambda}\left(\lambda_1\frac{\partial u^-}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial u^+}{\partial z}\right)=0; \qquad /5/$$

$$(1+2kh)\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial u^+}{\partial z}-(1-2kh)\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial u^-}{\partial z}= \\ =h\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}-\gamma^2\right)\left[\frac{1}{\beta}(\beta_2 u^+ +\beta_1 u^-)- \right. \\ \left. -\frac{h}{2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial u^+}{\partial z}-\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial u^-}{\partial z}\right)\right]+2hA(0,t). \qquad /6/$$

2. Розглянемо частковий випадок, коли тіло "2" відсутнє, а на зовнішній площині $z=h$ тонкого покриття тіла "I" справедлива гранична умова

$$\lambda\frac{\partial v(h,t)}{\partial z}+\alpha v(h)=F_0(t), \qquad /7/$$

де $\lambda\geqslant 0$, $\alpha\geqslant 0$ – відомі числа; $F_0(t)$ – відома функція.

Враховуючи /2/, /3/ перепишемо умову /7/ так

$$\lambda_2\frac{\partial u^+}{\partial z}=-\alpha\frac{\beta_2}{\beta}u^+ +F_0(t). \qquad /8/$$

Виключаючи величини u^+ та $\frac{\partial u^+}{\partial z}$ з формул /5/, /6/, /8/, виводимо узагальнену граничну умову на функцію $u_1(z,t)\equiv u(z,t)$ для середовища з тонким покриттям на площині $z=-h$ /верхній індекс мінус у функції u пропущений/

$$\alpha_* u+\lambda_*\frac{\partial u}{\partial z}+\mu_*\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_1 h^2\mu\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial t}=F(t), \qquad /9/$$

де

$$\alpha_*=\alpha\frac{\beta_1}{\beta}\left[1+2kh)-\gamma^2 h\left(\frac{2\lambda}{\alpha}+\frac{3}{2}h\right)\right], \\ \lambda_*=\lambda_1\left[(1-2kh+2\alpha h/\lambda)-\frac{1}{2}\gamma^2h^2(3+2\alpha h/\lambda)\right], \\ \mu_*=(2\lambda h+\frac{3}{2}\alpha h^2)\beta_1/\beta,\quad \mu=\frac{3}{2}+\alpha h/\lambda, \qquad /10/ \\ F(t)=2\lambda h(1+\frac{\alpha h}{\lambda})A(0,t)+ \\ +\left[(1+2kh)-\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}-\gamma^2\right)\frac{h^2}{2}\right]F_0(t).$$

3. Граничну умову /9/ для тіла з тонким покриттям сталої товщини можна подати також в інтегральній формі /після інтегрування по t /

$$\alpha_*(u-u_0)+\lambda_0 \frac{\partial}{\partial z}(u-e^{-\varkappa t}u_0)=$$

$$=\varkappa e^{-\varkappa t}\int_0^t[(\lambda_0-\lambda_*)\frac{\partial u}{\partial z}+F(t)]e^{\varkappa t}dt,\ t>0,\ z=-h, \qquad /11/$$

де

$$\lambda_0=\varkappa\lambda_1 h^2\mu/a,\ \varkappa=a\alpha_*/\mu_*,\ u_0=u(z,0).$$

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М., 1972. 2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. 3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме охраны окружающей среды. М., 1982. 4. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М., 1984. 5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М., 1947. 6. Флейшман Н.П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісник ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С.30-34.

Стаття надійшла до редколегії 27.04.94

УДК 539.3

М.В.Щербатий

ОПТИМІЗАЦІЯ ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СКЛАДОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

У даній роботі розглянуті постановки і схема розв"язування задач оптимізації для складових оболонок обертання типу Тимошенка з урахуванням частот неосесиметричних вільних коливань. Отримане співвідношення аналізу чутливості для простих частот вільних коливань відносно геометричних і структурних параметрів оптимізації. Проаналізовані числові результати оптимізації, які показують можливість появи кратних частот власних коливань у процесі пошуку оптимального розв"язку.

1. <u>Постановка задач оптимізації</u> складається з функцій керування і функцій стану розглядуваної системи; рівнянь, які пов"язують функції керування і функції стану /математична модель системи/: критерію мети і множини допустимих керувань [illegible]