

МАТЕМАТИЧНА
БІБЛІОТЕКА
ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ISSN 0201-758X

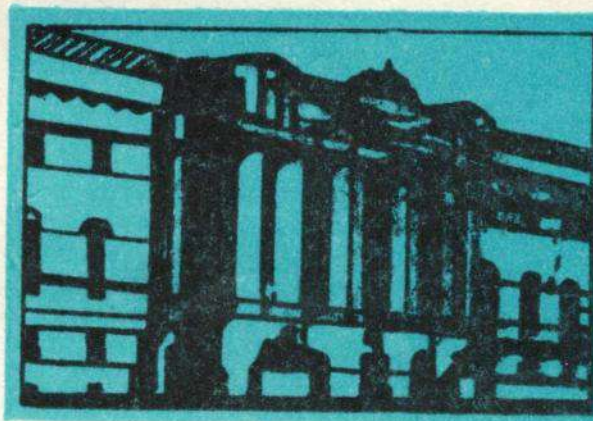
ISSN 0320-6572

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

41
1995



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК
Львівського університету
Серія механіко-математична
Виходить з 1965 р.

В и п у с к 41

ЗАДАЧІ
ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ
МАТЕМАТИКИ

Л ь в і в
Видавництво "Світ"
1995

УДК 518

У Віснику містяться статті з математичного моделювання, чисельних методів розв'язування рівнянь математичної фізики і задач оптимізації.

Для наукових працівників, викладачів і студентів старших курсів.

Бібліогр. у кінці статей.

Редакційна колегія: канд. фіз.-мат. наук, проф. М.Я.Бар-
т і ш, д-р фіз.-мат. наук, проф. М.М.В о й т о в и ч, д-р
фіз.-мат. наук, проф. Я.Г.С а в у л а /відп. ред./, д-р фіз.-мат.
наук, проф. Г.Г.Ц е г е л и к, д-р фіз.-мат. наук, доц.
Г.А.Ш и н к о р е н к о, канд. фіз.-мат. наук, доц. Ю.М.Щ е р -
о м и н а /відп. секр./.

Відповідальний за випуск доц. Ю.М.Щ е р о м и н а

Адреса редколегії:
290000 Львів, вул.Університетська, 1.
Університет, кафедра теорії оптимальних процесів.
Тел.: 79-47-91.

В 16031000-067
225-95

Замовне

© Львівський державний
університет, 1995

М.Я.Бергіш, С.М.Шахно, В.О.Ломіковський, А.І.Чипурко

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ АЛГОРИТМІВ
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У праці [1] для розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів ми запропонували методи, які є своєрідною комбінацією різних методів. Як показувать чисельні результати, наведені нижче, за допомогою такого підходу можна отримати нові методи, які є ефективнішими від базових методів у сенсі кількості обчислень /менша кількість ітерацій, менший час рахунку/ та надійнішими в роботі /збіжність з ширшої області/. Крім цього, запропоновані методи дають змогу розв'язувати системи нелінійних рівнянь, в яких кількість рівнянь дорівнює або більша від кількості невідомих, в таких системах, в яких визначник матриці Якобі перетворюється в нуль. Для порівняння брали метод Брауна [5], класичний метод Ньютона та різні варіанти методу Ньютона з оптимальним вибором кроку та частковим /ЧРАМН/ або повним /РАМН/ регуляризацією за А.М.Тихон вим. Останні методи /РАМН, ЧРАМН/, згідно з дослідженнями [5], виявились найбільш ефективними і надійними.

Розглянемо задачу знаходження розв'язку рівняння

$$F'(x)^T F(x) = 0,$$

/1/

де $F(x): D \in R^n \rightarrow R^m$ ($m \geq n$).

Перший метод є модифікацією демпфованого методу Гаусса-Ньютона [2] і має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k [F'(\bar{x}_k)^T F'(\bar{x}_k)]^{-1} F'(\bar{x}_k)^T F(x_k), \quad /2/$$

$$\bar{x}_k = (1-\mu)x_k + \mu\varphi(x_k), \quad \varphi(x_k) = x_k - \beta_k F'(x_k)^T F(x_k), \quad /3/$$

$$0 \leq \mu \leq 1, \quad \lambda_k, \beta_k \in (0, 1], \quad k = 0, 1, \dots$$

Зуважимо, що при $m=n$ і при $\lambda_k=1, \mu=0$ формула /2/ методу перетворюється в ітераційну формулу Ньютона.

© Бергіш М.Я., Шахно С.М., Ломіковський В.О. та ін., 1995

Другий метод має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - [F'(\bar{x}_k)^T F'(\bar{x}_k) + \gamma_k I]^{-1} F'(\bar{x}_k)^T F(x_k), \quad /4/$$

де $\bar{x}_k$ визначається за формулами /3/, $\gamma_k = \alpha \|F'(\bar{x}_k)^T F(x_k)\|$.
Цей метод містить як частковий випадок при $\mu = 0$ відомий метод Левенберга-Маркварта [3], варіанти якого деякі автори називають регуляризованим аналогом методу Ньютона [4, 5].

Введення дійсних числових параметрів λ_k , β_k в методи /2/-/3/, /4/ має такий зміст: λ_k , β_k впливають на довжину кроку в напрямі руху, вони вибирались шляхом дроблення починаючи з одиниці: параметр μ змінює напрям руху.

Метод /4/ придатний для розв'язування систем, в яких визначник якобіана $F'(\bar{x}_k)^T F'(\bar{x}_k)$ перетворюється в нуль. Для того щоб таку властивість мав метод /2/-/3/, на тих ітераціях, де отримуються погано зумовлені системи лінійних рівнянь, використовують алгоритм Гілла і Мюррея модифікованого розкладу Хоlessького [2]:

$$A + D = F'(\bar{x}_k)^T F'(\bar{x}_k) + D = LL^T,$$

де D - діагональна матриця з невід'ємними діагональними елементами, які дорівнюють нулю, коли матриця A надійно додатно визначена. У разі доброї зумовленості матриці A система лінійних рівнянь розв'язується за допомогою QR-розкладу матриці A .

Для порівняння всіх методів взяті чотири приклади з праці [5], які вважаються важкими. Наведемо ці приклади.

Приклад 1. Задана система N рівнянь /при значеннях $N = 4, 8, 16, 32/$ для функцій

$$f_i(x) = x_i + \sum_{j=1}^N x_j - N - 1, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad f_N(x) = \prod_{j=1}^N x_j - 1.$$

За нульове наближення обраний вектор $x_i^0 = 0,5$. Очевидний один із коренів $x_i^* = 1$. Є також принаймні ще один корінь. Для цієї системи $\det f'(x^0) = 1/2^{N-1}$. У разі великої розмірності системи $\det f'(x^0) \ll 1$.

Приклад 2. Задана система двох рівнянь для функцій

$$f_1(x) = x_1^2 - x_2 - 1,$$

$$f_2(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 0,5)^2 - 1.$$

Початкове наближення $x^0 = /0, 1, 2, 0/$, розв'язки $x^* \approx /1,5463, 1,3912/$ і $x^* \approx /1,0673, 0,1392/$.

Приклад 3. Задана система двох рівнянь для функцій

$$f_1(x) = x_1 - 13 + x_2(x_2(5 - x_2) - 2),$$

$$f_2(x) = x_1 - 29 + x_2(x_2(x_2 + 1) - 14).$$

Початкове наближення $x^0 = /15, -2/, x^* = /5, 4/$. Визначник матриці Якобі цієї системи $\det f'(x) = 6x_2^2 - 8x_2 - 12$ перетворюється в нуль на особливих лініях $x_2 \approx 2,53$ і $x_2 \approx -0,90$. Як бачимо, при рухові від x^0 до кореня x^* траєкторія перетинає обидві ці лінії.

Приклад 4. Потрібно знайти мінімум функції, яка має рельєф типу яру з дуже крутими схилами:

$$\Phi(x) = x_1^2 + 100(x_1^2 - x_1 - x_2)^2.$$

Цю задачу зводимо до системи двох нелінійних рівнянь $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$ / $i = 1, 2$ / з очевидним коренем $x^* = /0, 0/$; $x^0 = /1, 1/$.

У табл. 1 наведена кількість ітерацій для знаходження коренів. У верхній частині таблиці вміщені результати праць [4, 5] з точністю 10^{-4} , у нижній - отримані нами з точністю 10^{-8} . Символ " ∞ " у таблиці означає, що даним методом розв'язок знайти неможливо. Зауважимо, що є випадки збіжності методів до різних коренів.

Наведена нижче система перевизначена - кількість рівнянь більша від кількості невідомих.

Приклад 5 [3]. Задана система трьох рівнянь з однією невідомою для функцій

$$f_i(x) = e^{t_i x} - y_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad t_1 = 1, y_1 = 2;$$

$$t_2 = 2, y_2 = 4; \quad t_3 = 3; \quad \varepsilon = 10^{-10}.$$

Значення y_3, x^0 наведені в табл. 2. Для порівняння взяті результати, отримані в праці [3] методами січних і Ньютона для мінімізації

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [f_i(x)]^2.$$

Підсумовуючи отримані результати, можна зробити такі висновки:

1. Запропонований спосіб побудови комбінованих ітераційних процесів дає змогу отримати високоефективні і надійні алгоритми.

2. Найбільш надійним і майже завжди найшвидше збіжним із порівнюваних методів є метод /2/-/3/ при значенні параметра $\mu = 0,5$. Близькі до нього характеристики має метод /4/ при $\mu = 0,5$.

Таблиця 1

Метод	Приклад						
	N=4	8	16	32	II	III	IV
Ньютона	18	∞	∞	∞	24	57	8
Боруна	6	7	8	-	10	10	-
РАМН з опт. кроком							
$\alpha = 10^{-4}$	12	2	4	3	8	∞	50
$\alpha = 10^{-2}$	3	4	5	3	7	∞	67
ЧРАМН з опт. кроком							
$\alpha = 10^{-3}$	4	4	3	5	8	12	43
Ньютона	14	107	∞	5	26	41	5
Гауса-Ньютона	9	10	5	5	24	29	5
Метод /2/-/3/							
$\mu = 0$	7	10	3	4	8	29	∞
$\mu = 0,25$	9	11	3	4	6	15	41
$\mu = 0,50$	6	9	3	4	5	10	27
$\mu = 0,75$	4	5	5	12	10	∞	5
$\mu = 1,00$	8	7	3	9	∞	5	36
Метод /4/							
$\alpha = 10^{-3}$							
$\mu = 0$	3	4	4	4	7	26	38
$\mu = 0,25$	4	4	4	4	4	18	45
$\mu = 0,50$	5	5	4	4	5	14	5
$\mu = 0,75$	6	6	5	4	5	∞	36
$\mu = 1,00$	5	8	11	4	5	8	∞

Таблиця 2

Початкові значення і розв'язки	Метод /2/-/3/		Метод січних		Метод Ньютона
	Параметр μ	Час, мс	Кількість ітерацій		
$y_3 = 8$	0,00	0,16	5	6	7
$x^0 = 1$	0,25	0,16	6		
$x^* =$	0,50	0,10	3		
$= 0,69315$	0,75	0,21	5		
$f(x^*) = 0$	1,00	0,16	5		
$y_3 = 3$	0,00	0,38	11	8	9
$x^0 = 1$	0,25	0,27	8		
$x^* =$	0,50	0,21	7		
$= 6,44005$	0,75	0,32	9		
$f(x^*) =$	1,00	0,32	9		
$= 1,63900$					

3. Для визначення $\Phi(x_k)$ не потрібна точна одновимірна оптимізація, достатньо знайти перше значення β_k , за якого досягається зменшення нев'язки $\|F'(\bar{x}_k)^T F(x_k)\|$.

4. Використання модифікованого розкладу Холєського успішно заміняє регуляризацію методу /приміром, за А.М.Тихоновим/ в особливому випадку.

5. Запропоновані алгоритми ефективно розв'язують системи рівнянь, які відповідають мінімізації функцій багатьох змінних з рельєфом типу яру.

Наведені результати розрахунків отримані на ПЕСМ IBM PC AT 286 за допомогою пакету програм, написаних на *Turbo Pascal*.

Г. Бергіш М.Я., Шахно С.М. Про деякі методи розв'язування нелинійної задачі найменших квадратів // Симпоз. "Численна оптимізація розчислень". 22-24 лист. 1993 р.м.Київ: Тези доп. К., 1993. С.14-15. 2. Гилл Ф., Морре Н. У., Райт М. Практическая оптимизация. М., 1985. 3. Дзенько Д., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М., 1988. 440 с. 4. Ермачков В.В., Калиткин Н.М. Методы решения линейных и нелинейных алгебраических уравнений. М., 1979. 24 с. /Препринт/ Ин-т прикл. математики АН СССР; -# 169/. 5. Ермачков В.В., Калиткин Н.М. Оптимальный шаг в регуляризации метода Ньютона // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т.21. № 2. С.491-497.

Стаття надійшла до редколегії 01.02.94

УДК 517.958:519.6

І.Є.Бернакевич, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ОБОЛОНОК З РІДИНОЮ.

І. ФОРМУЛЮВАННЯ І РОЗВ'ЯЗУВАНІСТЬ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

У даній праці вивчається задача акустичної взаємодії оболонок Тимошенка, заповнених ідеальною стисливою рідиною; подібні моделі можуть виникати в практиці проектування гідроакустичних пристроїв. Вважаючи невідомими вектор пружних зміщень в оболонці та потенціал швидкостей в рідині, ми формулюємо початково-крайову і відповідну варіаційну задачу взаємодії цих середовищ. За допомогою напівдискретизації Гальоркіна та апріорних енергетичних оцінок здійснене конструктивне доведення коректності варіаційної задачі взаємодії. Для спрощення викладу зупинимось на випадку осесиметричних процесів взаємодії.

© Бернакевич І.Є., Шинкаренко Г.А., 1995

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай замкнена осесиметрична оболонка, яка цілком заповнена рідиною, віднесена до циліндричної системи координат $/z, r, \theta/$. Позначимо через Ω меридіанний перетин цієї конструкції при $\theta = \text{const}$, припускаючи, що частина Γ_0 границі Γ області Ω визначається кривою $r = r(z)$, $0 \leq z \leq L$, яка описує меридіанний перетин оболонки. Вважатимемо, що границя Γ області Ω неперервна за Ліпшицем і $n = (\cos(n, z), \cos(n, r))$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до Ω ; очевидно, що $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_S$, де Γ_0 — частина границі Γ , що лежить на осі Oz .

Припускаючи, що акустичні проделси в такій конструкції породжені осесиметричними навантаженнями, що змінюються в часі $t \in [0, T]$, $0 \leq T < +\infty$, сформулюємо задачу:

знайти потенціал швидкостей рідини $\psi = \psi(z, r, t)$, тангенціальне зміщення $u = u(z, t)$, прогин $w = w(z, t)$ і кут повороту нормалі $\gamma = \gamma(z, t)$ середньої поверхні оболонки такі, що

$$\frac{1}{\rho_0 c_0} \psi'' - \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left[z \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = f_0 \text{ на } \Omega \times (0, T],$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_0 \times [0, T], \Gamma_0 \in \Gamma, \text{mes}(\Gamma_0) > 0,$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial n} = w' \text{ на } \Gamma_0 \times [0, T], \Gamma_S = \Gamma \setminus \Gamma_0,$$

$$\rho h u'' - \frac{1}{A_1 z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} z N_1 - \frac{\partial z}{\partial z} N_2 - A_1 \frac{z}{R_1} N_{13} \right\} = f_1,$$

$$\rho h w'' - \frac{1}{A_1 z} \left\{ -A_1 \frac{z}{R_1} N_1 - A_1 \frac{z}{R_2} N_2 + \frac{\partial}{\partial z} N_{13} \right\} = \psi' + f_2,$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \gamma'' - \frac{1}{A_1 z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} z M_1 - \frac{\partial z}{\partial z} M_2 - A_1 z N_{13} \right\} = f_3,$$

$$N_1(s) = B(\epsilon_1 + \nu \epsilon_2), N_2(s) = B(\nu \epsilon_1 + \epsilon_2), B = \frac{Eh}{2(1+\nu)},$$

$$M_1(s) = D(\chi_1 + \nu \chi_2), M_2(s) = D(\nu \chi_1 + \chi_2), D = B \frac{h^2}{6(1-\nu)},$$

$$N_{13}(s) = B_s \epsilon_{13}(s), B_s = kB \text{ на } \Gamma_S \times (0, T],$$

$$\epsilon_1(s) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{R_1} w, \epsilon_2(s) = \frac{1}{A_1 z} \frac{\partial z}{\partial z} u + \frac{1}{R_2} w,$$

$$\varepsilon_{13}(s) = \gamma + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{1}{R_1} u \quad s = (u, \omega, \gamma),$$

$$x_1(s) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \quad x_2(s) = \frac{1}{A_1 z} \frac{\partial z}{\partial z} \gamma,$$

$$A_1 = \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2\right)^{1/2}, \quad A_2 = z,$$

$$R_1 = -A_1^3 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}\right)^{-1}, \quad R_2 = z A_1,$$

$$u|_{z=0} = \gamma|_{z=0} = N_{13}|_{z=0} = 0 \quad \text{на } [0, T],$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0, \quad \psi'|_{t=0} = \psi_0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$s|_{t=0} = (u, \omega, \gamma)|_{t=0} = (u_0, \omega_0, \gamma_0) \quad \text{на } \Gamma_s,$$

$$s'|_{t=0} = (u', \omega', \gamma')|_{t=0} = (v_0, y_0, \xi_0).$$

/1.1/

Тут $\rho, \bar{\varepsilon}, \nu$ та k - густина, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і товщина оболонки відповідно; k - коефіцієнт поперечного зсуву; ρ_0, c_0 - густина і швидкість звуку в рідині; $g' = \frac{\partial}{\partial t} g$, $g'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} g$.

Більш змістовне висвітлення поданих у задачі /1.1/ рівнянь можна знайти у працях [2, 3, 6, 8, 11].

2. Варіаційна постановка задачі взаємодії. Введемо простори

$$\Phi = \{\varphi \in H^1(\Omega)\}, \quad H^0 = L^2(\Omega),$$

$$V = \{v \in H^1((0, L)) \mid v(0) = 0\}, \quad Y = V \times V \times V, \quad Q = \Phi \times Y.$$

Φ' і Y' - простори, спряжені до просторів Φ і Y відповідно. Припустимо, що для даних задачі /1.1/ справедливі вклучення

$$\begin{cases} \psi_0 \in \Phi, \quad \varphi_0 \in H^0, \quad s_0 = (u_0, \omega_0, \gamma_0) \in Y, \\ g_0 = (v_0, y_0, \xi_0) \in \mathcal{X} = [L^2((0, L))]^3, \\ f_0 \in L^2(0, T; H^0), \quad f = \{f_i\}_{i=1}^3 \in L^2(0, T; \mathcal{X}). \end{cases} \quad /2.1/$$

Тут і далі для функціональних просторів взяті позначення із праці [4].

Використовуючи принцип віртуальних робіт, сформулюємо варіаційний еквівалент початково-крайової задачі акустичної взаємодії оболонки з рідиною:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \{\psi_0, s_0\} \in Q = \Phi \times Y, \{\varphi_0, g_0\} \in H = H^0 \times X, \\ \quad l \in L^2(0, T; \Phi'), \lambda \in L^2(0, T; Y'), \\ \text{знайти пару } \sigma = (\psi, s) \in L^2(0, T; Q) \text{ таку, що} \\ m(\psi''(t), \varphi) + a(\psi(t), \varphi) - b(s'(t), \varphi) = \langle l(t), \varphi \rangle, \\ \mu(s''(t), g) + \alpha(s(t), g) + \beta(g, \psi'(t)) = \langle \lambda(t), g \rangle, \\ m(\psi'(0) - \psi_0, \varphi) = 0, a(\psi(0) - \psi_0, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi, \\ \mu(s'(0) - g_0, g) = 0, \alpha(s(0) - s_0, g) = 0 \quad \forall g \in Y. \end{array} \right. \quad /2.2/$$

Білінійні та лінійні форми, вжиті для запису задачі /2.2/, подаються виразами:

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\psi, \varphi) = \int_{\Omega} (\rho_0 c_0)^{-1} \psi \varphi z dz dz \quad \forall \psi, \varphi \in \Phi, \\ a(\psi, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} z dz dz, \\ b(g, \varphi) = \int_0^L y \varphi z A_1 dz \quad \forall s = (u, w, \gamma) \in Y, \forall g = (v, y, \xi) \in Y, \\ \mu(s, g) = \int_0^L \rho h \left\{ uv + \omega y + \frac{h^2}{12} \gamma \xi \right\} A_1 z dz, \\ \alpha(s, g) = \int_0^L \left\{ \sum_{j=1}^2 [N_j(s) \varepsilon_j(g) + M_j(s) x_j(g)] + N_{13}(s) \varepsilon_{13}(g) \right\} A_1 z dz, \\ \langle l, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f_0 \varphi^2 dz dz, \quad \langle \lambda, g \rangle = \int_{\Omega} \{ f_1 v + f_2 y + f_3 \xi \} A_1 z dz. \end{array} \right. \quad /2.3/$$

Якщо ввести позначення

$$\left\{ \begin{array}{l} M(p, q) = m(\psi, \varphi) + \mu(s, g), \\ A(p, q) = a(\psi, \varphi) + \alpha(s, g), \quad \forall p = (\psi, s) \in Q, \\ B(p, q) = -b(s, \varphi) + \beta(g, \psi), \quad \forall q = (\varphi, g) \in Q, \\ \langle F, q \rangle = \langle l, \varphi \rangle + \langle \lambda, g \rangle; \end{array} \right. \quad /2.4/$$

то варіаційна задача /2.2/ має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } p_0 = (\psi_0, s_0) \in Q, q_0 = (\varphi_0, g_0) \in H = H^0 \times X, \\ F \in L^2(0, T; Q'); \\ \text{знайти вектор } p = (\psi, s) \in L^2(0, T; Q) \text{ такий, що} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} M(p''(t), q) + B(p'(t), q) + A(p(t), q) = \langle F(t), q \rangle, & /2.5/ \\ M(p'(0) - q_0, q) = 0, \quad A(p(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q. \end{cases}$$

3. Коректність варіаційної задачі. Неважко переконатись, що

$$\begin{cases} \text{білінійні форми } M(.,.) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}, \\ A(.,.) : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{симетричні і неперервні.} \end{cases} \quad /3.1/$$

Крім цього, форма $M(.,.)$ є H -еліптичною, що дає змогу ввести норму

$$\|q\|_H = M^{1/2}(q, q) \quad \forall q \in H. \quad /3.2/$$

Нарешті відзначимо, що неперервна форма $B(.,.) : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ має властивість

$$B(q, q) = 0 \quad \forall q \in Q. \quad /3.3/$$

Теорема про коректність варіаційної задачі /2.5/.

Нехай на додаток до включень /2.1/ дані варіаційної задачі /2.5/ такі, що

$$\text{білінійна форма } A(.,.) : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R} \quad Q - \text{еліптична.} \quad /3.4/$$

Тоді існує єдиний розв'язок $p = (\varphi, s)$ задачі /2.5/ такий, що

$$p \in L^2(0, T; Q), \quad p' \in L^2(0, T; H), \quad p'' \in L^2(0, T; Q'). \quad /3.5/$$

Доведення. Нехай послідовність скінченновимірних підпросторів $\{Q_h\}$ із простору Q така, що

$$\dim Q_h = n(h) = n \rightarrow \infty \text{ при } h \rightarrow 0,$$

$$\bigcup_{h \rightarrow 0} Q_h \quad \text{щільно вкладене в } Q.$$

Неважко переконатись, що для кожного фіксованого $h > 0$ існує єдиний $p_h(t) = (\psi_h(t), s_h(t))$, який задовольняє рівняння задачі /2.5/ для будь-яких $q \in Q_h$ і при цьому справджується рівняння балансу енергії:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|p_h'(t)\|_H^2 + \|p_h(t)\|_Q^2 \} = \langle F(t), p_h'(t) \rangle. \quad /3.6/$$

Звідси з використанням нерівності Гронуолла [2, 4] приходимо до априорної оцінки

$$\|p_h'(t)\|_H^2 + \|p_h(t)\|_Q^2 \leq C \{ \|p_0\|_Q^2 + \|q_0\|_H^2 + \int_0^t \|F(\tau)\|_*^2 d\tau \}, \quad /3.7/$$

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall h > 0.$$

Остання показує, що з послідовності наближених розв'язків $\{p_h\}$ можна вибрати підпослідовність, яку знову позначимо через $\{p_h\}$, таку, що

$$\begin{cases} p_h \rightarrow p \text{ в } L^\infty(0, T; Q) \text{ *-- слабо,} \\ p'_h \rightarrow p' \text{ в } L^\infty(0, T; H) \text{ *-- слабо.} \end{cases} \quad /3.8/$$

Тепер залишається переконатись, що побудована в /3.8/ границя p є розв'язком задачі /2.5/. Повторюючи міркування праці [2], можна переконатись, що вектор p дійсно задовольняє рівняння задачі /2.5/.

Зауваження. Щодо статичних варіаційних задач теорії оболонок див. праці [5, 8].

4. Підсумкові зауваження. Одержаний тут результат стосовно коректності варіаційної задачі взаємодії оболонок Тимошенка зі стисливою ідеальною рідиною підком можна узагальнити на випадок матеріалу оболонки з короткочасною пам'яттю та в'язкої стисливої рідини, як це зроблено у праці [9] для задач взаємодії пружних тіл з рідинами.

Зауважимо, що знайдені тут умови коректності варіаційної задачі /2.5/ можуть служити запорукою успішної побудови проєкційно-сіткових схем для їх розв'язування; основою цього підходу з використанням методу скінченних елементів по простору та однофазових схем інтегрування в часі можуть служити результати [1, 2, 7, 8, 9, 11].

1. Бернякевич И.Е., Шельвах О.П., Шинкаренко Г.А. Численное исследование вариационных задач теории оболочек Тимошенко проекционно-сеточными методами. Львов, 1991. 53 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 04.06.91; № 314-Ук91.
2. Горлач В.М., Шинкаренко Г.А. Численное моделирование акустических волн в упругих телах с жидкостью: динамическое процесс. Львов, 1987. 35 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 22.12.87; № 3256-Ук87.
3. Динамика тел, взаимодействующих со средой. Гузья А.Н., Маркуш Ш., Иустл. и др. К. Наук. думка, 1991. 392 с.
4. Дюво Г., Дионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 382 с.
5. Литвинова В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 368 с.
6. Пелех Б.Д. Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища шк. 1978. 149 с.
7. Рикс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Знание, 1988. 284 с.
8. Саула Я.Г., Флейшман Н.П. Расчет и оптимизация оболочек с разными срединными поверхностями. Львов: Вища шк. 1989. 122 с.
9. Шинкаренко Г.А. Численное моделирование динамики взаимодействия физико-механических полей: Автореф. дис. ... д-ра

фіз.-мат. наук. Львів, 1993. 36 с. 10. Boujet J. Mathematical formulation of fluid-structure interaction problem // M2AN. 1987. Vol. 21. N2. P. 239-260. 11. Mankehnoltz O. Problems with fluid-structure interaction // Comput. Meth. Appl. Sci. Ed. Ch. Hirsch. Elsevier Sci. Publ., 1992. P. 25-35.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.94

УДК 517.958

О.В.Блажневська

АВТОМОДЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ГОРІННЯ СУМІШІ ГАЗІВ

Математичне моделювання процесу горіння реакційноздатних газових сумішей є актуальним для багатьох галузей науки і техніки. Скажімо, моделювання процесу нанесення тонких плівок кремнію, арсеніду галію та інших речовин шляхом хімічного осадження їх з газової фази вимагає розгляду послідовності процесів горіння, термофорезу, адсорбції продуктів реакції на поверхні плівки тощо. Моделюючи кожну стадію процесу, потрібно правильно описати асимптотику еволюції попередньої стадії. Відомо [2], що ефективним методом дослідження аналогічних задач є побудова та аналіз асимптотично стійких авто-модельних розв'язків.

Нехай нерухома реакційноздатна суміш газів, яка має температуру T_0 і густину ρ_0 , заповнює замкнену трубу. Після підведення тепла до границі $x=0$ в її околі створюється зона підвищеної температури. Це ініціює хімічну реакцію, внаслідок чого по суміші поширюється хвиля горіння. Якщо полум'я є ламінарним і ефектами примежового шару можна знехтувати, то адекватним є одновимірний опис зміни параметрів уздовж труби.

Дією масових сил нехтуємо. Припустимо, що фронт полум'я рухається набагато повільніше, ніж звукова хвиля. Тоді тиск у трубі практично не залежить від координат, але через те, що труба замкнена, тиск монотонно зростає з часом. Додатково припустимо, що швидкість хімічної реакції визначається законом Арреніуса та залежить від температури і концентрації одного лімітуючого компонента. За вказаних припущень замкнена система

© Блажневська О.В., 1995

рівнянь аеротермохімії [1] набуває вигляду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0; \quad /1/$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad /2/$$

$$\rho \left(\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho D \frac{\partial c}{\partial x}) - \rho f; \quad /3/$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial p}{\partial t} + q \rho f; \quad /4/$$

$$p = \rho R T \frac{1}{M}. \quad /5/$$

Тут ρ, p, v, T - відповідно густина, тиск, швидкість і температура суміші; t - час; x - координата; c - концентрація лімітуючого компонента; M, c_p - молярна маса та ізобарична теплоємність суміші; D, λ - ефективні коефіцієнти дифузії та теплопровідності; q - тепловий ефект реакції;

$$f = k c \exp(-E/RT),$$

k - передекспоненціальний множник у законі Арреніуса; E - енергія активації; R - молярна газова стала.

Розглянемо для прикладу процес, в основі якого лежить реакція



Нехай суміш є стехіометричною. Тоді хімічна реакція може повністю перевести реагенти у продукти реакції і, отже, компонентний склад суміші повністю визначається концентрацією лімітуючого компонента. Тоді

$$M = \frac{M_1}{5c_0 - 2c},$$

де c_0, M_1 - початкова масова концентрація лімітуючого реагента SiCl_4 та його молярна маса;

$$c_p = c_{p0} [1 + (c - c_0)\delta]; \quad c_{p0} = c_0 c_{p1} + (1 - c_0) c_{p2};$$

$$\delta = \frac{1}{c_{p0}} \left(c_{p1} + \frac{2M_2}{M_1} c_{p2} - \frac{4M_3}{M_1} c_{p3} - \frac{M_4}{M_1} c_{p4} \right),$$

де $M_i, c_{pi} / i = 2, 3, 4$ - молярні маси та ізобаричні теплоємності відповідно $\text{H}_2\text{O}, \text{HCl}, \text{SiO}_2$; c_{p0} - початкова теплоємність суміші.

За незалежні змінні оберемо змінні Лагранжа s, t_A , які пов'язані зі змінними Ейлера x, t такими співвідношеннями:

$$s = \int_0^x \rho(y, t) dy; \quad t_A = t. \quad /7/$$

припустимо, що теплофізичні коефіцієнти суміші задовольняють умови

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\sigma, \quad \rho D = \rho_0 D_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\sigma, \quad /8/$$

де $1/2 < \sigma < 1$.

Тоді система рівнянь /1/-/5/ набуває вигляду

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t_\lambda} \left(\frac{1}{\rho} \right); \quad /9/$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = 0; \quad /10/$$

$$\frac{\partial c}{\partial t_\lambda} = D_0 \rho_0^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\sigma-1} \frac{\partial c}{\partial s} \right] - f; \quad /11/$$

$$c \rho_0 [1 + (c - c_0) \delta] \frac{\partial T}{\partial t_\lambda} = \lambda_0 \rho_0 \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\sigma-1} \frac{\partial T}{\partial s} \right] + q f + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t_\lambda}; \quad /12/$$

$$p = \rho R T \frac{1}{M}. \quad /13/$$

Перейдемо до безрозмірних змінних, прийнявши

$$\beta = \frac{R T_0}{E}, \quad \gamma = \beta \frac{c \rho_0 T_0}{q},$$

$$\tau = \frac{t_\lambda}{t_*}, \quad \alpha = \frac{s}{\rho_0 l_*}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{\beta T_0}, \quad u = v \sqrt{\frac{c \rho_0 \rho_0 t_*}{\lambda_0}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0},$$

де T_0 - початкова температура суміші; t_* , l_* - масштаби часу і довжини. Оберемо масштабні множники таким чином:

$$t_* = \gamma \frac{R^2 T_0^2}{k p_0^2} \exp \left(\frac{1}{\beta} \right); \quad l_*^2 = \frac{\lambda_0 t_*}{c \rho_0 \rho_0}.$$

Тоді для визначення безрозмірних величин $c, \theta, u, \bar{\rho}, \bar{p}$, отримаємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha} = 0; \quad /14/$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1}{\gamma \bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right); \quad /15/$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = Le \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\bar{\rho}^{1-\sigma} \frac{\partial c}{\partial \alpha} \right) - \gamma \varphi; \quad /16/$$

$$[1 + \delta(c - c_0)] \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\bar{\rho}^{1-\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right) + \varphi + \frac{\mu}{\beta} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau}; \quad /17/$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} (1 + \beta \theta) \frac{M_0}{M}, \quad /18/$$

де

$$\varphi = c \exp \left(\frac{\theta}{1 + \beta \theta} \right); \quad M_0 = \frac{M_1}{3 c_0}; \quad \mu = \frac{R}{c \rho_0 M_0};$$

$$Le = \frac{D_0 \rho_0 c \rho_0}{\lambda_0} - \text{число Льюїса.}$$

Шукані функції задовольняють початкові умови

$$c = c_0, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0. \quad /19/$$

Граничні умови задачі мають вигляд

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0; \quad (\bar{\rho})^{1-\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \bar{q}, \quad /20/$$

$$c|_{\alpha=\infty} = c_0; \quad \theta|_{\alpha=\infty} = 0, \quad u|_{\alpha=0} = 0.$$

Тут $\bar{q} = 1, q(\lambda_0 \beta T_0)^{-1}$; q - густина теплового потоку через границю. Нехай $q(\tau) = q_0 \exp(m\tau)$, $m = \text{const}$; $q_0 = \text{const}$.

Побудуємо автомоделний розв'язок задачі /14/-/20/. Врахуємо, що тепловий потік, який підводиться до границі, поступово проникає у глиб середовища. Товщина прогрітого шару неперервно збільшується. На границі цього шару відбувається хімічна реакція. За межами згаданого шару реакція не відбувається, тому у рівняннях /13/-/17/ $\varphi \equiv 0$. У цій області будемо автомоделний розв'язок типу сілочної хвилі. Введемо автомоделну змінну $\xi = \alpha - \omega\tau$. Для визначення функцій $c(\xi)$, $\theta(\xi)$ отримуємо рівняння

$$-\omega c'(\xi) = Le \frac{d}{d\xi} [(\bar{\rho})^{1-\sigma} c'(\xi)]; \quad -\omega \theta'(\xi) = \frac{d}{d\xi} [(\bar{\rho})^{1-\sigma} \theta'(\xi)]. \quad /21/$$

Враховуємо, що на зоні, тобто при $\xi = \xi_0$, $\theta = 0$ маємо, що $c'(\xi) = 0$, $\theta'(\xi) = 0$. Тому в /21/ дістаємо

$$(\bar{\rho})^{1-\sigma} c'(\xi) = Le(c_0 - c);$$

$$(\bar{\rho})^{1-\sigma} \theta'(\xi) = -\omega \theta; \quad \bar{\rho} = (1 + \beta \theta)^{-1} \frac{3c_0}{3c_0 - 2c}. \quad /22/$$

Тут ω - масова безрозмірна швидкість фронту полум'я.

У прогрітому шарі введемо автомоделну змінну $\eta = \alpha - \eta\tau$. Розв'язок шукємо у вигляді

$$c = c(\eta), \quad \theta = \theta(\eta), \quad \rho = l^{\eta\tau} R(\eta), \quad p = e^{\eta\tau}, \quad u = e^{\eta\tau} u(\eta).$$

Для визначення функцій $c(\eta)$, $\theta(\eta)$, $R(\eta)$ отримуємо рівняння

$$c''(\eta) = -(1-\sigma) \frac{R'(\eta)}{R(\eta)} c'(\eta) + \frac{1}{Le} \{ \gamma \varphi = m\eta c'(\eta) \} \left(\frac{1}{R(\eta)} \right)^{1-\sigma}; \quad /23/$$

$$\theta''(\eta) = -(1-\sigma) \frac{R'(\eta)}{R(\eta)} \theta'(\eta) - \left\{ \varphi + m\eta [1 + (c - c_0)\delta] \theta'(\eta) \right\} \left(\frac{1}{R(\eta)} \right)^{1-\sigma} \frac{M\pi}{\beta} \left(\frac{1}{R} \right)^{2-\sigma}; \quad /24/$$

$$\frac{1}{R(\eta)} = (1 + \beta \theta) \frac{M_0}{M}. \quad /25/$$

Автомодельний розв'язок існує, якщо $n = \frac{2m}{1-\delta} \cdot l = -m \frac{1+\delta}{1-\delta}$. Рівняння /23/-/24/ виконуються в області $0 < \eta < \eta_0$. Параметр η_0 визначає товщину шару, прогрітого в початковий момент часу. Отже, шуканий автомодельний розв'язок задовольняє дещо модифіковані початкові умови. Значення параметра η_0 визначає положення фронту полум'я, а саме: в момент часу τ фронт проходить через точку з масовою координатою $\alpha = \eta_0 e^{m\tau}$. Граничні умови задачі задовольняються точно. Оскільки в кожному скінченний момент часу збурення поширюється в скінченному шарі, а на границі з фоном шукані функції та їхні похідні є неперервними, то умови $\theta|_{\alpha=\infty} = 0$, $c|_{\alpha=\infty} = c_0$ виконуються автоматично. Враховуючи рівняння /22/, а також те, що у прогрітому шарі фронт полум'я рухається з безрозміною масовою швидкістю $m\eta_0 e^{m\tau}$, одержуємо ще такі дві граничні умови для рівнянь /23/-/24/:

$$c'(\eta_0) = -\frac{m\eta_0}{Le} [c(\eta_0) - c_0] (R(\eta_0))^{\sigma-1},$$

$$\theta'(\eta_0) = -m\eta_0 \theta(\eta_0) (R(\eta_0))^{\sigma-1}. \quad /26/$$

Перші дві граничні умови /20/ набувають вигляду

$$c'(0) = 0, \quad \theta'(0) = Q_0 (R(\eta_0))^{\sigma-1}. \quad /27/$$

Таким чином, для визначення функцій c , θ одержана крайова задача /23/-/27/ для двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Ця задача зводиться відомими методами до задачі Коші, для розв'язування якої існує стандартне програмне забезпечення. Для визначення функції u отримуємо задачу:

$$u'(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[m\eta \frac{R'(\eta)}{R^2(\eta)} - \frac{n}{R(\eta)} \right], \quad /28/$$

$$u(0) = 0.$$

Зауважимо, що безрозмірна лінійна швидкість поширення фронту полум'я визначається формулою

$$D = \exp(l\tau) [u(\eta) + m\eta_0 R^{-1}(\eta_0)],$$

де $l = -m(1+\delta)(1-\delta)^{-1} < 0$.

Обчислення виконані за умови, що енергія 4 мДж вкладалась на інтервалі часу 10 с. Одержані результати задовільно узгоджуються з відомими даними теорії горіння. Порівняно з традиційним запропонований підхід дає змогу набагато простіше описати основні властивості системи.

І. Алексеев Б.В., Гришин А.М. Физическая газодинамика реагирующих сред. М.: Высш. шк., 1985. 2. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

Стаття надійшла до редколегії 16.06.94

УДК 517.648:517.68

П.С.Венгерський, П.С.Сеньо

ОДИН ИНТЕРВАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ПОЧАТКОВИХ НАБЛИЖЕНЬ МЕТОДУ НЬЮТОНА

Під час застосування ітераційних методів для розв'язування систем нелінійних рівнянь одним з найскладніших завдань є вибір початкового наближення. Загалом способи знаходження початкового наближення ґрунтуються на апріорних оцінках. У даній роботі запропонований алгоритм знаходження початкового наближення для точкового методу Ньютон за допомогою одного з інтервальних методів, який гарантує виконання всіх умов збіжності методу.

Нехай R^n - n - мірний дійсний простір. Покажемо зв'язок понять інтервального аналізу і відповідних величин R^n .

І. Основні поняття інтервального аналізу в R^n . Припустимо, що окіл $O(y, \rho)$ в R^n з центром y і радіусом ρ є особливим типом інтервалу, а саме

$$O(y, \rho) = \{x \mid \|x - y\| \leq \rho\} = [y - \rho e, y + \rho e], \quad (1)$$

де $e = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Основні інтервальні поняття тісно зв'язані з нормою

$$\|x\| = \max\{|x_i|\} \quad \text{для } R^n, \quad (2)$$

де

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Як відомо з [1], абсолютна величина інтервалу $[a, b]$ в R визначається так:

$$|[a, b]| = \max\{|a|, |b|\}.$$

Аналогічно, для інтервалу $x = [a, b]$ в R^n

$$\omega(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \{(\beta_i - \alpha_i)\} = \|b - a\|.$$

© Венгерський П.С., Сеньо П.С., 1995

З означення ширини інтервалу X маємо

$$|X| = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \max(|a_i|, |\beta_i|) \} = \max_{x \in X} \{ \|a\|, \|\beta\| \} = \max_{x \in X} \|x\|. \quad /3/$$

Матричну норму відповідно до /2/ для $A = (a_{ij})$ записуємо

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad /4/$$

Враховуючи /3/ і /4/, отримуємо

$$\|A\| = |A[-e, e]|.$$

Для матриці $M = ([\alpha_{ij}, \beta_{ij}])$ з інтегральними компонентами маємо

$$|M| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}, \beta_{ij}| = \max_{A \in M} \{ \|A\| \} = |M[-e, e]|.$$

Середня точка інтервалу $X = [a, b]$ визначається так:

$$m(X) = \frac{1}{2}(a + b).$$

Аналогічно в багатомірному випадку для $X = ([a_i, b_i])$ отримуємо

$$m(X) = \left(\frac{1}{2} (a_i + b_i) \right).$$

2. Теорема Канторовича збіжності методу Ньютона до розв'язку x^* . Введемо позначення. Нехай $M_{nn}(R)$ - множина дійсних матриць розмірності $n \times n$.

Запишемо теорему, доведену у праці [3, с.693].

Теорема I. Нехай $\Omega_0 = O(x^{(0)}, \rho)$ і відображення $f: R^n \rightarrow R^n$ двічі неперервно диференційоване. Припустимо, що для $\zeta \in M_{nn}(R)$ виконуються умови:

$$1/ \|\zeta f(x^{(0)})\| \leq \bar{\eta};$$

$$2/ \|\zeta f'(x^{(0)}) - I\| \leq \delta, \quad I - \text{одинична матриця};$$

$$3/ \|\zeta f''(x)\| \leq \bar{K} \quad \text{для всіх } x \in \Omega_0.$$

Тоді, якщо

$$h = \frac{\bar{K} \bar{\eta}}{(1-\delta)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \delta < 1;$$

$$\rho \geq \rho_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \frac{\bar{\eta}}{1 - \delta},$$

рівняння $f(x) = 0$ має розв'язок $x^* \in \Omega_0$.

При цьому, якщо $\{x^{(n)}\}$ - послідовність наближень методу Ньютона, то

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leq \frac{1}{2^n} [2h]^{2^n} \frac{\bar{\eta}}{h(1-\delta)}.$$

3. Теорема існування розв'язку x^* для одного типу інтервального ітераційного методу. Розглянемо модифікацію за Кравчи-ком методу /1.12/ з праці [2], а саме

$$K(X^{(n)}) = x^{(n)} - U^{(n)}f(x^{(n)}) + (I - U^{(n)}F'(X^{(n)}))(X^{(n)} - x^{(n)}); \quad /5/$$

$$X^{(n+1)} = K(X^{(n)}) \cap X^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad /6/$$

де $X^{(0)}$ - початковий інтервал; $F'(X^{(n)}) = 1/4 f'(x^{(n)}) + 3/4 f'(x^{(n)} + 2/3(X^{(n)} - x^{(n)}))$; $U^{(n)}$ - приблизна інверсія центру матриці $F'(X^{(n)})$; I - одинична матриця; $x^{(n)} = \text{mid}(X^{(n)})$.

Оформулюємо два твердження існування розв'язку x^* для методу /5/-/6/.

Лема. Нехай відображення $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ двічі неперервно диференційоване за Фреше в кожній точці опуклої множини $D_0 \subset D$, $f(x)$ - його аналітичний вираз. Нехай визначене інтервальне розширення $f(x)$, x^* - розв'язок рівняння $f(x) = 0$ ($x^* \in X^{(0)} \subset D_0$, $x^{(0)} < x^*$).

Якщо $X^{(0)} \supset [x^{(0)}, x^{(0)} + \frac{3}{2}(x^* - x^{(0)})]$, тоді

$$f''(x^{(0)} + \theta_2^0(x^* - x^{(0)}))(x^* - x^{(0)})^2 \leq f''(x^{(0)} + \frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(0)} - x^{(0)}))(X^{(0)} - x^{(0)})^2 / 7/$$

де

$x^{(0)} + \theta_2^0(x - x^{(0)})$, $x^{(0)} + \frac{2}{3}[\theta_1^1](x - x^{(0)})$ - проміжні точки залишкових членів розкладів у ряди Тейлора до другої похідної в точці $x^{(0)}$ відповідно функцій $f(x)$ і $f'(x^{(0)} + \frac{2}{3}(x - x^{(0)}))$.

Теорема 2. Нехай виконуться умови і співвідношення /7/ леми.

Тоді послідовність інтервалів $\{X^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, обчислена за формулами /5/-/6/, задовольняє такі співвідношення:

1/ $x^* \in X^{(0)}$;

2/ якщо крім цього для $f(x)$ виконується умова

$$|I - U^{(0)}F'(X^{(0)})| < 1,$$

тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)} = x^*$.

Доведення леми і теорема 2 містять праця [2].

4. Зв'язок умов існування і збіжності ітераційного методу Ньютона та інтервального методу /5/-/6/. Позначимо через $V^{(n)}$ та-ку величину

$$V^{(n)} = (I - U^{(n)}F'(X^{(n)}))$$

Запишемо докладніше позначений вираз

$|I - y^{(n)} f'(x^{(n)})| = |I - y^{(n)} (\frac{1}{4} f'(x^{(n)}) + \frac{3}{4} f'(x^{(n)} + \frac{2}{3} (x^{(n)} - x^{(n)})))|$.
Використовуючи означення 2 інтегральних операцій з [4], отримуємо

$$\begin{aligned} & |I - y^{(n)} (\frac{1}{4} f'(x^{(n)}) + \frac{3}{4} f'(x^{(n)} + \frac{2}{3} (x^{(n)} - x^{(n)})))| = \\ & = |I - y^{(n)} (f'(x^{(n)}) + \frac{1}{2} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)})) (x^{(n)} - x^{(n)}))| = \\ & = |I - y^{(n)} f'(x^{(n)}) - \frac{1}{2} y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)})) (x^{(n)} - x^{(n)})|. \quad /9/ \end{aligned}$$

Із властивостей абсолютної величини інтервалу, /9/ маємо

$$\begin{aligned} & |I - y^{(n)} f'(x^{(n)}) - \frac{1}{2} y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)})) (x^{(n)} - x^{(n)})| = \\ & = |\frac{1}{2} y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)})) (x^{(n)} - x^{(n)}) - (I - y^{(n)} f'(x^{(n)}))| \geq \\ & \geq |\frac{1}{2} y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)})) (x^{(n)} - x^{(n)})| - |I - y^{(n)} f'(x^{(n)})|. \end{aligned}$$

Далі отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)})) (x^{(n)} - x^{(n)})| - |I - y^{(n)} f'(x^{(n)})| = \\ & = \frac{1}{2} |y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)}))| |x^{(n)} - x^{(n)}| - |I - y^{(n)} f'(x^{(n)})|. \quad /10/ \end{aligned}$$

Оскільки $x^{(n)} = mid(x^{(n)})$, то

$$|x^{(n)} - x^{(n)}| = |x^{(n)} - mid(x^{(n)})| = \frac{\omega(x^{(n)})}{2} |[-1, 1]| = \frac{\omega(x^{(n)})}{2}.$$

Тоді з /10/ маємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)}))| |x^{(n)} - x^{(n)}| - |I - y^{(n)} f'(x^{(n)})| = \\ & = \frac{1}{2} |y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)}))| \frac{\omega(x^{(n)})}{2} - |I - y^{(n)} f'(x^{(n)})| = \\ & = \frac{1}{4} |y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)}))| \omega(x^{(n)}) - |I - y^{(n)} f'(x^{(n)})|. \quad /11/ \end{aligned}$$

Враховуючи позначення /8/, зі співвідношення /11/ дістаємо

$$|y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)}))| \leq 4(V^{(n)} + |I - y^{(n)} f'(x^{(n)})|) / \omega(x^{(n)}).$$

Позначаючи, через

$$\Delta^{(n)} = \|I - y^{(n)} f'(x^{(n)})\|, \quad \omega^{(n)} = \omega(x^{(n)}).$$

маємо

$$S^{(n)} = |y^{(n)} f''(x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)}))| \leq 4(V^{(n)} + \Delta^{(n)}) / \omega^{(n)}.$$

Інтервал, що є аргументом у другій похідній, задовольняє співвідношення /7/ леми, тобто містить x^* .

Якщо $x \in \Omega_n = O(x^{(n)}, \rho) = x^{(n)} + \frac{2}{3} [\theta_1'] (x^{(n)} - x^{(n)})$, тоді

$$|y^{(n)} f''(x)| \leq S^{(n)} \leq 4(V^{(n)} + \Delta^{(n)}) / \omega^{(n)}.$$

5. Алгоритм знаходження початкових наближень методу Ньютона інтервальним методом /5/-/6/.

1. Вибираємо $X^{(0)}, x^{(0)} = \text{mid}(X^{(0)})$.

2. Обчислимо $X^{(n+1)}, n=0,1,2,\dots$ за формулами /5/-/6/, доки не виконуватиметься умова $X^{(n+1)} \subset X^{(n)}, n=0,1,2,\dots$.

3. Знаходимо $g^{(n)} = \| \varphi^{(n)} f(x^{(0)}) \|$.

4. Шукаємо значення констант $V^{(n)} = |I - \varphi^{(n)} F'(X^{(n)})|;$
 $\Delta^{(n)} = \|I - \varphi^{(n)} f'(x^{(n)})\|$.

5. Отримуємо оцінку для другої похідної:

$$\bar{S}^{(n)} = 4(V^{(n)} + \Delta^{(n)}) / \omega^{(n)},$$

6. Знаходимо

$$h^{(n)} = \frac{\bar{S}^{(n)} g^{(n)}}{(1 - \Delta^{(n)})^2}.$$

7. Якщо $h^{(n)} \leq \frac{1}{2}$, то вистроюємо далі ітераційний метод Ньютона, обравши як початкове наближення точку $x^{(n)} \in X^{(n)}$. Інакше потрібно перейти до кроку 2.

Зуваження. Якщо методом /5/-/6/ отримуємо $X^{(n)} = \{\emptyset\}$, то це ознака того, що в даному інтервалі немає коренів. На кроці 2 може бути обчислений набір інтервалів, які локалізують різні корені рівняння, тому алгоритм потрібно виконувати доти, доки не вичерпається весь набір інтервалів.

6. Висновки. Отриманий алгоритм, для знаходження початкового наближення ітераційного методу Ньютона, яке гарантує виконання умов збіжності методу. Для оцінки $h^{(n)}$ майже не потрібні додаткові обчислення; вирази для оцінок $g^{(n)}, V^{(n)}, \bar{S}^{(n)}, \omega^{(n)}$ використовуються безпосередньо в самому методі /5/-/6/.

І. А л е ф е л ь д Г., Х е р ц б е р г е р Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 358 с. 2. В е н г е р - с к и й П.С., С е н ь о П.С. Интервальный метод решения систем нелинейных уравнений, базирующийся на предельных теоремах о среднем. Львов, 1990. 23 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 20.09.90; № 1612-Укр90. 3. К а н т о р о в и ч А.В., А к и л о в Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с. 4. С е н ь о П.С., В е н г е р с ь к и й П.С. Интервальный итерационный метод розв'язування нелінійних систем рівнянь, який не містить інверсій інтервальних матриць // Вісн. Львів.ун-ту. Сер.мех-мат. 1991. Вип. 35. С.18-24.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.94

В.Д.Вовк, І.І.Дияк, В.М.Макар

ПРОГРАМНИЙ КОМПЛЕКС
БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ
ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ НАГРІВІ

У даній роботі описаний програмний комплекс для сучасних ПЕОМ розв'язання двокритеріальної задачі оптимального проектування кусково-однорідних осесиметричних об'єктів з умови мінімуму термонапружень в їхніх елементах за мінімальної матеріаломісткості.

Термонапруження в об'єкті визначають розв'язанням задач статичної і квазістатичної термопружності, тобто за відомим розподілом температур у даний момент часу /квазістатична задача/ визначають деформації та напруження, зумовлені цим полем і силовим навантаженням [2]. Зв'язністю задачі, тобто впливом поля деформацій на поле температур нехтують.

З метою застосування методу скінченних елементів /МСЕ/ для чисельного розв'язання задачі теплопровідності [3] розглянемо еквівалентну їй варіаційну постановку:

$$(\dot{u}, v) + a(u, v) + \langle \alpha u_0, v \rangle = (\omega, v) + \langle \alpha u_c, v \rangle \quad /1/$$

$$\text{для } \forall v \in H_A, \tau \in]0, \tau^*],$$

$$(u, v)_{\tau=0} = (u_0, v) \quad \text{для } \forall v \in H_A. \quad /2/$$

Тут $u(x, \tau)$ – температура в точці $x \in R^2$ у момент часу τ

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} \in L_2(0, \tau^*);$$

H_A – енергетичний простір оператора задачі:

$$H_A = \{u(x, \tau) : u = 0, (x, \tau) \in \partial\Omega \times [0, \tau^*], u \in H^1(\Omega)\}.$$

$H^1(\Omega)$ – простір Соболева 1-го порядку;

$$a(u, v) = (Au, v) = - \int_{\Omega} \lambda \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

– скалярний добуток в H_A ; $\partial\Omega$ – частина границі області Ω із заданими однорідними умовами 1-го роду; ω – потужність внутрішніх джерел тепла; u_c – температура зовнішнього середовища; α – коефіцієнт теплообміну; u_0 – початковий розподіл температури в тілі.

© Вовк В.Д., Дияк І.І., Макар В.М., 1995

Апроксимацію Гальоркіна узагальненого розв'язку задачі /1/- /2/ шукаємо у вигляді

$$u_h(x, \tau) = \sum_{i=1}^N Q^i(\tau) \varphi_i(x), \quad /3/$$

де $\varphi_i(x)$ - базові функції на чотирикутниках сирендипового типу. У програмному комплексі використовують чотирикутники з чотирма та вісьмома вузлами [3]. У співвідношенні /3/ коефіцієнти розкладу є функціями часової координати $\tau \in [0, \tau^*]$. На основі напівдискретних апроксимацій Гальоркіна /3/, варіаційна задача /1/, /2/ зводиться до розв'язання нелінійної задачі Коші, яку в матричному вигляді можна подати

$$M(Q) \dot{Q}(\tau) + G(Q) Q(\tau) = F(\tau), \quad /4/$$

$$Q(0) = z, \quad /5/$$

Тут $Q(\tau) = (Q^1(\tau), \dots, Q^N(\tau))^T$ - вектор невідомих коефіцієнтів розкладу /3/. Компоненти векторів і матриць цієї системи визначаються співвідношеннями

$$M_{ij} = (c \varphi_i, \varphi_j),$$

$$G_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) + \langle \alpha \varphi_i, \varphi_j \rangle,$$

$$f_i = (\omega, \varphi_i) + \langle \alpha u_c, \varphi_i \rangle.$$

Задача Коші /4/, /5/ розв'язується з використанням процедури Кранка-Ніколсона-Гальоркіна, на основі якої на кожному часовому кроці методом Холецького розв'язується система лінійних алгебраїчних рівнянь /СЛАР/. За знайденими значеннями температури із допустимих переміщень пружного тіла, які належать до простору

$$\dot{H}_A = \{u = (u_1, u_2)^T : u_i = g_i, x \in \partial \Omega_i, u_i \in W_2^1(\Omega), i=1,2\},$$

переміщення, що відповідають положенню рівноваги, мінімізують функціонал Лагранжа [2]:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} u^T F d\Omega - \int_{\Gamma} \varepsilon^T D \varepsilon_{\tau} d\Gamma - \int_{\Gamma} u^T f d\Gamma. \quad /6/$$

Розв'язок задачі про мінімум функціоналу /6/ одержують за допомогою МСЕ з використанням апроксимацій на тій же СЕ сітці.

Задача про зниження рівня термонапружень, визначених із розв'язку задачі квазістатичної термопружності, в деякій підобласті кусково-однорідного осесиметричного об'єкта, полягає у визна-

ченні значень керуючих параметрів /геометричних розмірів/
 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, що задовольняють співвідношення [1]:

$$\Phi_k = \max_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \max_{x_1, x_2} \{ \sigma_{11}^{(k)}(\alpha), \sigma_{22}^{(k)}(\alpha), \sigma_{33}^{(k)}(\alpha) \} \rightarrow \min \quad /7/$$

за таких обмежень:

$$AT_{i+1}^{(2)} = BT_i^{(2)} + F^{(2)}; \quad /8/$$

$$Gu^{(k)} = R^{(k)}; \quad /9/$$

$$\varepsilon^{(k)} = Bu^{(k)}; \quad /10/$$

$$\sigma = D(\varepsilon^{(k)} - \varepsilon_T^{(k)}); \quad /11/$$

$$\alpha_i^* \leq \alpha_i \leq \alpha_i^{**}; \quad /12/$$

$$V_i^* \leq V_i \leq V_i^{**}. \quad /13/$$

Тут /8/ - СЛАР, до якої зводиться розв'язування задачі теплопровідності; /9/ - СЛАР, до якої зводиться розв'язування задачі термомпружності; /10/ - дискретна форма співвідношень Коші; /11/ - дискретна форма фізичних співвідношень; /12/ - обмеження на керуючі змінні; /13/ - функціональні обмеження на напруження та об'єми; k - індекс, що позначає розв'язок задачі статичної термомпружності $k = 1$, і квазістатичної термомпружності $k = 2$.

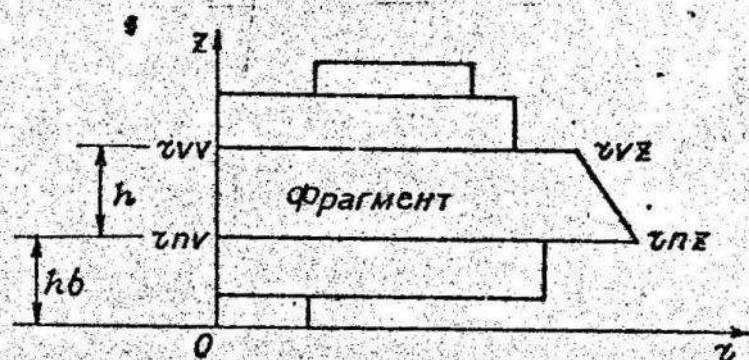
Як бачимо, сформульована задача оптимізації є двокритеріальною. Для її розв'язання використовується метод зондування простору, який дає змогу ефективно здійснювати розв'язування задачі в процесі діалогу з ЕОМ [4]. У ролі пробних точок у просторі параметрів використовуються точки рівномірно розподіленої послідовності / $\Lambda \Pi \tau$ - послідовності/.

Цілком очевидно, що основним інструментом оцінки якості та ефективності розроблених чисельних схем і алгоритмів є програмне забезпечення, створене на їх основі. Програми реалізації методів скінченних та граничних елементів, передбачають велику кількість арифметичних обчислень, що вимагає використання потужної обчислювальної техніки. Однак, враховуючи значне поширення, швидкий ріст продуктивності та зручність користування персональними комп'ютерами, вважаємо за доцільне використовувати їх для розв'язування прикладних інженерних задач такого класу.

Вищеописаний алгоритм реалізований у вигляді пакета прикладних програм "Тиран" /Тиристорний аналіз/. Цей пакет можна використовувати як зручний інструментарій для наукових розрахунків, а також як складову робочого місця конструктора.

У створенні промислового зразка програми важливе місце належить розробці "дружнього" інтерфейсу між користувачем і програмою. Він передбачає зручне і легке введення даних про задачу /геометричні розміри конструкції, термомеханічні характеристики матеріалів, параметри оптимізації/, можливість керування ходом її розв'язування та широкий вибір інструментарію для аналізу отриманих результатів. Важливе значення має *HELP* -підтримка всіх етапів розв'язування задачі. Усі вказані функції в ПІІ "Тиран" реалізовані в інтерактивному режимі.

Вважається, що осьовий перетин тиристора є набором трапецій, кожна з яких описує геометрію однієї зі складових пристрою /структури, основи, термокомпенсатора, припою тощо/. Вважаємо також, що основи трапецій паралельні між собою, тому геометрія кожного з *NSE* елементів тиристора визначається шістьма величинами: внутрішнім радіусом нижньої площини / z_{lv} /; зовнішнім радіусом нижньої площини / z_{lz} /; внутрішнім радіусом верхньої площини / z_{uv} /; зовнішнім радіусом верхньої площини / z_{uz} /; висотою / h /; висотою бази / h_b / /див. рисунок/. Ці ж геометричні параметри можна вважати параметрами оптимізації.



У результаті аналізу користувач одержує впорядковану за обома критеріями таблицю випробувань, яка може бути рекомендацією для інженера-проектувальника. Далі він може докладно проаналізувати бажані варіанти, підвищивши порядок апроксимації та оцінивши отержані значення на графіках, ізотермах або лініях однакових напружень.

І. Дияк І.І., Коссяк О.С., Савула Я.Г.,
Шинкаренко Г.А. Расчет и оптимизация термонапряжений
в паянных силовых полупроводниковых приборах // Теорет. электро-
техника. Львов, 1990. Вып. 48. С.24-28. 2. Ковален-
ко А.Д. Избранные труды. К.: Наук. думка, 1976. 762 с.
3. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекцион-
но-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с. 4. Соболев И.М.,
Святников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах
со многими критериями. М.: Наука, 1981. 110 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.94

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОГО ТА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ НА БАЗІ ПЕРСОНАЛЬНИХ КОМП'ЮТЕРІВ

Нехай Z і R - декартові координати довільної точки
евклідового простору R^2 за умови, що $R \geq 0$. Припустимо,
що інформація про геометрію зарядженого електрода подається
за допомогою параметричних рівнянь $Z = Z(\tau)$, $R = R(\tau)$ ($\alpha \leq \tau \leq \beta$),
які описують деяку незамкнену криву L , розташовану в пів-
площині $R \geq 0$. Ця крива є твірною певної циліндричної поверх-
ні S , на якій задається граничне значення потенціалу U_0 .
Електростатичне поле, утворене зарядженою поверхнею S , є
осесиметричним і цілком характеризується своїми значеннями в
точках півплощини $R \geq 0$. Припустимо також, що
 $Z(\tau), R(\tau) \in C^1[\alpha, \beta]$, як мінімум.

Відповідна математична модель, побудована на основі
теорії потенціалу, дає змогу подати поле в будь-якій точці
($\bar{Z}, \bar{R}$), $\bar{R} \geq 0$, за формулою [1, 6, 7]

$$U(\bar{Z}, \bar{R}) = \int_{\alpha}^{\beta} q(\tau) R(\tau) K(k) \{ [R(\tau) + \bar{R}]^2 + [Z(\tau) - \bar{Z}]^2 \}^{-1/2} M(\tau) d\tau, \quad //I/$$

де $q(\tau)$ - густина розподілу зарядів уздовж L ; $K(k) =$
 $= \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \gamma)^{-1/2} d\gamma$ - повний еліптичний інтеграл
першого роду, причому $k^2 = 4 R(\tau) \cdot \bar{R} \times$
 $\times \{ [R(\tau) + \bar{R}]^2 + [Z(\tau) - \bar{Z}]^2 \}^{-1}$,

а
 $M(\tau) = \{ [Z'(\tau)]^2 + [R'(\tau)]^2 \}^{1/2}$,

Невідома функція $q(\tau)$ визначається з інтегрального рівняння /1/

$$Aq \equiv \int_{\alpha}^{\beta} q(\tau) R(\tau) K(\tau, \bar{\tau}) T^{-1}(\tau, \bar{\tau}) M(\tau) d\tau = U_0, \quad /2/$$

де

$$T(\tau, \bar{\tau}) = \{[R(\tau) + R(\bar{\tau})]^2 + [Z(\tau) - Z(\bar{\tau})]^2\}^{1/2}, \quad \bar{\tau} \in [\alpha, \beta];$$

$$K(\tau, \bar{\tau}) = P(\tau, \bar{\tau}) - Q(\tau, \bar{\tau}) \ln \eta \equiv \sum_{l=0}^4 a_l \eta^l - \ln \eta \sum_{l=0}^4 b_l \eta^l -$$

відома апроксимація повного еліптичного інтеграла першого роду /4/, причому

$$\eta = T^{-2}(\tau, \bar{\tau}) \{[R(\tau) - R(\bar{\tau})]^2 + [Z(\tau) - Z(\bar{\tau})]^2\}.$$

В аналізі задачі /2/ важливо з'ясувати тип ІР. Це допомагає вирішити питання розв'язності, що в свою чергу диктує вибір алгоритму наближеного розв'язування /2/ та визначає характер апроксимацій шуканої густини $q(\tau)$. Неважко переконатися в тому, що /2/ зводиться до сингулярного ІР першого роду з логарифмічною особливістю в ядрі:

$$(L+W)q \equiv \int_{\alpha}^{\beta} q(\tau) \left[\ln \frac{1}{|\tau - \bar{\tau}|} + W(\tau, \bar{\tau}) \right] d\tau = U(\bar{\tau}) \quad /3/$$

$(\alpha < \bar{\tau} < \beta)$

де

$$U(\tau) = U_0 \delta_0^{-1} M^{-1}(\tau); \quad W(\tau, \bar{\tau}) = \delta_0^{-1} M^{-1}(\bar{\tau}) \{ \delta_0 M(\bar{\tau}) - 2D(\tau, \bar{\tau}) Q(\tau, \bar{\tau}) \ln |\tau - \bar{\tau}| + D(\tau, \bar{\tau}) [P(\tau, \bar{\tau}) + Q(\tau, \bar{\tau}) \ln \frac{(\tau - \bar{\tau})^2}{\eta}] \},$$

причому $D(\tau, \bar{\tau}) = R(\tau) M(\tau) T^{-1}(\tau, \bar{\tau})$.

Тут $W(\tau, \bar{\tau}) \in C([\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta])$, оскільки $\lim_{\tau \rightarrow \bar{\tau}} W(\tau, \bar{\tau}) = \delta_0 M(\bar{\tau}) \{ a_0 + 2\delta_0 \ln [2R(\bar{\tau}) M^{-1}(\bar{\tau})] \}$ за умови $M(\bar{\tau}) \neq 0$, $\alpha < \bar{\tau} < \beta$.

Досліджувати розв'язність ІР /3/ можна в різних функціональних просторах, але у всіх випадках потрібно враховувати сингулярну поведінку шуканого розв'язку в околі кінців розімкненої кривої L . Розглянемо розв'язок /3/ у просторі $H_{\mu}^*(\alpha, \beta)$ ($0 < \mu \leq 1$) функцій, які зображаються у вигляді

$$q(\tau) = q^*(\tau) / \hat{R}(\tau), \quad /4/$$

причому $q^*(\cdot) \in H_\mu([\alpha, \beta])$ /клас Гельдера з показником μ а $\hat{R}(\tau) = (\tau - \alpha)^n (\beta - \tau)^m$ ($0 \leq n, m < 1$).

Враховуючи, що оператор A діє з банахового простору $H_\mu^*(\alpha, \beta)$ в банахів простір $H_{\mu+1}^*(\alpha, \beta)$, до якого належать функції, похідні яких мають властивість аналогічну до /4/. У частинному випадку, коли $n = m = 0,5$ для впроваджених просторів використовують позначення $\tilde{H}_\mu(\alpha, \beta)$, $\tilde{H}_\mu^1(\alpha, \beta)$ відповідно.

Відомо [5], що оператор $L: \tilde{H}_\mu(\alpha, \beta) \rightarrow \tilde{H}_\mu^1(\alpha, \beta)$ за умови $0 < \mu < 0,5$; $|\beta - \alpha| \neq 4$ є неперервно оборотним. Разом із компактністю оператора W це приводить до фредгольмовості A . Таким чином, питання розв'язності IP /3/ вирішується в рамках теорії Фредгольма. Властивості операторів L і W дають змогу одержати IP Фредгольма другого роду:

$$(I + L^{-1}W)q = L^{-1}U \quad /5/$$

з компактним оператором $L^{-1}W$, яке еквівалентне /3/. Таке зображення є корисним для /3/, з міркувань як теорії, так і з чисельного аналізу. Однак під час побудови наближеної схеми розв'язання /5/ виникають проблеми технічного характеру внаслідок складності операторів $L^{-1}W$ та L^{-1} . Тому, на нашу думку, доцільно застосовувати до /3/ метод саморегуляризації, що дає змогу наближено одержати набагато простіше IP другого роду.

Повернемося до IP /2/. Під час аналізу реальних електронно-оптичних систем граничні значення потенціалу задають на сукупності кривих $\{L_j\}_{j=1}^M$, а IP типу /2/ подають у вигляді

$$AQ \equiv \sum_{j=1}^M \int_{\alpha_j}^{\beta_j} q_j(\tau) R_j(\tau) K_{ji}(\tau, \bar{\tau}) T^{-1}(\tau, \bar{\tau}) M_j(\tau) d\tau = U_0^{(i)} \quad /6/$$

($i = 1, 2, \dots, M$)

Тут $U_0^{(i)}$ - граничне значення потенціалу на i -й кривій;

$$T_{ji}(\tau, \bar{\tau}) = \left\{ [R_j(\tau) + R_i(\bar{\tau})]^2 + [Z_j(\tau) - Z_i(\bar{\tau})]^2 \right\}^{1/2};$$

$Z = Z_j(\tau)$, $R = R_j(\tau)$ ($\alpha_j \leq \tau \leq \beta_j$) - параметричні рівняння, що описують криву L_j ($j = 1, 2, \dots, M$);

$\{Z_i(\bar{\tau}), R_i(\bar{\tau})\}$ - деяка фіксована точка на кривій

$$L_i(\alpha_i < \bar{\tau} < \beta_i); \quad M_j(\tau) = \left\{ [Z_j'(\tau)]^2 + [R_j'(\tau)]^2 \right\}^{1/2};$$

$$K_{ji}(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{l=0}^4 a_l \eta_{ji}^l - \ln(\eta_{ji}) \sum_{l=0}^4 b_l \eta_{ji}^l,$$

причому

$$\eta_{ji} = \{ [R_j(\tau) - R_i(\bar{\tau})]^2 + [Z_j(\tau) - Z_i(\bar{\tau})]^2 \} \tau_{ji}^{-2}(\tau, \bar{\tau}).$$

Розв'язком IP /6/ є Q - густина розподілу зарядів вздовж сукупності кривих $\{L_j\}_{j=1}^M$, тобто $Q = \{q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_M(\tau)\}$, або інакше, $Q/L_j = q_j(\tau)$, де $\tau \in [\alpha_j, \beta_j]$.

Враховуючи попередні міркування, шукатимемо функції $q_j(\tau)$ у вигляді

$$q_j(\tau) = q_j^*(\tau) (\tau - \alpha_j)^{n_j} (\beta_j - \tau)^{m_j}; \tau \in [\alpha_j, \beta_j]; 0 \leq n_j, m_j < 1,$$

де $q_j^*(\tau) \in H_\mu([\alpha_j, \beta_j])$. Нехай, відповідно до [1], величини n_j характеризує сингулярну поведінку розв'язку в околі першої критичної точки кривої L_j , і вважаємо n_j початком L_j ; m_j відповідає крайній точці на кінці L_j . Приймемо, що n_j та m_j дорівнюють 0,5, якщо крива L_j своїми кінцями не торкається сусідніх. Якщо ж заряджена поверхня має злам, то її подають як таку, що складається із двох, а характер відповідних сингулярностей визначають таким чином:

$$m_j = n_{j+1} = (\pi - \omega_j \pi) / (2\pi - \omega_j \pi),$$

причому ω_j - кут, утворений дотичними до кривих L_j, L_{j+1} у спільних точках.

Далі відповідно до основної ідеї методу саморегуляризації [2, 3, 8], спеціальним чином локалізуювши особливість в ядрі IP /3/, а також зробивши апріорне припущення про те, що функція

$$\Delta_i(\tau) = q_i(\tau) (\tau - \alpha_i)^{n_i} (\beta_i - \tau)^{m_i}$$

мало змінюється на достатньо малому відрізку довжини h , одержимо IP другого роду:

$$\Delta_i(\bar{\tau}) G_i(\bar{\tau}) + \sum_{j=1}^M \int_{\alpha_j}^{\beta_j} q_j(\tau) N_{ji}(\tau, \bar{\tau}) d\tau = U_0^{(i)} \quad (7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, M),$$

де $G_i(\bar{\tau})$ - лінійна комбінація відносно простих одновимірних невластних інтегралів; $N_{ji}(\tau, \bar{\tau})$ - неперервні за обома змінними функції, причому у випадку $i \neq j$ вони просто збігаються з ядрами IP /6/. Зауважимо, також, що при $h \ll 1$ величина $G_i(\bar{\tau})$, незалежно від $\bar{\tau}$, веде себе як $1/h \cdot \ln h$.

При формулюванні проблеми розрахунку осесиметричного електростатичного поля у вигляді ІР /6/ останнє допускає просту модифікацію, коли сукупність кривих $\{L_j\}_{j=1}^M$ має симетрію в розташуванні відносно осі OR обраної системи координат ZR . При цьому передбачається також наявність відповідної симетрії у поданні граничних умов. Аналог ІР /6/ у такій ситуації може мати вигляд

$$\sum_{j=1}^{M^*} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} q_j(\tau) R_j(\tau) [K_{ji}(\tau, \bar{\tau}) T_{ji}^{-1}(\tau, \bar{\tau}) + k_j \hat{R}_{ji}(\tau, \bar{\tau}) \hat{T}_{ji}^{-1}(\tau, \bar{\tau})] M_j(\tau) d\tau = U_0^{(i)} \quad (M^* < M; i = 1, 2, \dots, M),$$

де

$$\hat{T}_{ji}(\tau, \bar{\tau}) = \{[R_j(\tau) + R_i(\bar{\tau})]^2 + [Z_j(\tau) + Z_i(\bar{\tau})]^2\}^{1/2},$$

$\hat{K}_{ji}(\tau, \bar{\tau})$ обчислюється аналогічно $K_{ji}(\tau, \bar{\tau})$ з тою відмінністю, що

$$\eta_{ji} = \{[R_j(\tau) - R_i(\bar{\tau})]^2 + [Z_j(\tau) + Z_i(\bar{\tau})]^2\} / \hat{T}_{ji}^2(\tau, \bar{\tau}).$$

Коефіцієнт k_j зі значеннями ± 1 показує наявність симетричності до L_j кривої відносно осі OR , за відсутності симетрії $k_j = 0$.

Для наближеного розв'язування ІР /7/ використаємо метод Боголюбова-Крилова. Розбиваючи кожний інтервал інтегрування на N_j^* рівних частин та вибираючи контрольні точки посередині кожного підінтервалу, для визначення невідомих значень густини одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^{N_j^*} q_t^{(j)} A_{k,t}^{(i,j)} = U_0^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, N_i^*),$$

де

$$A_{k,t}^{(i,j)} = \Delta_j(\tau_t^{(j)}) \int_{\tau_t^{(j)} - h_j}^{\tau_t^{(j)} + h_j} \frac{N_{ji}(\tau, \bar{\tau}_k)}{\Delta_j(\tau)} d\tau + \delta_{k,t}^{(i,j)} \Delta_i(\bar{\tau}_k) \sigma_i(\bar{\tau}_k), \quad /8/$$

причому $h_j = (\beta_j - \alpha_j) / 2N_j^*$; $\delta_{k,t}^{(i,j)}$ - символ Кронекера;
 $q_t^{(j)}$ - наближені значення шуканої густини в точках $\tau_t^{(j)} =$
 $= \alpha_j + h_j (2t - 1)$; $\tau_k = \alpha_i + h_i (2k - 1)$ - точки
задоволення граничних умов. Інтеграли в /8/ обчислюються за
звичайними квадратурними формулами з потрібною точністю.

Важливим моментом у розв'язуванні IP /7/ є оцінка точнос-
ті отриманого розв'язку. Цю оцінку виконують апостеріорно
[6, 7].

Після знаходження густини розподілу зарядів уздовж кривих
 L_j ($j = 1, 2, \dots, M$) потенціал осесиметричного електростатичного
поля в довільній точці $(\bar{z}, \bar{r})$ півплощини $R \geq 0$ можна
визначити за формулою

$$U(\bar{z}, \bar{r}) = \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^{N_j^*} q_t^{(j)} \Delta_j(\tau_t^{(j)}) \int_{\tau_t^{(j)} - h_j}^{\tau_t^{(j)} + h_j} R_j(\tau) \bar{r}_j(\tau) M_j(\tau) \cdot \bar{\Delta}_j^{-1}(\tau) \bar{\tau}^{-1}(\tau) d\tau, \quad /9/$$

де $\bar{\tau}_j(\tau) = 2[R(\tau)\bar{r}]^{1/2} / k$,

$$\bar{r}_j(\tau) = \sum_{l=0}^4 a_l \bar{\eta}_j^l - \ln(\bar{\eta}_j) \sum_{l=0}^4 b_l \bar{\eta}_j^l,$$

причому

$$\bar{\eta}_j = \{[R_j(\tau) - \bar{r}]^2 + [Z_j(\tau) - \bar{z}]^2\} / \bar{\tau}_j^2(\tau).$$

Далі, виконуючи диференціювання виразу в правій частині
формули /9/ відповідно по $\bar{z}$ та $\bar{r}$, отримуємо, з точністю
до знака, компоненти вектора напруженості. Наведемо лише пер-
шу компоненту.

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^{N_j^*} q_t^{(j)} \Delta_j(\tau_t^{(j)}) \int_{\tau_t^{(j)} - h_j}^{\tau_t^{(j)} + h_j} R_j(\tau) [Z_j(\tau) - \bar{z}] \times$$

$$\times \bar{E}_j(\tau) \bar{\Delta}_j^{-1}(\tau) \bar{\tau}_j^{-3}(\tau) \bar{\eta}_j^{-1} M_j(\tau) d\tau, \quad /10/$$

де $\bar{E}_j(\tau)$ - апроксимація повного еліптичного інтеграла
другого роду згідно з формулою [4]:

$$\bar{E}_j(\tau) = 1 + \sum_{l=0}^4 \rho_l \bar{\eta}_j^l - \ln(\bar{\eta}_j) \sum_{l=0}^4 f_l \bar{\eta}_j^l.$$

Зауважимо, що під час визначення $\partial U / \partial \bar{z}$ у безпосе-
редній близькості кривої L_j істотно знижується точність наб-
лиженого обчислення відповідного інтеграла у формулі /10/, що
пояснюється різким зростанням похідної підінтегральної функ-
ції. Для поліпшення ситуації до підінтегрального виразу засто-
совують згладжувальний множник H^2 , який дорівнює квадра-
тові відстані точки з координатами $(\bar{z}, \bar{r})$ до кривої L_j .

Після застосування квадратурного правила до такого "нерегулярного" інтеграла залишається просто поділити результат на n^2 .

Описані в даній роботі алгоритми послужили математичною основою відповідного програмного забезпечення для розрахунку електростатичних полів осесиметричних електронно-оптичних систем /ЕОС/ на базі персонального комп'ютера IBM PC/AT. Мова програмування - фортран-77. Створений комплекс здатний розв'язувати широке коло практичних задач і забезпечує діалоговий режим експлуатації.

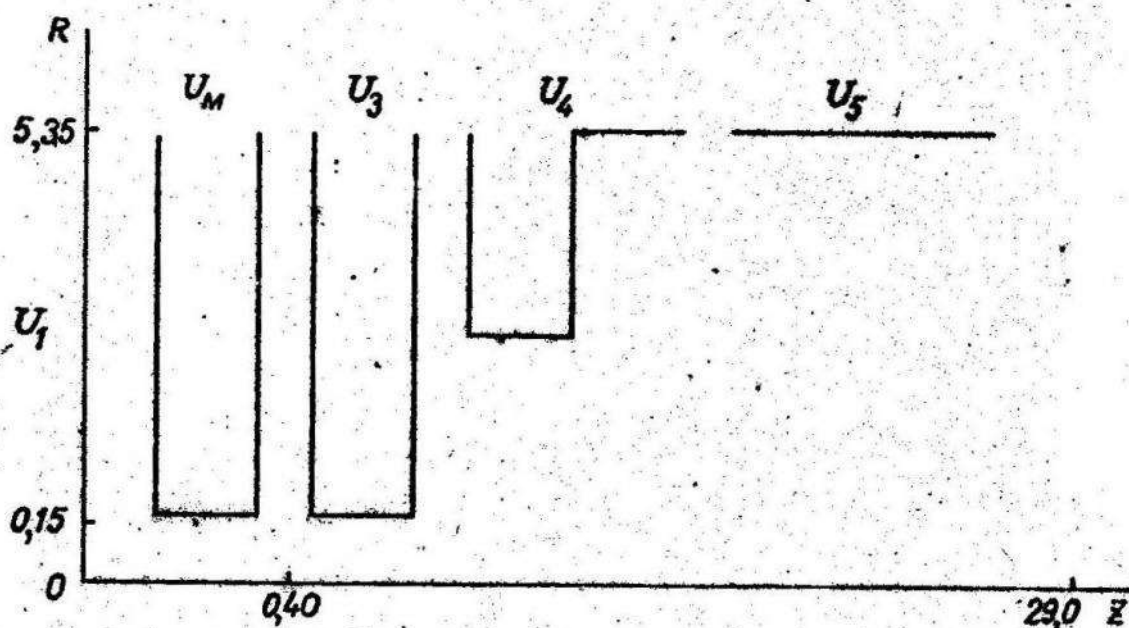


Рис. 1.

Одна з реальних ЕОС подана на рис. 1. Подібні системи застосовують для проектування нових електронно-променевих приладів. Їх аналіз проводять з метою оцінки та поліпшення електронно-оптичних характеристик систем формування та фокусування. Дана ЕОС моделюється за допомогою одинадцяти відрізків прямих, що об'єднуються в чотири джерела, на яких задані різні потенціали. Врахування симетрії у розташуванні ЕОС відносно осі OR забезпечує нульове значення потенціалу на катоді ($U_1 = 0$). Характерними ознаками даної ЕОС є малі відстані між джерелами, а також істотні відмінності у значеннях потенціалів на джерелах. Скажімо, на модуляторі

задається значення потенціалу $U_M = -5$, тоді як на інших джерелах потенціали розподілені так: $U_3 = 500$, $U_4 = 650$, $U_5 = 10000$.

Для розрахунку поля, створеного такою ЕОС, використовуються розв'язки так званих базових задач, коли на кожному із джерел послідовно задається значення потенціалу, що дорівнює одиниці, а на решті — нулі. Тоді для розрахунку конкретного поля потрібно лише утворити лінійну комбінацію розв'язків базових задач. Легко бачити, що в нашій ситуації таких задач є чотири.

Цей спосіб подання поля найефективніший, оскільки дає змогу для фіксованої геометрії ЕОС розв'язувати ІР лише один раз, незважаючи на конкретні значення потенціалів на електродах.

Рис. 2 Ілюструє розподіл потенціалу в околі катоду та модулятора. Розроблений комплекс програм забезпечує також розрахунок напруженостей осесиметричного електростатичного поля та потенціалу зашкрання.

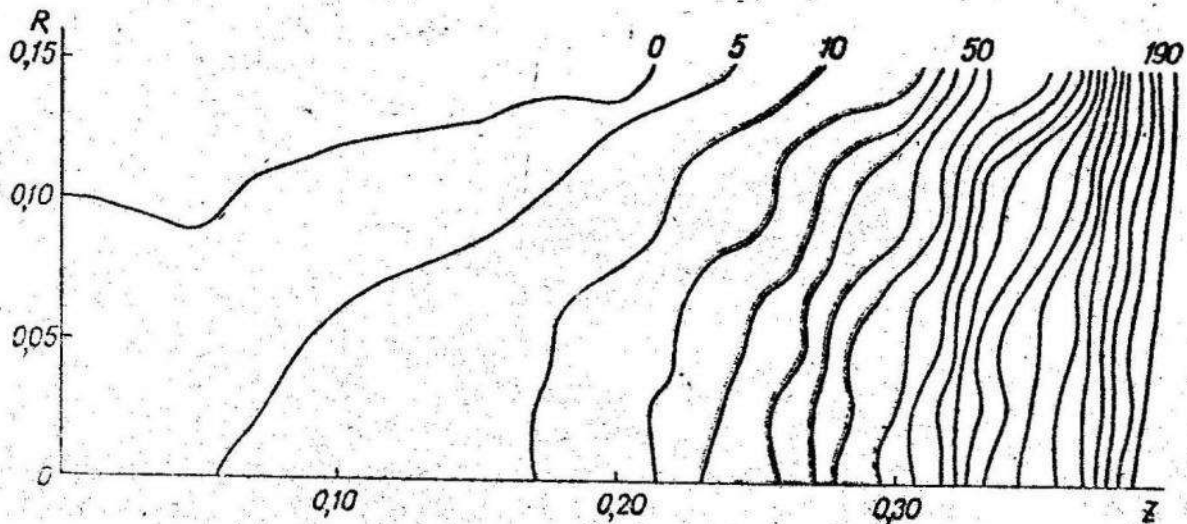


Рис. 2.

Наприкінці відзначимо, що використання сучасних засобів обчислювальної техніки у поєднанні з продуманим математичним забезпеченням дає змогу будувати ефективні розв'язки задач моделювання реальних фізичних явищ.

І. Антоненко О.Ф. Численное решение интегрального уравнения I-го рода для задачи Дирихле в случае тел вращения // Мат. пробл. геофизики. Новосибирск, 1969. Вып. I. С. 202-211.
2. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987. 167 с.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений среднего рода I-го рода // Вычисл. методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1968. Вып. 10. С. 49-54.
4. Дымарский А.С., Лозинский Н.Н., Макушкин А.Т. Справочник программиста: В 2 т. Л.: Судпромгиз, 1963. Т. I. 628 с.
5. Ильинский А.С., Шенгелов Ю.В. Применение методом спектральной теории в задачах распространения волн. М.: Изд-во МГУ, 1989. 184 с.
6. Лядкевич И.В., Гордийчук В.И., Бакалец В.А., Маринюк Л.О. Численное решение пространственных задач теории потенциала. Львов: МГУ, 1979. 116 с.
7. Лядкевич И.В., Остудин Б.А. Численное решение граничных задач теории потенциала в электронной оптике методом саморегуляризации. Львов, 1983. 43 с. Рукопись деп. в УкрНИНТИ 23.II.83, № 1455Ук-183.
8. Тихонов А.Н., Дмитриев В.И. Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы // Вычисл. методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1968. Вып. 10. С. 3-8.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.94

УДК 519.6

Б.М.Голуб, Ю.П.Оліярник

ТУНЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ПОШУКУ ГЛОБАЛЬНОГО МІНІМУМУ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ

У даній статті розглядається метод пошуку глобального мінімуму неперервної функції $F(x)$ на компактній множині $X \subset R^n$.

1. Тунельна функція. Нехай $x_1^* \in X$ — деяка ізольована точка мінімуму функції $F(x)$. Для пошуку точок x , в яких $F(x) < F(x_1^*)$ у праці [1] запропоновано використовувати допоміжну функцію:

$$P(x, z, \rho) = \frac{1}{F(x) + z} e^{-|x - x_1^*|^2 / \rho^2}, \quad (1)$$

де $F(x) + z > 0$ для всіх $x \in X$. Функцію $P(x, z, \rho)$ називають тунельною, або наповнювальною.

© Голуб Б.М., Оліярник Ю.П., 1995

Позначимо $D = \min_{x \in S_1} \|x - x_i^*\|$, де
 $S_1 = \{x \in X : F(x_i^*) < F(x_i^* + \alpha(x - x_i^*)) < F(x_i^* + \beta(x - x_i^*)) < F(x), 0 < \alpha < \beta < 1\}$.

Припустимо, що множина $\partial F(x)$ субдиференціалів функції $F(x)$ обмежена на X і

$$L = \max_{x \in X} \|\partial F(x)\|.$$

Нехай параметри τ та ρ підібрані таким чином, що виконується нерівність

$$\frac{\rho^2}{\tau + F(x_i^*)} \leq \frac{2DC_1}{L}, \quad /2/$$

де C_1 - деяка константа, $0 < C_1 < 1$. Тоді [2] функція $P(x, \tau, \rho)$ не має стаціонарних точок на множині

$$A = \{x \in X : F(x) \geq F(x_i^*)\} \setminus \{x_i^*\}.$$

Таким чином, якщо відношення $\rho^2 / (\tau + F(x_i^*))$ вважати достатньо малим /щоб виконувалося /2// і застосувати деякий релаксійний алгоритм локальної мінімізації з початкової точки поблизу x_i^* , то траєкторія спуску або виходить з множини X , або збігається до точки $\bar{x} \notin A$.

З іншого боку, якщо τ та ρ підібрані так, що

$$0 < \frac{\rho^2}{\tau + F(x_i^*)} < C_0 < \frac{2DC_1}{L},$$

де C_0 - деяка константа [2], то функція $P(x, \tau, \rho)$ не має стаціонарних точок на всій множині $X \setminus \{x_i^*\}$.

В отриманому варіанті тунельного методу основною проблемою є вибір параметрів τ та ρ який забезпечує виконання нерівності

$$C_0 < \rho^2 / (\tau + F(x_i^*)) < 2DC_1 / L, \quad /3/$$

тим паче, що значення констант C_0, C_1, D та L , як правило, невідомі.

2. Модифікована наповнювальна функція. Нехай x^* - точка глобального мінімуму функції $F(x)$ на X і $F^* = F(x^*)$. Св'язатимемо задачу оптимізації розв'язану з точністю $\varepsilon > 0$ за значенням функції, якщо знайдемо точку $x_\varepsilon^* \in X$ таку, що $F(x_\varepsilon^*) \leq F^* + \varepsilon$.

Розглянемо модифіковану наповнювальну функцію

$$R(x, \rho) = \frac{1}{F(x) - F_i^* + \varepsilon} e^{-\|x - x_i^*\|^2 / \rho^2},$$

де $F_i^* = F(x_i^*)$, x_i^* - деяка точка локального мінімуму.

Очевидно, що

$$x_i^* = \arg \max_x R(x, \rho).$$

Теорема. Якщо

$$\rho^2 < \frac{2\bar{D}\varepsilon}{L},$$

/4/

де $\bar{D} = \min \{1, D\}$, то функція $R(x, \rho)$ не має стаціонарних точок на множині A .

Доведення. Нехай $\bar{x} \in A$.

Позначимо

$$\tilde{R}(\alpha) = R(\bar{x} + \alpha(x_i^* - \bar{x}), \rho),$$

$$G(\alpha) = F(x + \alpha(x_i^* - \bar{x})) - F_i^* + \varepsilon.$$

Розглянемо різницю $\tilde{R}(\alpha) - \tilde{R}(0)$:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\alpha) - \tilde{R}(0) &= \frac{1}{G(\alpha)} e^{-(1-\alpha)^2 \|x_i^* - \bar{x}\|^2 / \rho^2} - \frac{1}{G(0)} e^{-\|x_i^* - \bar{x}\|^2 / \rho^2} = \\ &= \frac{G(\alpha) - G(0)}{G(\alpha)G(0)} e^{-\|x_i^* - \bar{x}\|^2 / \rho^2} + \frac{1}{G(0)} [e^{-(1-\alpha)^2 \|x_i^* - \bar{x}\|^2 / \rho^2} - e^{-\|x_i^* - \bar{x}\|^2 / \rho^2}]. \end{aligned}$$

Розділимо ліву та праву частини на $\alpha > 0$ та спрямуємо α до $+0$. У результаті отримаємо

$$R'(\bar{x}; x_i^* - \bar{x}) = \left(-\frac{F'(\bar{x}; x_i^* - \bar{x})}{G(0)} + \frac{2\|x_i^* - \bar{x}\|}{\rho^2} \right) \frac{1}{G(0)} e^{-\|x_i^* - \bar{x}\|^2 / \rho^2}, \quad /5/$$

де $R'(\bar{x}; x_i^* - \bar{x})$ та $F'(\bar{x}; x_i^* - \bar{x})$ - похідні по напрямку $x_i^* - \bar{x}$ функцій $R(x, \rho)$ та $F(x)$ в точці $\bar{x}$.

Припустимо, що $R'(\bar{x}; x_i^* - \bar{x}) \leq 0$. Тоді з /5/ випливає

$$2\|x_i^* - \bar{x}\| / \rho^2 \leq F'(\bar{x}; x_i^* - \bar{x}) / G(0).$$

Оскільки $F'(\bar{x}; x_i^* - \bar{x}) = \max_{a \in \partial F(\bar{x})} \langle a, x_i^* - \bar{x} \rangle \leq L\|x_i^* - \bar{x}\|$, то далі отримаємо

$$2\|x_i^* - \bar{x}\| G(0) \leq \rho^2 L\|x_i^* - \bar{x}\|$$

або, з урахуванням /4/,

$$G(0) < \bar{D}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

/6/

Оскільки $G(0) = F(\bar{x}) - F_i^* + \varepsilon \geq \varepsilon$, то з /6/ отримаємо протиріччя. А тому

$$R'(\bar{x}; x_i^* - \bar{x}) > 0.$$

/7/

Аналогічно можна показати, що

$$R'(\bar{x}; \bar{x} - x_i^*) = -\left(\frac{F'(\bar{x}; \bar{x} - x_i^*)}{G(0)} + \frac{2\|\bar{x} - x_i^*\|}{\rho^2} \right) \frac{1}{G(0)} e^{-\|\bar{x} - x_i^*\|^2 / \rho^2} \quad /8/$$

Припустимо, що $R'(\bar{x}; \bar{x} - x_1^*) \geq 0$. Тоді з /8/ випливає

$$2\|\bar{x} - x_1^*\|G(0) \leq \rho^2 |F'(\bar{x}; \bar{x} - x_1^*)|.$$

З цієї нерівності легко отримати протиріччя типу $\varepsilon < \varepsilon$.
Отже

$$R'(\bar{x}; \bar{x} - x_1^*) < 0. \quad /9/$$

З означення похідної за напрямом та нерівностей /6/, /9/, випливає, що функція $R(\bar{x} + \alpha(x_1^* - \bar{x}), \rho)$ є строго монотонно спадною в околі точки $\bar{x}$. Отже, точка $\bar{x}$ не є точкою мінімуму. А оскільки /6/ і /9/ – строгі нерівності, то $\bar{x}$ не може бути також сідловою точкою.

Теорема доведена.

Припустимо, що множина $B = \{x \in X : F(x) \leq F_1^* - \varepsilon\}$ непорожня. Тоді на границі множини B функція $R(x, \rho) = \infty$. Звідси випливає існування стаціонарних точок функції $R(x, \rho)$ на X для довільного ρ .

Зауважимо, що на відміну від /3/, в оцінці /4/ для ρ^2 відома нижня границя.

3. Алгоритм глобальної мінімізації. Сформулюємо алгоритм пошуку глобального мінімуму неперервної функції $F(x)$ на множині X , використовуючи модифіковану наповнювальну функцію $R(x, \rho)$.

Виберемо числа $\rho_0, 0 < \gamma < 1, \delta > 0, \varepsilon > 0$ та початкову точку $x_0 \in X$. Прийmemo $\rho = \rho_0$.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка $x_k \in X$ вже обчислена.

1. Оберемо за початкову точку x_k та застосуємо деякий релаксаційний метод локального пошуку екстремуму. Отримаємо точку мінімуму x_k^* .

2. За допомогою деякого методу локальної оптимізації шукаємо стаціонарну точку на множині X функції

$$R(x, \rho) = \frac{1}{F(x) - F(x_k^*) + \varepsilon} e^{-\|x - x_k^*\|^2 / \rho^2}.$$

За початкові можна вибрати точки $y_i = x_k^* \pm \delta e_i, i = \overline{1, n}$, де e_i – i -й орт. Пошук припиняємо, якщо знайдена така точка, що задовольняється одна з умов:

- а/ $\bar{x}_k$ – стаціонарна точка;
- б/ $R(\bar{x}_k, \rho) < 0$;
- в/ $R(\bar{x}_k, \rho) > R(x_k^*, \rho)$;
- г/ $F(\bar{x}_k) < F(x_k^*)$.

Якщо точка $\bar{x}_k$ не знайдена, то слід перейти до кроку 4.

3. Якщо $F(\bar{x}_k) \geq F(x_k^*)$, то приймаємо $\rho = \gamma\rho$ та переходимо до кроку 2. У протилежному випадку приймаємо $x_{k+1} = \bar{x}_k$, $k = k + 1$ та переходимо до кроку 1.

4. Вважаємо x_k^* точкою глобального мінімуму і припиняємо роботу алгоритму.

Враховуючи теоретичні властивості функції $R(x, \rho)$, легко бачити, що за скінченну кількість кроків алгоритм згенерує точку x_k^* таку, що $F(x_k^*) < F^* + \varepsilon$ /при відповідній точності розв'язування задач локальної оптимізації/.

1. Ge R.P. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables // Presented at the Dundee Conference on Numerical Analysis, Dundee, Scotland, 1983.

2. Ge R.P. The theory of filled function method for finding global minimizers of nonlinearly constrained minimization problems // J. of Computational Mathematics, 1987. Vol. 5. №1. P.1-9.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.94

УДК 519.6

В.М.Голуб, Ю.М.Щербина

РЕЛАКСАЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ КВАЗІНЬЮТОНОВОЇ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

1. Постановка проблеми. Розглянемо задачу оптимізації:

$$\min_{x \in R^n} \{f_0(x) : f_i(x) \leq 0, i \in J = \{1, 2, \dots, m\}\}, \quad /I/$$

де $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ - достатньо гладкі функції.

Для пошуку мінімуму функції $f_0(x)$ при заданих обмеженнях у праці [2] запропонована квазіньютонова модифікація методу лінеаризації Пшеничного, яка показала високу ефективність під час розв'язування широкого класу тестових та практичних задач.

У разі виконання певних умов, накладених на функції $f_i(x)$ доведена [2] надлінійна швидкість збіжності послідовності $\{x_k\}$, яку генерує квазіньютонова модифікація методу лінеаризації, до точки мінімуму задачі /I/.

Однак надлінійну швидкість збіжності вдається досягнути, взагалі кажучи, за рахунок втрати релаксаційності алгоритму по

© Голуб В.М., Щербина Ю.М., 1995

точній штрафній функції:

$$\Phi_N(x) = f_0(x) + NF(x),$$

де $N > 0$ - достатньо велике число; $F(x) = \max\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\}$.

2. Побудова алгоритму. Сформулюємо квазіньютонів алгоритм методу лінеаризації зі строго монотонним спаданням функції $\Phi_N(x)$.

Позначимо

$$J_\delta(x) = \{i \in J: f_i(x) \geq F(x) - \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Поставимо у відповідність точці x такі задачі квадратичного програмування:

$$\min_p \{ \langle f'_0(x), p \rangle + \frac{1}{2} \langle p, Ap \rangle : \langle f'_i(x), p \rangle + f_i(x) \leq 0, i \in J_\delta(x) \}, \quad /2/$$

$$\min_y \{ \frac{1}{2} \|y\|^2 : \langle f'_i(x), y \rangle + f_i(x+p) \leq 0, i \in J_\delta(x) \}, \quad /3/$$

де A - симетрична додатно означена матриця, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярний добуток векторів, $\|y\|^2 = \langle y, y \rangle$.

Позначимо розв'язки та множники Лагранжа задач /2/ і /3/ відповідно через $p(x)$, $u^i(x)$ та $y(x)$, $v^i(x)$, $i \in J_\delta(x)$.

Матрицю A для допоміжної задачі /2/ будемо за правилом [2].

Нехай матриця A_k відома. Обчислимо матрицю $\bar{A}_{k+1}$ за формулою

$$\bar{A}_{k+1} = A_k + \Delta A_k, \quad /4/$$

де ΔA_k - поправкова квазіньютонівська матриця [2].

За допомогою модифікованого LDL^T розклад Холезького [2] будемо додатно означену матрицю A_{k+1} :

$$A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} L_{k+1}^T = \bar{A}_{k+1} + E_{k+1}, \quad /5/$$

де E_{k+1} і D_{k+1} - невід'ємні діагональні матриці, L_{k+1} - одинична нижня трикутна матриця.

Позначимо через I_n одиничну матрицю порядку n .

Нехай вибрані числа $N > 0$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < 1/2$, $S \gg 1$ та початкове наближення x_0 . Прийmemo $A_0 = I_n$.

Опишемо загальний крок алгоритму. Припустимо, що точка x_k та матриця A_k вже побудовані.

1. Розв'язуючи задачу /2/ при $x = x_k$, $A = A_k$ обчислити $p_k = p(x_k)$ та $u_k^i = u^i(x_k)$, $i \in J_\delta(x_k)$.

2. Розв'язуючи задачу /3/ при $x = x_k$, $p = p_k$, обчислити $y_k = y(x_k)$.

3. Починаючи з $\alpha = 1$ дробити α шляхом поділу навпіл до першого виконання нерівності

$$\Phi_N(x_k + \alpha p_k + \alpha^2 y_k) \leq \Phi_N(x_k) - \alpha \varepsilon \langle p_k, A_k p_k \rangle. \quad /6/$$

4. Прийняти

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k + \alpha_k^2 y_k. \quad /7/$$

5. Переобчислити матрицю A_{k+1} за формулами /4/-/5/. Якщо

$$\max_i a_{k+1}^i / \min_i d_{k+1}^i \leq S$$

/тут a_{k+1}^i та d_{k+1}^i - i -ті діагональні елементи матриць A_{k+1} та D_{k+1} /, то перейти до кроку 1. У протилежному випадку прийняти $A_{k+1} = I_n$ і перейти до кроку 1.

3. Достатні умови збіжності. Справедливе таке твердження.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1/ множина $\Omega = \{x: \Phi_N(x) \leq \Phi_N(x_0)\}$ компактна;

2/ градієнти функцій $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ в Ω задовольняють умову Ліпшиця;

3/ задачі /2/ та /3/ мають розв'язок для довільного $x \in \Omega$, причому $\sum_{i \in J_0(x)} u^i(x) \leq N$.

Тоді алгоритм буде послідовність точок $\{x_k\}$, для якої $p(x_k) \rightarrow 0$, $y(x_k) \rightarrow 0$, $F(x_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ і в довільній граничній точці цієї послідовності задовольняються необхідні умови мінімуму для задачі /1/.

Доведення цієї теореми неістотно відрізняється від доведення аналогічного результату в праці [2].

4. Локальна швидкість збіжності. Припустимо, що $f_i(x) \in C^3(\Omega)$, $i \in \{0\} \cup J$, а розв'язок x_* задачі /1/ - єдина стаціонарна точка в Ω .

Позначимо через $\mathcal{L}(x, u)$ функцію Лагранжа задачі /2/:

$$\mathcal{L}(x, u) = f_0(x) + \sum_{i \in J} u^i(x) f_i(x).$$

Наступне твердження дає оцінку швидкості збіжності алгоритму в околі точки x_* .

Теорема 2. Припустимо, що виконуються умови теореми 1, а також

1/ градієнти $f'_i(x_*)$, $i \in J_* = \{i \in J: f_i(x_*) = 0\}$, лінійно незалежні;

2/ $u_*^i = u^i(x_*) > 0$, $i \in J_*$;

3/ $\langle \mathcal{L}_{xx}''(x_*, u_*) p, p \rangle > 0$ для всіх $p \neq 0$, які задовольняють рівності $\langle f_i'(x_*), p \rangle = 0$, $i \in J_*$, причому матриця $\mathcal{L}_{xx}''(x_*, u_*)$ не вироджена;

4/
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| [A_k - \mathcal{L}_{xx}''(x_*, u_*)] p_k \| / \| p_k \| = 0.$$

Тоді алгоритм генерує послідовність точок $\{x_k\}$, для якої

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| x_{k+1} - x_* \| / \| x_k - x_* \| = 0.$$

Доведення цього результату доволі громіздке, тому в даній статті не наведене. Відзначимо лише, що воно за схемою близьке до відповідних викладок праці [4].

5. Обчислювальний аспект. Вибір числових параметрів алгоритму може істотно впливати на його ефективність. Деякі рекомендації стосовно вибору значень ε , S , δ , N а, також методики розв'язування допоміжної задачі /2/ містять праці [2, 3]. У статті [1] докладно описаний процес перерозрахунку факторів Холевського матриць A_{k+1} .

Відзначимо, що крок 2 алгоритму істотно збільшує обсяг обчислень на кожній ітерації порівняно з квазіньютонівською модифікацією методу лінеаризації [2]. Однак додатковий крок у /7/ у напрямі допустимої множини задачі /1/ сприяє досягненню нерівності /6/ без надмірного дроблення α . Окрім цього, область надлінійної швидкості збіжності даного алгоритму набагато більша. Ці міркування підтверджує також чисельний експеримент на низці тестових задач.

Наприкінці зауважимо, що алгоритм очевидно може бути застосований до пошуку мінімуму функції на множині, заданій системою рівностей і нерівностей. За наявності серед обмежень простих типу $a \leq x \leq b$ алгоритм доцільно модифікувати за схемою, викладеною у праці [3].

І. Г о л у б Б.М. Одна схема побудови квазіньютонівських алгоритмів для безумовної мінімізації функції // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.29. С.22-24. 2. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Квазіньютонівська модифікація методу лінеаризації // Кибернетика. 1988. № 6. С.66-71. 3. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. Модифікація методу лінеаризації для рішення задачі математического програмування на простому мно- жестве типа параллелепипеда // Матем. методы и физико-мех. поля. 1989. № 30. С.24-28.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.94

І.І.Дияк, Ю.Б.Марчук

ЗАСТОСУВАННЯ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ КОМБІНОВАНИХ СХЕМ МЕТОДІВ СКІНЧЕННИХ ТА ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Побудова адаптивних схем та алгоритмів розв'язання задач теорії пружності, які дають змогу апостеріорно оцінювати похибку одержаних результатів – одна з найактуальніших проблем досліджень у теорії та практиці застосувань методу скінченних елементів /МСЕ/ і методу граничних елементів /МГЕ/. Ці дослідження спрямовані на адаптичне поліпшення числових розв'язків як в МСЕ, так і в МГЕ.

Головним чином чотири типи адаптивного поліпшення числових розв'язків використовуються у моделюванні реальної фізичної поведінки об'єктів:

d – адаптивність /використання моделей різної вимірності для різних частин об'єкта [7]/;

h – адаптивність /досягнення наляжної точності чисельного розв'язку, подрібнення сітки елементів з використанням даного типу елемента/;

p – адаптивність /в цьому випадку дискретизаційна сітка зберігається, а точність досягається за рахунок зростання порядку використовуваних апроксимаційних поліномів/;

$h-p$ – адаптивність, яка є комбінацією h та p версій.

У розвитку комбінованих схем МСЕ та МГЕ побудова адаптивних схем та алгоритмів – відкрите питання. При цьому ефективність програмного забезпечення для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь /СЛАР/, які одержують в результаті застосування побудованих алгоритмів, великою мірою визначає ефективність власне підходу.

Відомі підходи комбінування МСЕ та МГЕ [6, 8] не приділяють уваги розробці спеціальних алгоритмів розв'язання СЛАР. Здебільшого використовуються прямі методи розв'язання СЛАР. Із розробкою ітераційних методів, які для СЛАР великих порядків мають вищі показники ефективності, ніж прямі методи [5], та враховуючи, що в адаптивних схемах одержуємо добре початкове наближення до розв'язку з попереднього кроку, застосування ітераційних методів є перспективним.

Відомо, що в разі вдалої нумерації вузлів, а саме коли останні вузли СЕ області є першими для границі ГЕ області, загальна матриця системи для комбінованої схеми має вигляд, як на рис. 1.

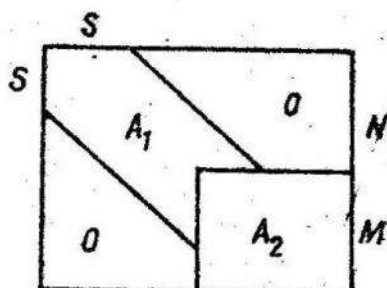


Рис. 1

тут A_1 - симетричний блок стрічкової структури, який одержуємо в результаті СЕ апроксимації; A_2 - несиметричний блок, який одержуємо в результаті ГЕ апроксимації.

Більшість відомих ітераційних методів розв'язання СЛАР ефективні для систем зі симетричними додатно визначеними матрицями. Відомі підходи, які ґрунтуються на симетризації матриці комбінованого підходу. Водночас у праці [5] показано, що симетризація допустима для обмеженого кола задач.

З огляду на це у даній роботі розроблений та реалізований у вигляді C++ коду підхід для розв'язання систем з матрицями структури, зображеної на рис. 1, який ґрунтується на модифікації методу спряжених градієнтів [4].

Знаходимо розв'язок СЛАР

$$Au = b \quad /1/$$

з використанням рекурсивної процедури:

$$u^{n+1} = u^n + \lambda_n p^n, \quad /2/$$

де p^n - вектор напрямку; λ_n - скаляр, який мінімізує в напрямі p^n квадратичний функціонал:

$$F(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (u, b) + c, \quad /3/$$

Скаляр λ_n в /2/ обчислюємо зі співвідношення

$$\lambda_n = \frac{z^n, \tau z^n}{p^n, \tau p^n}, \quad /4/$$

Тут нев'язку z^n знаходимо з виразу

$$z^n = b - Au^n, \quad /5/$$

або

$$z^n = z^{n-1} - \lambda_{n-1} A p^{n-1}. \quad /6/$$

Використання співвідношення /6/ економніше, тому що обчислення добутку Ar^{n-1} використовується також для λ_{n-1} /див. /4//. Знаходження напряду для ітерації задаємо

$$r^n = \begin{cases} z^0, & n=0, \\ z^n + \alpha_n r^{n-1}, & n \geq 1, \end{cases} \quad /7/$$

де α_n обчислюється з

$$\alpha_n = \frac{z^{n,T} z^n}{z^{n-1,T} z^n}. \quad /8/$$

Критерієм спинення ітераційного процесу є умова, що величина

$$\varepsilon = \left[\frac{z^{n,T} z^n}{b^n b} \right]^{1/2} \quad /9/$$

менша від заданої точності /TOL/.

Якщо застосуємо /2/, /4/, /6/, /7/ і /8/ до СЛАР вигляду

$$(Q^{-1}A)u = Q^{-1}b, \quad /10/$$

то отримаємо прискорений ітераційний метод. Матриця Q може бути матрицею основного ітераційного методу, приміром Якобі чи Зейделя. Система /10/ ліпше зумовлена, ніж вихідна система. Тоді параметр ε цієї системи обчислюємо за формулою

$$\varepsilon = \left[\frac{\delta^{n,T} \delta^n}{(Q^{-1}b)^T (Q^{-1}b)} \right]^{1/2}, \quad /11/$$

де

$$\delta^n = Q^{-1} z^n. \quad /12/$$

Описаний метод спряжених градієнтів з прискоренням застосовується для систем зі симетричною матрицею. Якщо ж A - неси- метрична, то симетричну систему отримуємо заміною Q^{-1} в /10/ на A^T . Проте матриця системи одержана у такий спосіб, має число зумовленості більше, ніж вихідна матриця. Отже, ітераційний процес у такому випадку вимагає більшої кількості ітерацій. Поліпшений метод запропонований у праці [5]. Цей метод побудований на основі /2/, /6/ і /7/ та додаткового визначення вектора $\bar{r}^n$, який обчислюється зі співвідношення

$$\bar{r}^n = \begin{cases} \bar{z}^0 = z^0, & n=0, \\ \bar{z}^n + \alpha_n \bar{r}^{n-1}, & n \geq 1, \end{cases} \quad /13/$$

де

$$\bar{z}^n = z^{n-1} - \lambda_{n-1} A^T \bar{r}^n. \quad /14/$$

Тепер λ_n і α_n визначаються як

$$\lambda_n = \frac{\bar{z}^n, T z^n}{\bar{p}^n, T A p^n} ; \quad /15/$$

$$\alpha_n = \frac{\bar{z}^n, T z^n}{\bar{z}^{n-1}, T z^{n-1}} . \quad /16/$$

Отже, модифікований алгоритм подається співвідношеннями /2/ /6/, /7/, /13/, /14/, /15/ і /16/. При цьому елементи матриці Q визначаються

$$q_{ij} = \begin{cases} a_{ij} , & i=j , \\ 0 , & i \neq j . \end{cases} \quad /17/$$

Цей алгоритм можна подати у такому вигляді:

```

u = u0 // початкове наближення
z = b - Au // нев'язка
δ = Q-1 z // нормалізована нев'язка
DELTA0 = δT δ // похибка
IF (DELTA0 ≤ TOL) → STOP // умова спинення
p = p̄ = δ̄ = δ
h = Ap
h1 = Q-1 h
λ = DELTA0 / pT h1 // скаляр для мінімізації
u = u + λ p // обчислюємо наступне набли-
δ = δ - λ h1 // наступна нормалізована
// нев'язка
DELTA1 = δT δ // похибка
IF DELTA1 ≤ TOL → STOP // умова спинення
h = Q-1 p̄
h1 = AT h
δ̄ = δ̄ - λ h1 // наступна нормалізована
// нев'язка
DELTA1 = δ̄T δ̄ // похибка
α = DELTA1 / DELTA0
p = δ + α p // вектор напрямку
p̄ = δ̄ + α p̄ // вектор напрямку
GOTO R // повернення на крок R ,

```

Даний алгоритм реалізований у вигляді програми на мові $C++$. Для розв'язання систем великих розмірів передбачена можливість використання зовнішньої пам'яті ПЕОМ.

Приклад. Як текстову задачу розглянемо застосування комбінованого скінченно-гранично елементного підходу для визначення пружно-деформівного стану в об'єкті, поперечний переріз якого поданий на рис. 2. Як бачимо на межі Γ_1 задаються умови жорсткого защемлення, на Γ_2 - нормальне одиничне навантаження.

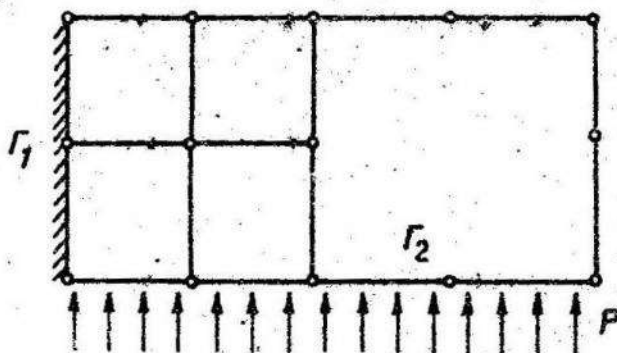


Рис. 2

У таблиці наведені результати розв'язування СЛАР, яку одержують застосуванням комбінованого підходу [3] методами: Зейделя, вищеприслуженим методом та прямим методом Гаусса [3] для двох різних сіток комбінованих апроксимацій та різних початкових наближень.

Розміри матриці /рис.1/ S/N/M	: Кількість : : ітерацій :		: Час : рахунку /с/ :		: Початкове : наближення :
	: 1 :	: 2 :	: 1 :	: 2 :	
	444	7	38	4	
I4/30/42	854	43	72	9	5
	365	21	32	5	
	315	33	25	14	
I4/70/66	166	37	33	16	12

Тут використані позначення: 1 - метод Зейделя; 2 - прискорений ітераційний метод спряжених градієнтів; 3 - метод Гаусса; а - /розв'язок - 0.1+розв'язок/, б - всі значення вектора початкового наближення - 1.0, с - всі значення вектора початкового наближення - 0.1e - 3, d - початкове наближення - значення розв'язку для попередньої сітки, решта значень - 0.0; е - по-

чаткове наближення — значення розв'язку для попередньої сітки, решта значень одержані шляхом лінійної інтерполяції.

Як бачимо з таблиці, за швидкодією описаний ітераційний метод порівняльний з прямим методом /3/ та ефективніший від методу Зейделя. Процес збіжності цього методу не сильно залежить від початкового наближення.

1. Бенерджі П., Баттерфілд Р. Метод граничних елементів в прикладних науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
2. Бреббія К., Теллєс Е., Вробеб Л. Методи граничних елементів. М.: Мир, 1987. 324 с. 3. Діак І.І., Чернуха А.М. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів // Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.39. С.41-46.
4. Кудряков В.И., Бобков В.В., Монастыр-ный П.И. Вычислительные методы: В 2 т. М.: Наука, 1976. Т.1. 302 с. 5. Arafat F.C., Mansur W.J., Malaghini J.E.B. Biconjugate Gradient Acceleration for Large BEM System of Equations. BEM XII. Vol 1. Applications in Stress Analysis, Potential and Diffusion // Proc. of Twelfth Int. Conf. on BE in Eng. Septem, 1989. P. 24-27. 6. Mang H.A., Torzicky P., Chen Z.Y. On the mechanical inconsistency of symmetrization of unsymmetric coupling matrices for BE/FEM discretization of solids // Computational Mechanics, 1989. Vol.4. P.301-308. 7. Stein E., Ohnismus S. Concept and realisation of integrated adaptive finite element methods in solid- and structural mechanics // Numerical Methods in Engineering '92, Ed. Ch. Hirsch, 1992. P.163-170. 8. Zienkiewicz C.C., Kelly D.W., Bettess P. The coupling of the finite element method and boundary solution methods // Int. J. Numer. Methods Eng., 1977. Vol. 11(2). P.355-375.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.94

УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДЕЯКОГО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Останнім часом велику увагу приділяють вивченню нелокальних задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних різних типів. Це пов'язане як з різноманітним практичним застосуванням таких задач, так і з їхньою теоретичною важливістю.

Зацікавлення викликають також задачі даного типу для сингулярно збурених рівнянь. Для побудови асимптотики розв'язку таких задач може бути використана ідея побудови асимптотики роз-

© Дудзяний І.М., Цимбал В.М., 1995

в'язку складнішої збуреної задачі на основі асимптотики розв'язку простішої сингулярно збуреної задачі. Ця ідея для звичайних диференціальних рівнянь вперше реалізована у праці [1]. Для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних вона виявилася також плідною і вперше реалізована у праці [7] /див. також [6], [8] /.

У даній роботі в області $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ отримане асимптотичне розв'язання такої задачі:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a(x, t)u = f(x, t); \quad /1/$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(1, t) = 0; \quad /2/$$

$$u(x, 0) + \beta u(x, T) = 0, \quad /3/$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Нехай N - деяке натуральне число. Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x, t)$, $f(x, t)$ - достатньо гладкі в D функції;

2/ $a(x, t) > 0$ в D , $|\beta| \leq 1$.

Перш ніж будувати асимптотику розв'язку задачі /1/-/3/, побудуємо асимптотику розв'язку допоміжної локальної задачі, тобто задачі розв'язку рівняння /1/ з граничними умовами /2/ і початковою

$$u(x, 0, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i z_i(x) \quad /4/$$

замість нелокальної умови /3/, де $z_i(x)$ ($i = 0, N$) на даному етапі/ задані достатньо гладкі функції, такі що

$$z_i(0) = z_i'(0) = z_i(1) = 0 \quad (i = 0, N).$$

Розв'язання розв'язку допоміжної задачі /1/, /2/, /4/ будуватимемо методом приликового шару [1, 2]. Зауважимо, що у випадку $N=0$ асимптотичне розв'язання цієї задачі отримане у праці [9].

Асимптотичне розв'язання шукаємо у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \pi_i(x, T) + R_N(x, t, \varepsilon), \quad /5/$$

де $\tau = t/\varepsilon$.

Визначимо функції, у яких визначаються функції, що входять у /5/. Вони визначаються стандартно.

функції регулярної частини асимптотики $\bar{u}_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$) є розв'язками граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь / t входить як параметр/:

$$M\bar{u} = -\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + a(x, t)\bar{u}_i = f_i(x, t); \quad /6/$$

$$\bar{u}_i(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_i(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \bar{u}_i(l, t) = 0, \quad /7/$$

де $f_0(x, t) \equiv 0$, $f_i(x, t) = -\frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial t}$ ($i=1, \dots, N$).

Як бачимо, вони визначаються рекурентно. Добре відомо [4], що з єдиності розв'язку задачі /6/, /7/ випливає існування розв'язку цієї задачі. Тому достатньо показати, що рівняння $M\bar{u}_i = 0$ з нульовими граничними умовами /7/ має тільки тривіальний розв'язок. Дійсно, домножуючи це рівняння на $\bar{u}_i$, інтегруючи по x від 0 до l з урахуванням граничних умов /6/, отримуємо

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i(l, t)}{\partial x} \right)^2 + \int_0^l a(x, t) \bar{u}_i^2(x, t) dx = 0,$$

звідки випливає єдиність розв'язку задачі /5/, /6/ $i=0, \dots, N$, а це доводить існування розв'язку цієї задачі.

Функції прилежового шару $\Pi_i(x, \tau)$ ($i=0, \dots, N$) в околі $t=0$ є розв'язками змішаних задач:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^3 \Pi_i}{\partial x^3} + a(x, 0)\Pi_i = \varphi_i(x, \tau) \quad (i=0, N), \quad /8/$$

$$\Pi_i(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \Pi_i(0, \tau)}{\partial x} = 0, \quad \Pi_i(l, \tau) = 0 \quad (i=0, N), \quad /9/$$

$$\Pi_i(x, 0) = Z_i(x) - \bar{u}_i(x, 0) \quad (i=0, N), \quad /10/$$

де $\varphi_0(x, \tau) \equiv 0$, $\varphi_i(x, \tau)$ ($i=1, \dots, N$) легко виписуються явним чином і лінійно залежать від $\Pi_j(x, \tau)$ ($j < i$).

Після того як знайдені функції $\bar{u}_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$), функції $\Pi_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$) знаходяться рекурентно як розв'язки змішаних задач /8/-/10/. Показано, що функції $\Pi_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$) експоненціально спадають при $\tau \rightarrow \infty$, тобто дійсно є функціями прилежового шару в околі $t=0$.

Таким чином, формальне асимптотичне розвинення розв'язку допоміжної задачі /1/, /2/, /4/ побудоване. Далі вважаємо $Z_i(x)$ ($i=0, \dots, N$) невідомими, і головним завданням у побудові асимптотики розв'язку вихідної задачі /1/-/3/ є такий

підбір $Z_i(x)$ ($i=0, \dots, N$), щоб формальне асимптотичне розв'язку допоміжної задачі /1/, /2/, /4/ було одночасно і формальним асимптотичним розв'язком вихідної задачі /1/-/3/.

Підстановка асимптотичного розв'язку /5/ розв'язку допоміжної задачі /1/, /2/, /4/ у нелокальну умову /3/ дає співвідношення для визначення $Z_i(x)$ ($i=0, \dots, N$), а саме

$$Z_i(x) = -\beta \bar{u}_i(x, T) \quad (i=0, \dots, N). \quad /II/$$

Підставляючи отримані вирази /II/ у /10/, маємо початкові умови для визначення функцій $\Pi_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$) - функцій прилежового шару асимптотичного розв'язку вихідної задачі /1/-/3/. Розв'язуючи задачі /8/-/10/ з уже визначеними початковими умовами, отримуємо функції прилежового шару $\Pi_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$). Разом з уже визначеними функціями $\bar{u}_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$) це дає всі функції, що входять в асимптотичне розв'язання /5/ задачі /1/-/3/.

Застосування методу інтегралів енергії [3] до задачі знаходження залишкового члена дає таку оцінку:

$$\|R_N(x, t, \epsilon)\|_{L_\epsilon(D)} \leq C \epsilon^{N+1}, \quad /12/$$

де константа C не залежить від вибору ϵ .

Таким чином, отримана така теорема.

Теорема. Нехай у D виконуються умови /1/, /2/. Тоді розв'язок задачі /1/-/3/ допускає асимптотичне зображення /5/, де $\bar{u}_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$) - розв'язки задач /6/, /7/; функції прилежового шару $\Pi_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$) - розв'язки задач /8/, /9/, /10/, де $Z_i(x)$ ($i=0, \dots, N$), що входить у /10/ визначається з /II/; залишковий член допускає оцінку /12/.

І. В а с и л ь в а А.Б., Б у т у з о в В.С. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 2. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3-122. 3. К у р а н т Р. Уравнение с частными производными. М.: Наука, 1964. 4. Н а й м а р к М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 5. Х а р т м а н С. Собственные дифференциальные уравнения // М.: Наука, 1970. 6. Ц и м о а л В. Нелокальная задача для деяких сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних // Тези доп. Всеукр. конф. "Нові підходи до розв'язання дифференціальних рівнянь" /М.Дрогобиш, 25-27 січня 1994 р./ К.: Ін-т математики АН України, 1994.

7. Ц и м б а л В.Н. Некоторые неклассические сингулярно возмущенные задачи // Методы малого параметра и их применение: Тез. лекций и докладов науч. конф. Всесоюз. школы-семинара /г. Минск, 13-18 сент. 1982 г./ М.: АН СССР, 1982. 8. ц и м б а л В.Н. Полочная задача для сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений // Тез. 8 Респ. конф. "Нелинейные задачи математической физики и задачи со свободной границей" /г. Донецк, 3-8 сент. 1991 г./ Донецк: Ин-т прикл. математики и механики, 1991. 9. ц и м б а л В.Н. Приближенное решение смешанной задачи для некоторого уравнения математической физики // Тез. лекций и докл. Всесоюз. школы молодых ученых "численные методы решения задач математической физики" /г. Москва, 26 мая-4 июня 1988 г./ М.: Изд-во Всесоюз. об-ва "Знание", 1983. 4.2. С.29-30.

Стаття надійшла до редколегії 18.03.94

УДК 518:517.948

М.В.Еук

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv - \frac{\partial p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} + z(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = f(x, y) \quad /1/$$

за однорідної крайової умови:

$$Pu|_r = [p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cos(\nu, x) + q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cos(\nu, y)]|_r = 0 \quad /2/$$

де Γ - межа області D , обмеженої по x прямими $x=b$ і $x=b$, а по y - достатньо гладкими кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x) < h(x)$, ν - зовнішня нормаль до Γ .

На функції $p(x, y, s, t, z)$, $q(x, y, s, t, z)$, $z(x, y, s, t, z)$ і $f(x, y)$ накладаються ті ж обмеження, що і в праці [2].

Введемо допоміжний оператор T , який визначається за формулами:

$$Tu = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u, \quad /3/$$

$$[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\nu, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\nu, y)]|_r = 0. \quad /4/$$

За область визначення $D(T)$ оператора T приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x, y)$ у замкнутій множині $\bar{D}$, які задовольняють крайові умови /4/.

При цьому оператор T на лінеалі $D(T)$ буде додатно визначеним:

$$(Tu, u) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 \right] dx dy \geq \|u\|^2. \quad /5/$$

Позначимо через $H_T \subset H = L_2(D)$ енергетичний простір оператора T , тобто замикання $D(T)$ у метриці

$$[u, v] = (Tu, v) = \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + uv \right] dx dy, \\ |u|^2 = [u, u].$$

Можна показати, що функції $u(x, y) \in H_T$ мають перші узагальнені похідні, сумовані з квадратом в D , і що крайові умови /4/ - природні, тобто $H_T = W_2^1(D)$.

Із нерівності /5/ внаслідок граничного переходу для довільного $u \in H_T$ отримуємо

$$\|u\| \leq |u|. \quad //6//$$

Для довільних $u, v \in H_T$ формально виведемо наступну лінійну форму:

$$A(u, v) = \iint_D \left[p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial v}{\partial x} + q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ \left. + z(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) v \right] dx dy. \quad //7/$$

Припустимо, що при $(x, y) \in \bar{D}$ і довільних s, t, z справедлива нерівність

$$\frac{\partial p}{\partial t} \xi_1^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial t} \right) \xi_1 \xi_2 + \frac{\partial q}{\partial t} \xi_2^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t} \right) \xi_1 \xi_0 + \\ + \left(\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \xi_2 \xi_0 + \frac{\partial z}{\partial s} \xi_0^2 \geq M(\xi_1^2 + \xi_2^2) + N \xi_0^2,$$

де ξ_0, ξ_1, ξ_2 - довільні дійсні числа, $M = \text{const} > 0$, $N = \text{const} > 0$. Тоді для довільних $u, v \in H_T$ справедлива нерівність

$$A(u, u-v) - A(v, u-v) \geq \mu |u-v|^2, \quad /8/$$

де $\mu = \min \{M, N\}$.

Крім цього, для довільних $u, v, w \in H_T$ можна визначити виконання нерівності

$$|A(u, w) - A(v, w)| \leq \eta |u-v| |w|, \quad /9/$$

де $\eta = 3 \max \{M_1, M_2, N_1, N_2\}$ а константи M_1, M_2, N_1, N_2 визначаються умовами задачі /формула /3/ із праці [2]/.

Узагальненим розв'язком задачі /1/-/2/ називається функція $u(x, y) \in H_T$, для якої виконується тотожність

$$A(u, v) = \iint_D f v(x, y) dx dy \quad /10/$$

при довільній функції $v(x, y) \in H_T$. Відомо (див., приміром [1]), що виконання умов /8/, /9/ забезпечує існування та єдиність узагальненого розв'язку.

Наближений розв'язок задачі /1/-/2/ шукаємо методом Канторовича у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \varphi_k(x, y), \quad /11/$$

де лінійно незалежні у проміжку $[g(x), h(x)]$ функції $\varphi_k(x, y)$ вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{X_1(x) \varphi_k(x, y)\} \in H_T$ була повною за енергією. Шукані коефіцієнти $c_k(x)$ визначаємо зі системи

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (A u_n - f) \varphi_i dy + \varphi_i \sqrt{1+y'^2} p u_n \Big|_{y=g(x)} + \varphi_i \sqrt{1+y'^2} p u_n \Big|_{y=h(x)} = 0 \quad /12/$$

за умов

$$\int_{g(a)}^{h(a)} \varphi_i p u_n \Big|_{x=a} dy = 0, \quad \int_{g(b)}^{h(b)} \varphi_i p u_n \Big|_{x=b} dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad /13/$$

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду

$$v_n(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \varphi_k(x, y).$$

Узагальненим розв'язком системи методу Канторовича /12/-/13/ називається функція $u_n(x, y) \in H_n \cap H_T$, що задовольняє тотожність

$$A(u_n, v_n) = \iint_D f v_n(x, y) dx dy \quad /14/$$

при довільній функції $v_n(x, y) \in H_n \cap H_T$.

Покажемо, що узагальнений розв'язок системи методу Канторовича існує та є єдиним. Для цього до задачі /1/-/2/ застосуємо метод Бубнова-Гальоркіна, тобто наближений розв'язок шукаємо у вигляді:

$$u_n^m(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_{kl} X_l(x) \varphi_k(x, y), \quad /15/$$

а невідомі коефіцієнти C_{kl} визначаємо зі системи

$$A(u_n^m, x_j(x) \varphi_i(x, y)) = \iint_D f x_j(x) \varphi_i(x, y) dx dy \quad /16/$$

$$i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m.$$

Система /16/ зводиться до системи нелінійних алгебраїчних або трансцендентних рівнянь, розв'язок яких існує та є єдиним [1].

Аналогічно, як і в праці [3], можна показати, що послідовність розв'язків $\{u_n^m\}$ системи /16/ при $m \rightarrow \infty$ слабо збігається у просторі H_T до єдиного узагальненого розв'язку системи методом Канторовича /12/-/13/.

Теорема. Якщо обмеження на вихідні дані задачі /1/-/2/ такі, що виконуються умови /8/, /9/, то для довільної функції $f(x, y) \in H$ задача /1/-/2/ має єдиний узагальнений розв'язок $u(x, y) \in H_T$ і при довільному n система методу Канторовича /12/-/13/ має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(x, y) \in H_n \cap H_T$.

І. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М., 1974. 2. Ж у к М.В. Застосування методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип. 37. С.12-16. 3. Ж у к М.В. Исследование скорости сходимости метода Канторовича для нелинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. 1976. Т.28. № 2. С.183-193.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.94

УДК 519.6

В.М.Зубов, С.Ю.Терлецька

ПРОТИПОТОКОВА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗАБРУДНЕННЯ АТМОСФЕРИ

1. Постановка задачі про поширення домішок в атмосфері.
Усталений у часі процес поширення пасивної домішки в приземному шарі атмосфери описується рівнянням турбулентної дифузії [1]:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\mu_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\mu_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z}) + \operatorname{div}(\bar{u} \varphi) + \sigma \varphi = f, /1/$$

що встановлює залежність між шуканою концентрацією домішки $\varphi(x, y, z)$, вектором швидкості вітру $\bar{u} = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$,

© Зубов В.М., Терлецька С.Ю., 1995

коефіцієнтами турбулентної дифузії $\mu_x(x, y, z)$, $\mu_y(x, y, z)$, $\nu(x, y, z)$ коефіцієнтом поглинання/розкладу домішки, функцією $f(x, y, z)$, яка описує інтенсивність джерел домішки.

Рівняння /1/ розглядається в циліндричній області Ω , на границі якої задаються такі умови:

$$\varphi = 0, \quad (\bar{u}, \bar{n}) < 0 \text{ на } \Sigma; \quad /2/$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (\bar{u}, \bar{n}) \geq 0 \text{ на } \Sigma; \quad /3/$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\alpha \varphi \text{ на } \Sigma_0; \quad /4/$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_H, \quad /5/$$

де $\bar{n}(x, y, z)$ – вектор одиничної зовнішньої нормалі до Σ ; $\alpha(x, y)$ – коефіцієнт взаємодії домішки з поверхнею землі; Σ – бічна поверхня циліндра; Σ_0 – нижній торець циліндра, Σ_H – верхній торець циліндра.

2. Моделльне одновимірне рівняння. 2.1. Формулювання крайової задачі. Для дослідження впливу параметрів крайової задачі на поведінку її розв'язку розглянемо на відрізку $[0, L]$ найпростіше одновимірне рівняння адвекції-дифузії /2, 3/:

$$-k \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + u \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad /6/$$

з постійними коефіцієнтами дифузії k та швидкістю потоку u /обидва додатні/. Рівняння /6/ доповнимо граничними умовами:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = 1. \quad /7/$$

Крайову задачу /6/, /7/ можна трактувати як математичну модель одновимірного перенесення домішки на відрізку $[0, L]$, на правому кінці якого ($x = L$) підтримується постійний рівень домішки, що дорівнює 1.

Точний розв'язок задачі /6/, /7/ має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{1 - \exp(Re \cdot x/L)}{1 - \exp(Re)}, \quad /8/$$

де $Re = uL/k$ – безрозмірний параметр, який називається ч и с л о м П е к л е.

При малих числах Пекле ($Re \ll 1$) розв'язок задачі /6/, /7/ практично лінійно залежить від x , тоді як при великих Re ($Re \gg 1$) розв'язок $\varphi(x)$ неістотно змінюється майже на всьому відрізку $[0, L]$ ($\varphi(x) = 0$), за винятком деяко-

го малого околу точки $x=L$, який називається примежовим шаром, в якому градієнт функції $\varphi(x)$ досягає великих значень. Товщина примежового шару пропорційна до $1/Re^{1/2}$.

Наявність примежового шару істотно ускладнює відшукування розв'язку задачі /6/, /7/ стандартними чисельними методами /методом сіток, методом скінчених елементів/. Тому потрібні спеціальні підходи, що враховують специфіку таких задач.

2.2. Метод скінчених різниць. Протипотокові різниці. Як приклад розглянемо розв'язок задачі /6/, /7/ методом скінчених різниць. Для цього апроксимуємо похідні, що входять до рівняння /6/, різницями першого порядку:

$$\frac{d\varphi}{dx} \approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \approx \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2},$$

де $h = L/N$ = параметр дискретизації (вузли скінченно-різницевої сітки $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, \dots, N$). У результаті отримаємо різницеву схему:

$$-k \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} + u \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} = 0. \quad /9/$$

Чисельні розв'язки задачі /6/, /7/ на вітці, що складається з її вузлів ($N = 19$), побудовані з використанням схеми /9/, демонструють осцилюючий характер скінченно-різницевої апроксимації вигляду /9/ при $\alpha \geq 4$. Причому осциляції наближеного розв'язку викликані лише недоліками чисельної схеми і не мають жодної фізичної інтерпретації.

Типовим прийомом для вгамування осциляцій скінченно-різницевого розв'язку рівняння адвекції-дифузії з використанням несиметричної протипотокової різниці для апроксимації першої похідної в рівнянні /6/:

$$\frac{d\varphi}{dx} \approx \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h}.$$

При цьому друга похідна надалі апроксимується центральною різницею другого порядку:

$$-k \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} + u \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} = 0. \quad /10/$$

Аналіз чисельних розв'язків задачі /6/, /7/, отриманих з використанням протипотокової схеми /10/, приводить до виснов-

ку, що схема з центрально-різницевою апроксимацією адвективного члена має від'ємну штучну дифузю, тоді як у протипотоковій схемі закладена додатна штучна дифузія.

Неважко переконатись у тому, що адвективний член у /10/ можна подати у вигляді суми члена із центральною різницею, а також додаткового дифузійного члена:

$$u \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} = u \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h} - \bar{k} \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2},$$

де $\bar{k} = uh/2$ - надлишкова дифузія різницевої схеми /10/ порівняно зі схемою /9/.

Таким чином, чисельний розв'язок можна уточнити, якщо в різницевій схемі записати деяку лінійну комбінацію центральної та протипотокової різниць. Або, що еквівалентно, вибрати потрібне значення коефіцієнта штучної дифузії $\bar{k}$.

Дійсно, у праці [5] з'ясовано, що якщо до схеми /9/ додати дифузійний член з коефіцієнтом дифузії

$$\bar{k} = \frac{uh}{2} \xi, \quad /11/$$

де $\xi = \coth(\alpha) - 1/\alpha$, $\alpha = uh/(2k)$, тоді розв'язок отриманої різницевої схеми початково збігатиметься з точним розв'язком задачі /6/, /7/ (у вузлах сітки).

2.3. Метод скінченних елементів. Формулювання Петрова-Гальоркіна. Аналогічна проблема, що стосується осциляцій чисельного розв'язку, виникає під час розв'язування задачі /6/, /7/ з великими числами Пекле методом скінченних елементів за допомогою стандартного формулювання варіаційних рівнянь методу Гальоркіна:

$$\int_0^h \left(k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\Phi_i}{dx} + u \frac{d\varphi}{dx} \Phi_i \right) dx = 0, \quad /12/$$

де $\Phi_i(x)$ - деяка функція з простору пробних функцій Φ_h , в якому потрібно знайти наближений розв'язок задачі /6/, /7/.

Неважко перевірити, що якщо Φ_h вибирається згідно з методом скінченних елементів, причому

$$\Phi_h = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{x - x_{i+1}}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \end{cases} \quad i = 1, \dots, N-1, \quad /13/$$

тоді варіаційне формулювання /12/ задачі /5/, /7/ зводиться до рівняння /9/, що відповідає центрально-різницевій апроксимації адвективного члена з /6/.

На відміну від методу скінченних різниць, у методі скінченних елементів існує декілька шляхів боротьби з осциляціями, викликаними від"ємною штучною дифузійною чисельною схемою /що відповідає формулюванню Гальоркіна методу скінченних елементів/.

Перший з них припускає додавання у вихідне формулювання крайової задачі штучної дифузії, що в наступному компенсує від"ємну схему дифузії методу Гальоркіна [6]. Для задачі /6/, /9/ такий підхід приводить до формулювання

$$\int_0^L ((k+k^-) \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\Phi_i}{dx} + u \frac{d\varphi}{dx} \Phi_i) dx = 0, \quad /14/$$

де k^- вибирається згідно з /11/.

Друга можливість полягає у використанні квадратурної формули спеціального вигляду для інтегрування адвективного члена в /11/, що врешті-решт приводить до дискретної задачі [4], еквівалентної до /10/.

І, нарешті, третій шлях пов'язаний з використанням методу Петрова-Гальоркіна для отримання варіаційного формулювання вихідної крайової задачі. У цьому методі використовуються вагові функції, що різняться від пробних функцій, тоді як у методі Гальоркіна пробери вагових та пробних функцій збігаються.

Для задачі /6/, /7/ варіаційне формулювання Петрова-Гальоркіна має вигляд /рівняння /6/ множимо на вагову функцію $\Phi_i = \Phi_i^1 + \Phi_i^2$ та інтегруємо від 0 до L з використанням формули інтегрування частинами/:

$$\int_0^L (k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\Phi_i^1}{dx} + k \frac{d^2\varphi}{dx^2} \Phi_i^2 + u \frac{d\varphi}{dx} (\Phi_i^1 + \Phi_i^2)) dx = 0, \quad /15/$$

При цьому розв'язок шукаємо у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i \Phi_i^1(x).$$

Якщо Φ_i^1 виберемо згідно /13/, а

$$\Phi_i^2 = \frac{k^-}{u} \frac{d\Phi_i^1}{dx},$$

тоді рівняння /15/ еквівалентне /14/ за рахунок того, що

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

всередині кожного скінченного елемента.

Таким чином, у випадку задачі /6/, /7/ всі три підходи до конструювання протипотокової схеми методу скінченних елементів приводять до одного і того ж дискретного рівняння.

3. Протипотокова схема МСЕ у випадку декількох просторових вимірів. Під час використання розглянутих протипотокових схем МСЕ, адаптованих до випадку декількох вимірів, виникають

трудності, пов'язані з виникненням так званого ефекту поперечної дифузії.

Суть цього ефекту полягає в появі додаткової штучної дифузії в напрямі перпендикулярному до напрямку швидкості потоку, що зумовлює істотні похибки чисельного розв'язку.

Для уникнення ефекту поперечної дифузії у праці [6] запропоновано використовувати тензор штучної дифузії $\bar{k}_{ij}$ замість скалярного коефіцієнта $\bar{k}$. При цьому

$$k_{ij} = \bar{k} \hat{u}_i \hat{u}_j, \quad \hat{u}_i = u_i / \|\vec{u}\|, \quad /16/$$

де u_i - компоненти вектора швидкості потоку. Заміна скалярного коефіцієнта штучної дифузії $\bar{k}$ тензором $\bar{k}_{ij}$ знижує поперечну схемну дифузію, оскільки в останньому випадку штучна дифузія вводиться тільки в напрямі вектора швидкості потоку.

У праці [5] зазначено, що у випадку наявності правої частини f у рівнянні адвекції-дифузії несумісність вагових функцій, що відповідають f та адвективному членові, також приводить до перебільшеної дифузії чисельної апроксимації. Цим пояснюється необхідність використання методу Петрова-Гальоркіна для формулювання варіаційної задачі.

Розглянемо n -вимірне рівняння адвекції-дифузії:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(- \sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + u_i \varphi \right) = f \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad /17/$$

Сформулюємо такі граничні умови:

$$\varphi = 0 \quad \text{на } \Gamma_g; \quad /18/$$

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} n_j = s \quad \text{на } \Gamma_s, \quad /19/$$

де Γ_g та Γ_s - частини границі області Ω , в якій розглядається рівняння /17/, що задовольняють умови:

$$\overline{\Gamma_g \cup \Gamma_s} = \partial\Omega, \quad \overline{\Gamma_g \cap \Gamma_s} = \emptyset.$$

Формулювання Петрова-Гальоркіна крайової задачі /17/-/19/ має вигляд

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_k^1}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^n \left(k_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} \varphi_k^2 \right) + u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (\varphi_k^1 + \varphi_k^2) \right) - f \varphi_k \right\} dx + \int_{\Gamma_s} s \varphi_k^1 d\Gamma = 0,$$

де

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i^1(x).$$

Якщо $\Phi_i^1(x)$ - полілінійна функція, то на прямокутній сітці похідна $\partial^2 \varphi / \partial x_j^2$ перетворюється в нуль. У цьому випадку формулювання Петрова-Гальоркіна задачі /17/-/18/ набуває вигляду

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_k^1}{\partial x_j}) + u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (\Phi_k^1 + \Phi_k^2) \right) - f \Phi_k \right\} dx + \int_{\Gamma_s} s \Phi_k^1 d\Gamma = 0.$$

Ефект "протиштовтатковості" досягається за рахунок вибору функцій $\Phi_i^2(x)$ у вигляді

$$\Phi_i^2(x) = k^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{\hat{u}_j}{\|u\|} \frac{\partial \Phi_k^1}{\partial x_j},$$

де k^{-1} - коефіцієнт штучної дифузії, що у двовимірному випадку /для одного скінченного елемента/ визначається за формулами:

$$\begin{aligned} k^{-1} &= (\xi u_{\xi} h_{\xi} + \eta u_{\eta} h_{\eta}) / 2, \\ \xi &= \coth(\alpha_{\xi}) - 1/\alpha_{\xi}, \quad \eta = \coth(\alpha_{\eta}) - 1/\alpha_{\eta}, \\ \alpha_{\xi} &= u_{\xi} h_{\xi} / (2k), \quad \alpha_{\eta} = u_{\eta} h_{\eta} / (2k), \\ u_{\xi} &= (\bar{e}_{\xi}, \bar{u}), \quad u_{\eta} = (\bar{e}_{\eta}, \bar{u}), \end{aligned}$$

де $\bar{e}_{\xi}$, $\bar{e}_{\eta}$, h_{ξ} , h_{η} - геометричні характеристики скінченного елемента.

- І. М а р ч у к Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с. 2. Ф л е т - ч е р К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с. 3. Finite Element Methods for Convection Dominated Flows /Ed. T.J.R. Hughes. New York: ASME, 1986. 227 p. 4. Hughes T.J.R. A simple scheme for developing "upwind" finite elements // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1978. Vol. 12. P. 1359-1362. 5. Hughes T.J.R., Brooks A. A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion // Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, AMD, 1979. Vol. 34. 6. Kelly D.W., Nakazawa S., Zienkiewicz O.C., Heinrich J.C. A note of upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problem. Internat. J. Numer. Methods Eng. 1980. Vol. 15. P. 1705-1711.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.94

В.М.Зузов, С.Ю.Терлецька, Г.А.Шинкаренко

РОЗВ'ЯЗУВАНІСТЬ І АПРОКСИМАЦІЯ
УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ
МІГРАЦІЇ АТМОСФЕРНИХ ДОМІШОК

Мета даної роботи – проаналізувати коректність варіаційної задачі про нестационарну конвекцію – дифузійну пасивної домішки в приземному шарі атмосфери і в'ясувати можливості проекційно-сіткових методів розв'язування даного класу задач. З огляду на це з використанням спеціального трактування конвективних доданків конструється варіаційна задача і доводиться, що границя послідовності відповідних напівдискретних апроксимацій Гальоркіна є її розв'язком. Більше того, для типових просторів методу скінченних елементів одержуються апріорні оцінки швидкості збіжності таких апроксимацій. Повна дискретизація варіаційної задачі досягається побудовою однокрокових рекурентних схем інтегрування по часу, для яких визначаються достатні умови стійкості та оцінки збіжності.

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай Ω утворене обмежену зв'язну область точок $x = (x_1, \dots, x_n)$ евклідового простору $\mathbb{R}^n$ з неперервною за Лібшицем границею Γ . Позначимо через $V = (v_1, \dots, v_n)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ , t – поточний момент часу з проміжку, що нас цікавить, $[0, T]$, $0 < T < +\infty$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ – заданий вектор швидкості вітру, що задовольняє умову нестисливості:

$$\operatorname{div} u = u_{i,i} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad /1.1/$$

$f = f(x, t)$ – відома інтенсивність джерел аерозолів, концентрацію якого позначатимемо через $\psi(x, t)$. У рівнянні /1.1/ і всюди далі по індексах, що повторюються, передбачається підсумовування від 1 до n , $\psi_{,i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$.

Розглянемо задачу перенесення і дифузії пасивного аерозолу в приземному шарі атмосфери: знайти концентрацію $\psi(x, t)$ таку, що

$$\psi' + u_i \psi_{,i} - \{M_{ij} \psi_{,j}\}_{,i} + \sigma \psi = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad /1.2/$$

$$\psi = 0 \quad \text{на } \Gamma_\psi \times [0, T], \quad \operatorname{mes}(\Gamma_\psi) > 0, \quad \Gamma_\psi \subset \Gamma, \quad /1.3/$$

$$\mu_{ij} \psi_{,j} \nu_i + \alpha \psi = 0 \text{ на } \Gamma_q \times [0, T], \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_\psi, \quad /1.4/$$

$$\psi = \psi_0 \text{ в } \Omega, t=0. \quad /1.5/$$

Тут $\sigma = \sigma(x) \geq 0$ - коефіцієнт поглинання аерозолів; $\mu_{ij} = \mu_{ij}(x)$ - коефіцієнти турбулентної дифузії, що задовольняють звичайну умову симетрії та еліптичності:

$$\begin{cases} \mu_{ij} = \mu_{ji}, \\ \mu_{ij} \xi_i \xi_j \geq \mu_0 \xi_i \xi_i, \mu_0 = \text{const} > 0, \forall \xi_i \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad /1.6/$$

$\alpha = \alpha(x) \geq 0$ - коефіцієнт взаємодії аерозолів із зовнішнім середовищем; $\Gamma_\psi = \{x \in \Gamma \mid \nu_i u_i < 0\}$, $\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial t}$.

Вичерпні і фізично змістовні постановки задач про міграцію аерозолів розглянуті у праці [4]. Відзначимо, що такі задачі, як /1.1/, /1.6/, також виникають під час розв'язування екологічних проблем забруднення промисловими стоками водних басейнів [5], забруднення пестицидами сільськогосподарських угідь і ґрунтових вод.

2. Варіаційна постановка задачі. Введемо простори

$$\Phi = \{\varphi \in H(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_\psi\}, H = L^2(\Omega),$$

$$U = \{v \in L^\infty(\Omega)^n \cap H(\text{div}; \Omega) \mid \text{div } v = 0 \text{ в } \Omega\},$$

де $H^k(\Omega)$ - простори функцій Соболева, інтегрованих з квадратом в області Ω разом зі своїми всіма можливими похідними до k -го порядку включно, $H(\text{div}; \Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^n \mid \text{div } v \in L^2(\Omega)\}$; докладніше ці та наведені далі простори описані у праці [1].

Використовуватимемо такі форми:

$$\begin{cases} m(\varphi, \varphi) = \int_\Omega \varphi \varphi dx, & b_1(u; \varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega [\varphi \text{div } \varphi u - \varphi \text{div } \varphi u] dx, \\ b_2(u; \varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \varphi \varphi u_i \nu_i dy, & b(u; \varphi, \varphi) = b_1(u; \varphi, \varphi) + b_2(u; \varphi, \varphi), \\ a(\varphi, \varphi) = \int_\Omega \{\mu_{ij} \varphi_{,i} \varphi_{,j} + \sigma \varphi \varphi\} dx + \int_{\Gamma_q} \alpha \varphi \varphi dy, \\ \langle L, \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi dx \end{cases} \quad \forall \varphi, \varphi \in \Phi, \forall u \in U. \quad /2.1/$$

Розглянемо таке /одне із можливих/ варіаційне формулювання початково-крайової задачі /1.1/-1.6/:

$$\begin{cases} \text{задано } \psi_0 \in H, l \in L^2(0, T; \Phi'), u \in L^2(0, T; U); \\ \text{знайти } \psi \in L^2(0, T; \Phi) \text{ таку, що} \\ m(\psi'(t), \varphi) + b(u(t), \psi(t), \varphi) + a(\psi(t), \varphi) = \langle L(t), \varphi \rangle, \\ m(\psi(0) - \psi_0, \varphi) = 0 \end{cases} \quad \forall \varphi \in \Phi. \quad /2.2/$$

Застосовуючи інтегрування частинами і тотожність

$$b(u, \varphi, \varphi) = \int_{\Sigma} \varphi u_i \varphi_{,i} dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Sigma} [\varphi \operatorname{div} \varphi u - \right. \\ \left. - \varphi \operatorname{div} \varphi u] dx + \int_{\Gamma_4} \varphi \varphi u \nu dy \right\}, \quad \forall \varphi, \varphi \in \Phi \quad \forall u \in U, \quad /2.3/$$

неважко перевірити, що розв'язок початково-крайової задачі /1.1/- /1.6/ якщо він існує/ одночасно є розв'язком варіаційної задачі /2.2/.

Зуваження 2.1. Неважко переконатися [7], що неперервна симетрична білінійна форма $a(.,.) : \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ породжує на просторі Φ норму

$$\|\varphi\| = a^{\frac{1}{2}}(\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad /2.4/$$

Із визначення /2.1/ зрозуміло також, що трилінійні форми $b_k(.,.,.) : U \times \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ мають властивості:

$$\begin{cases} b_1(u, \varphi, \varphi) = -b_1(u, \varphi, \varphi), \\ b_2(u, \varphi, \varphi) \geq 0, \end{cases} \quad \forall u \in U, \quad \forall \varphi, \varphi \in \Phi. \quad /2.5/$$

Остання з властивостей /2.5/ дає змогу ввести на Φ ще одну норму:

$$\|\varphi\| = \{a(\varphi, \varphi) + b_2(u, \varphi, \varphi)\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall \varphi \in \Phi \quad /2.6/$$

3. Напівдискретизація Гальоркіна. Введемо послідовність підпросторів $\{\Phi_h\} \in \Phi$ таку, що

$$\dim \Phi_h = N(h) = N \rightarrow \infty \quad h \rightarrow 0, \quad /3.1/$$

$\bigcup_{h>0} \Phi_h$ щільно вкладені в Φ ,

Для кожного фіксованого значення $h \geq 0$ визначимо напівдискретну апроксимацію Гальоркіна $\psi_h \in \Phi_h$ як розв'язок задачі

$$\begin{cases} \text{знайти } \psi_h \in L^2(0, T; \Phi_h) \text{ таку, що} \\ m(\psi_h'(t), \varphi) + b(u(t), \psi_h(t), \varphi) + a(\psi_h(t), \varphi) = \langle l(t), \varphi \rangle, \\ m(\psi_h(0) - \psi_0, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \Phi_h. \end{cases} \quad /3.2/$$

Якщо $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ базис простору Φ_h , то розв'язок задачі /3.2/ можна подати у вигляді лінійної комбінації:

$$\psi_h = \sum_{j=1}^N q_j(t) \varphi_j \quad /3.3/$$

з невідомими коефіцієнтами $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t))$.

Підставляючи в рівняння задачі /3.3/ послідовно $\varphi = \varphi_i, i=1, \dots, N$, приходимо до такої задачі Коші для визначення цих невідомих:

$$\begin{cases} MQ'(t) + \{B(t) + A\}Q(t) = R(t), & t \in (0, T], \\ M[Q(0) - Q_0] = 0. \end{cases} \quad /3.4/$$

Оскільки

$$\begin{cases} \text{матриці } M = \{m(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N, A = \{a(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N, \\ \text{симетричні і додатно визначені,} \end{cases} \quad /3.5/$$

то задача Коші /3.4/ розв'язується однозначно. Отже, для кожного $h > 0$ напівдискретні апроксимації ψ_h розв'язку ψ задачі /2.2/ єдино визначаються задачею Коші /3.4/ і формулою /3.3/.

Зауваження 3.1. Неважко перевірити, що окладові матриці $B(t)$ мають властивості:

$$\begin{cases} \text{матриця } C(t) = \{b_1(u(t); \varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N & \text{кососиметрична,} \\ \text{матриця } D(t) = \{b_2(u(t); \varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N & \text{симетрична} \\ \text{і невід'ємна} \end{cases} \quad /3.6/$$

Відзначені факти разом із /3.5/ відіграють ключову роль у конструюванні методів розщеплення і роблять цілком обґрунтованою можливість їх успішного застосування для розв'язування задачі Коші /3.4/ [4].

4. Розв'язуваність варіаційної задачі. Підставляючи в рівняння /3.2/ $\varphi = \psi_h(t)$, знаходимо, що

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\psi_h(t)|^2 + \|\psi_h(t)\|^2 = \langle l(t), \psi_h(t) \rangle, & t \in (0, T], \\ |\psi_h(0)|^2 = m(\psi_h(0), \psi_0), \end{cases} \quad /4.1/$$

де $\|\cdot\|$ - норма простору $L^2(\Omega)$.

З останніх рівнянь випливають априорні оцінки:

$$\begin{aligned} |\psi_h(t)|^2 + \int_0^t \|\psi_h(\tau)\|^2 d\tau &\leq \\ &\leq |\psi_0|^2 + \int_0^t \|l(\tau)\|_*^2 d\tau, \quad \forall h > 0, \forall t \in (0, T], \end{aligned} \quad /4.2/$$

де $\|\cdot\|_*$ норма в просторі Φ' , спряженому до Φ .

Звідси робимо висновок, що

$$\begin{cases} \text{послідовність напівдискретних апроксимацій} \\ \{\psi_h\} \text{ обмежена в } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; \Phi), \end{cases} \quad /4.3/$$

і, отже, з цієї послідовності можна вибрати підпослідовність, яку знову позначимо як $\{\psi_h\}$, і функцію ψ з $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; \Phi)$ такі, що

$$\begin{cases} \{\psi_h\} \text{ збігаються до } \psi \text{ в } L^\infty(0, T; H) & * - \text{ слабо,} \\ \{\psi_h\} \text{ збігаються до } \psi \text{ в } L^2(0, T; \Phi) & \text{слабо.} \end{cases} \quad /4.4/$$

Теорема 4.1 /про коректність варіаційної задачі/.

Нехай виконані вclusions

$$\psi_0 \in H, \quad l \in L^2(0, T; \Phi'), \quad u \in L^2(0, T; U). \quad \circ \quad /4.5/$$

Тоді існує єдиний розв'язок ψ варіаційної задачі /2.2/, причому

$$\begin{cases} \psi \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; \Phi), \\ \psi' \in L^2(0, T; \Phi') \end{cases} \quad /4.6/$$

i

$$\|\psi(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi(\tau)\|^2 d\tau \leq \|\psi_0\|^2 + \int_0^t \|l(\tau)\|_*^2 d\tau, \quad \forall t \in [0, T]. \quad /4.7/$$

Доведення теореми завершується перевіркою, що функція з /4.4/ ψ задовольняє рівняння задачі /2.2/ і лише неістотно відрізняється від міркувань [1, 2].

5. Швидкість збіжності напівдискретних апроксимацій. Вважатимемо, що швидкість вкладки з /3.1/ характеризується властивостями /типovими для більшості просторів апроксимацій методу скінченних елементів [6, 7]/:

$$\begin{cases} \text{для кожного } \varphi \in \Phi \cap H^{k+1}(\Omega), k \geq 0, \\ \text{знайдуться функція } \varphi_h \in \Phi_h \text{ і} \\ \text{константа } C > 0, \text{ значення якої не} \\ \text{залежить від величин, що нас цікавлять, такі, що} \\ \|\varphi - \varphi_h\|_{m, \Omega} \leq C h^{k+1-m} \|\varphi\|_{k+1, \Omega}, \quad 0 \leq m \leq k. \end{cases} \quad /5.1/$$

Введемо також оператори ортогонального проектування $\Pi_h: \Phi \rightarrow \Phi_h$, які діють згідно з правилом

$$\|\psi - \Pi_h \psi\| = \inf_{\varphi \in \Phi_h} \|\psi - \varphi\|, \quad \forall \psi \in \Phi. \quad /5.2/$$

Тоді скасові похибки напівдискретизації

$$e_h(t) = \varepsilon_h(t) - E_h(t), \quad /5.3/$$

де

$$\varepsilon_h(t) = \psi_h(t) - \Pi_h \psi(t), \quad E_h(t) = \psi(t) - \Pi_h \psi(t) \quad /5.4/$$

задовольняють енергетичне рівняння

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varepsilon_h'(t)\|^2 + \|\varepsilon_h(t)\|^2 = m(E_h'(t), \varepsilon_h(t)) + \delta(E_h(t), \varepsilon_h(t)). \quad /5.5/$$

Останнє приводить до оцінки

$$|\varepsilon_h(t)|^2 + \int_0^t \|\varepsilon_h(\tau)\|^2 d\tau \leq K \{ |\varepsilon_h(0)|^2 + \int_0^t [|E'_h(\tau)|^2 + \|E_h(\tau)\|^2] d\tau \}. \quad /5.6/$$

З огляду на те, що /5.2/ і /5.1/ передбачають оцінку

$$\|E_h(\tau)\| \leq Ch^k \|\psi(\tau)\|_{k+1, \Omega} \quad \forall \tau \in [0, T], \quad /5.7/$$

і, зауважуючи, що оператор $\Pi_h : \Phi \rightarrow \Phi_h$ здійснює проектування лише за просторовими змінними, на основі нерівності трикутника, /5.6/ і /5.7/ приходимо до оцінки

$$\begin{aligned} & \|\psi(t) - \psi_h(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi(\tau) - \psi_h(\tau)\|^2 d\tau \leq \\ & \leq Kh^{2k} \{ \|\psi_0\|_F^2 + \|\psi(t)\|_F^2 + \int_0^t [\|\psi'(\tau)\|_F^2 + \|\psi(\tau)\|_F^2] d\tau \}, \quad /5.7/ \end{aligned}$$

де використаний простір $F = H^{k+1}(\Omega)$ з нормою $\|\cdot\|_F = \|\cdot\|_{k+1, \Omega}$ і $K = \text{const} > 0$ не залежить від h і ψ . Таким чином, доведена така теорема.

Теорема 5.1. /про збіжність напівдискретних апроксимацій/.

Нехай існує таке натуральне $k \geq 1$, що розв'язок ψ варіаційної задачі /2.2/ характеризується включеннями

$$\begin{cases} \psi \in L^\infty(0, T; F) \cap L^2(0, T; F \cap \Phi), \\ \psi' \in L^2(0, T; F), \psi_0 \in F, F = H^{k+1}(\Omega) \end{cases} \quad /5.8/$$

і його напівдискретні апроксимації Гальоркіна ψ_h відшукуються у просторах Φ_h із властивостями /5.1/.

Тоді послідовність $\{\psi_h(t)\}$ при $h \rightarrow 0$ збігається відносно норми

$$\|\psi\| = \left\{ \|\psi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|\psi\|_{L^2(0, T; \Phi)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

до розв'язку ψ задачі /2.2/. Більше того, швидкість збіжності похибки $e_h = \psi - \psi_h$ характеризується оцінкою /5.7/, яка показує, що $\|e_h\| = O(h^k)$.

6. Дискретизація варіаційної задачі по часу. Розіб'ємо відрізок часу $[0, T]$ на $N_T + 1$ рівні /хоча це необов'язково/ частини $[t_j, t_{j+1}]$ завдяки $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, \dots, N_T$, і розглянемо однокрокову рекурентну схему інтегрування задачі /3.2/:

$$\begin{cases} \text{задані параметри } \Delta t > 0, \quad \theta > 0 \quad \text{і } \psi^0 \in \Phi_h; \\ \text{знайти } \psi^{j+1} \in \Phi_h \text{ таку, що} \\ m(\psi^{j+\theta}, \varphi) + \frac{1}{2} \Delta t \delta(u(t_{j+\frac{1}{2}}), \psi^{j+\theta}, \varphi) + \Delta t \theta a(\psi^{j+\theta}, \varphi) = \\ = m(\psi^j, \varphi) + \Delta t (\theta - \frac{1}{2}) \delta(u(t_{j+\frac{1}{2}}), \psi^j, \varphi) + \Delta t \theta \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}), \psi^j \rangle, \\ \psi^{j+1} = \psi^j + \theta^{-1} [\psi^{j+\theta} - \psi^j], \quad j = 0, \dots, N_T. \end{cases} \quad /6.1/$$

Тут і нижче для скорочення запису введені позначення:

$$\begin{aligned}\psi^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\psi^{j+1} + \psi^j), \quad \dot{\psi}^{j+\frac{1}{2}} = \Delta t^{-1}(\psi^{j+1} - \psi^j), \\ \psi^{j+\theta} &= \psi^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\dot{\psi}^{j+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Застосовуючи лему Лакса-Мільграма, переконуємося, що рівняння задачі /6.1/ однозначно розв'язуються відносно $\psi^{j+\theta}$, якщо відомі значення розв'язку ψ^j із попереднього кроку по часу. Зауважимо, що рекурентний розв'язок задач /6.1/ починається після обчислення ψ^0 з рівняння

$$m(\psi^0 - \psi_0, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi_h. \quad /6.2/$$

Для визначення стійкості схеми /6.1/ в її рівнянні приймемо $\varphi = \psi^{j+\frac{1}{2}}$. Внаслідок нескладних перетворень отримаємо енергетичне рівняння:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\psi^{j+1}|^2 + \Delta t \|\psi^{j+1}\|^2 + \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|\psi^{j+1}\|^2 = \\ = \frac{1}{2}|\psi^j|^2 + \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|\psi^j\|^2 + \Delta t \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}), \psi^{j+\frac{1}{2}} \rangle, \quad j=0, \dots, N_T, \quad /6.3/\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\psi^{m+1}|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^m \|\psi^{j+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|\psi^{m+1}\|^2 = \\ = \frac{1}{2}|\psi^0|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^m \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}), \psi^{j+\frac{1}{2}} \rangle + \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|\psi^0\|^2, \quad /6.4/ \\ m=0, \dots, N_T.\end{aligned}$$

Беручи до уваги оцінки

$$|\langle l(t_{j+\frac{1}{2}}), \psi^{j+\frac{1}{2}} \rangle| \leq \frac{1}{2}\|\psi^{j+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}C\|l(t_{j+\frac{1}{2}})\|_*^2, \quad /6.5/$$

де $\|\cdot\|_*$ — норма в просторі Φ' і символ C , як і всюди далі, використаний для додатних констант, значення яких не залежать від величин, що нас цікавлять, на основі енергетичного рівняння /6.4/ та умови /6.2/ приходимо до апіорних оцінок:

$$\begin{aligned}|\psi^{m+1}|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^m \|\psi^{j+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|\psi^{m+1}\|^2 \leq \\ \leq |\psi^0|^2 + \Delta t(\theta - \frac{1}{2})\|\psi^0\|^2 + \Delta t C \sum_{j=0}^m \|l(t_{j+\frac{1}{2}})\|_*^2, \quad j=0, \dots, N_T. \quad /6.6/\end{aligned}$$

Звідси бачимо, що рекурентна схема /6.1/ безумовно/отосовно вибору кроку Δt /, стійка, якщо

$$\theta \geq \frac{1}{2}, \quad /6.7/$$

та умовно стійка, якщо

$$0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}, \quad \Delta t \leq \frac{2}{\alpha(1-2\theta)}, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad /6.8/$$

Нарешті, для оцінки похибок

$$\varepsilon^m = \psi^m - \psi_h(t_m), \quad m=0, \dots, N_T+1, \quad /6.9/$$

припустимо, що розв'язок ψ_h задачі /3.2/ такий, що

$$\psi_h \in C^3(0, T; \Phi_h). \quad /6.10/$$

Тоді, використовуючи розклади у ряди Тейлора в околі точки $t = t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{1}{2} \Delta t$ і рівняння задач /3.2/ і /6.1/, знаходимо, що похибки /6.9/ визначаються рівняннями

$$\begin{aligned} m(\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}, \varphi) + \theta(\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}, \varphi) + a(\varepsilon^{1+\theta}, \varphi) = \\ = -\Delta t(\theta - \frac{1}{2})a(\psi_h'(t_{j+\frac{1}{2}}), \varphi) - \Delta t^2 \langle R_j, \varphi \rangle, \quad j=0, \dots, N_T, \quad /6.11/ \\ m(\varepsilon^0, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \Phi_h. \end{aligned}$$

Тут функціонали $R_j \in \Phi'$, якщо виконані умови /6.7/. Остаточно, приймаючи в /6.11/ $\varphi = \varepsilon^{j+\frac{1}{2}}$ і, використовуючи попередні міркування, обчислимо, що

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{m+1}|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^m \|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t(\theta - \frac{1}{2}) \|\varepsilon^{m+1}\|^2 \leq \\ \leq 2\Delta t^2 T \left\{ (\theta - \frac{1}{2})^2 \|u_h'\|_{C(0, T; \omega)}^2 + \right. \\ \left. + C\Delta t^2 \max_{j=0, \dots, N_T+1} \|R_j\|_*^2 \right\}, \quad m=0, \dots, N_T. \end{aligned} \quad /6.12/$$

Таким чином, доведена така теорема.

Теорема 6.1. /про збіжність рекурентної схеми/. Нехай розв'язок $\psi_h(t)$ напівдискретної задачі /3.2/ задовольняє умову /6.10/. Позначимо через ψ^m його наближене значення в точці $t_m = m \Delta t$, обчислене за допомогою однокрокової рекурентної схеми /6.1/.

Тоді, якщо виконана одна з умов стійкості /6.7/ або /6.8/, похибки /6.9/ дискретизації по часу прямує до нуля /стосовно енергетичної норми $\{|\varepsilon^{m+1}|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^m \|\varepsilon^{j+\frac{1}{2}}\|^2\}^{1/2}$ / і при цьому справедливі априорні оцінки швидкості збіжності /6.12/. Зокрема, оптимальний порядок швидкості збіжності /дорівнює двом/ досягається вибором

$$\theta = \frac{1}{2} + O(\Delta t). \quad /6.13/$$

Зауваження 6.1. Зане запропонованої схеми інтегрування в часі у вигляді /6.1/ найзручніший для реалізації алгоритму рекурентних обчислень.

7. Висновок. У даній роботі з метою формулювання варіаційної постановки початково-крайової задачі про міграцію пасивних аерозолей у нестисливій атмосфері використане спеціальне трактування конвективних складових рівняння конвекції і дифузії /див. тотожність /2.3//. Такий підхід дав змогу, по-перше, повною

можливо застосувати енергетичні міркування для конструктивного до-
ведення коректності варіаційної задачі із залученням напівдискрет-
них за просторовими змінними апроксимацій Гальоркіна. Особливість
запропонованого формулювання така, що в стаціонарному випадку
коректність варіаційної задачі є простим наслідком теореми Лакса-
Німірґа [3].

По-друге, на основі результатів [8] отримані оцінки швидкості
збіжності згаданих напівдискретних розв'язків у просторах апрок-
симацій методу скінченних елементів.

Нарешті, для інтегрування розглянутої задачі в часі запропо-
новане однокрокова рекурентна схема, для якої на основі енерге-
тичних оцінок визначені умови стійкості і швидкісні збіжності.

Викликаючи самостійне зацікавлення, отримані результати
можуть служити обґрунтуванням для успішного аналізу міграції аеро-
зольних методами розщеплення [5], зокрема, по фізичних процесах.

І. Д ю в о Г., Л и о н с Ж.-М. Неравенства в механике и фи-
зике. М.: Наука, 1980. 383 с. 2. Л а д ы ж е н с к а я О.А.
Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
3. З у б о в В.М., Ш и н к а р е н к о Г.А. Розв'язуваність та
апроксимація варіаційних задач переносу та дифузії домішок у не-
стисливій атмосфері // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992.
Вип. 37. С.55-60. 4. М а р ч у к Г.И. Математическое модели-
рование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
5. М а р ч у к Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 264 с.
6. С т р е н г Г., Ф и к с Дж. Теория метода конечных элемен-
тов. М.: Мир, 1977. 350 м. 7. С ь я р л е Ф. Метод конечных эле-
ментов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с. 8. Ш и н к а-
р е н к о Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-
крайових задач. К., Наук.-метод. каб. вищ. освіти, 1991. 88 с.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.94

Б.В.Ковальчук, О.І.Гой

УЗАГАЛЬНЕНЕ ВАРІАЦІЙНЕ РІВНЯННЯ
І ТЕОРЕМА ВЗАЄМНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ
УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА

Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω , обмежену поверхнею S , в природному стані має температуру t_0 . Внаслідок дії теплових або силових чинників тіло деформуватиметься, а його температура змінюватиметься. У тілі виникнуть переміщення u_i і приріст температури $\theta = t - t_0$, а це в свою чергу приведе до виникнення деформацій e_{ij} та напружень σ_{ij} , які є функціями координат x_i і часу τ . Причому надалі вважатимемо, що зміна температури невелика і не спричиняє істотних змін температурних характеристик матеріалу.

Для випадку, коли час релаксації теплового потоку має різні значення для головних напрямів, узагальнений закон теплопровідності можна записати у вигляді

$$(1 + \tau_p \frac{\partial}{\partial \tau}) q_p = -\lambda_{pj}^t t_{,j} \quad (p, j = 1, 2, 3), \quad /1/$$

де τ_p – час релаксації теплового потоку в напрямі осі x_p ; λ_{pj}^t – коефіцієнти теплопровідності; q_p – компоненти вектора теплового потоку.

Якщо в початковий момент часу швидкість нагрівання та швидкість переміщення дорівнюють нулю і внутрішні джерела тепла відсутні, то на основі рівняння /1/ можна одержати інтегродиференціальні рівняння теплопровідності [1]:

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i} \int_0^\tau \theta_{,i,j}(M, \xi) \exp\left(-\frac{\xi - \tau}{\tau_i}\right) d\xi = t_0 \beta_{ij} \dot{e}_{ij} + c_e \dot{\theta} - \omega_t. \quad /2/$$

Тут c_e – об'ємна теплоємність за сталої деформації; ω_t – густина внутрішніх джерел тепла; $\beta_{ij} = \alpha_{kl}^t C_{ijkl}$, де C_{ijkl} – декартові компоненти тензора пружної жорсткості анізотропного тіла; α_{ij}^t – температурні коефіцієнти лінійного розширення анізотропного тіла.

У даній роботі розглянута аналогічна релаксаційна модель, для якої одержане узагальнене варіаційне рівняння і доведена теорема взаємності розв'язків крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла.

1. Варіаційне рівняння. Запишемо рівняння /1/ у вигляді

$$l_p q_p = -\lambda_{pj}^t \theta_{,j}, \quad /1'/$$

Введемо вектор H , який зв'язаний з вектором теплового потоку співвідношенням

$$q = t_0 H. \quad /3/$$

Із /1'/ і /3/ випливає, що

$$\theta_{,p} = -t_0 k_{pj} l_j \dot{H}_j, \quad /4/$$

де k_{pj} — обернена матриця для λ_{pj}^t .

Запишемо тепер відоме рівняння швидкості росту ентропії S_t [2]:

$$t_0 \dot{S}_t = c_e \dot{t} + t_0 \beta_{ij} \dot{e}_{ij}, \quad /5/$$

яке можна подати також у вигляді

$$\dot{H}_{i,i} = -\frac{c_e}{t_0} \dot{\theta} - \beta_{ij} \dot{e}_{ij}. \quad /5'/$$

Помноживши рівняння /4/ на δH_i , проінтегруємо його по області Ω і застосуємо теорему Гаусса-Остроградського. Використавши /5'/, одержимо

$$\begin{aligned} \int_S \theta \delta H_i n_i ds + \frac{c_e}{t_0} \int_{\Omega} \theta \delta \theta d\Omega + \int_{\Omega} \beta_{ij} \theta \delta e_{ij} d\Omega + \\ + t_0 \int_{\Omega} k_{ij} \delta H_i l_j \dot{H}_j d\Omega = 0. \end{aligned} \quad /6/$$

З іншого боку, варіацію роботи деформації можна подати у вигляді [3]

$$\begin{aligned} \delta W_e = \int_{\Omega} x_i \delta u_i d\Omega + \int_S p_i \delta u_i ds - \rho \int_{\Omega} \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \beta_{ij} \theta \delta e_{ij} d\Omega, \end{aligned} \quad /7/$$

де в правій частині цього рівняння присутні варіації переміщень, деформацій і відсутні варіації температури.

Вилучивши із /6/ і /7/ члени, які містять варіації деформацій, приходимо до узагальненого варіаційного рівняння:

$$\delta(W_e + P_t + D) = \delta L - \int_S \theta \delta H_n dS, \quad /8/$$

де

$$\delta H_n = n_i \delta H_i, \quad P_t = \frac{c_e}{2t_0} \int_{\Omega} \theta^2 d\Omega, \\ \delta D = t_0 \int_{\Omega} \kappa_{ij} \delta H_i l_j \dot{H}_j d\Omega. \quad /9/$$

З формули /8/ випливає, що варіація суми роботи деформації, теплового потенціалу і функції дисипації дорівнює віртуальній роботі зовнішніх сил, сил інерції і нагріванню поверхні тіла.

2. Теорема взаємності. Розглянемо для рівняння теплопровідності /2/ дві системи величин $\{x_i, \rho_i, \omega_i, h\}$ і $\{x'_i, \rho'_i, \omega'_i, h'\}$ де h, h' – поверхневі нагріви. Переміщення і температуру позначимо відповідно $\{u_i, t\}$ і $\{u'_i, t'\}$. Припускаємо, що деформації та напруження є функціями класу $C^{(1)}$, а переміщення і температура – функціями класу $C^{(2)}$.

На основі співвідношення Дугамеля-Неймана зв'язок між компонентами тензорів деформацій, напружень і температури запишемо так [2, 3]:

$$b_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} \theta, \quad \sigma'_{ij} = c_{ijkl} e'_{kl} - \beta'_{ij} \theta'. \quad /10/$$

Перша частина теореми взаємності доведена в монографії [3]. Там наведене рівняння

$$\int_S (\bar{\rho}_i \bar{u}'_i - \bar{\rho}'_i \bar{u}_i) dS + \int_{\Omega} (\bar{x}_i \bar{u}'_i - \bar{x}'_i \bar{u}_i) d\Omega + \int_{\Omega} \beta_{ij} (\bar{e}'_{ij} \bar{\theta} - \bar{e}_{ij} \bar{\theta}') d\Omega = 0, \quad /11/$$

де $\bar{\theta}$ – трансформанта перетворення Лапласа по τ .

Доведемо другу частину теореми взаємності. Для цього розглянемо рівняння теплопровідності /2/ для обох систем величин за таких початкових умов:

$$u_i(M, 0) = 0, \quad \dot{u}_i(M, 0) = 0, \quad u'_i(M, 0) = 0, \quad \dot{u}'_i(M, 0) = 0, \quad M \in \Omega \quad /12/$$

та за крайових умов:

$$\theta(\rho, \tau) = h(\rho, \tau), \quad \theta'(\rho, \tau) = h'(\rho, \tau), \quad \rho \in S, \quad \tau > 0, \quad /13/$$

$$\theta(M, 0) = 0, \quad \theta'(M, 0) = 0, \quad M \in \Omega. \quad /14/$$

За таких умов, застосовуючи до рівняння теплопровідності /2/ для обох систем величин перетворення Лапласа по часу, одержуємо

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i s + 1} \bar{\theta}_{,ij} = t_0 \beta_{ij} s \bar{e}_{ij} + c_e s \bar{\theta} - \bar{\omega}_t, \quad /15/$$

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i s + 1} \bar{\theta}'_{,ij} = t_0 \beta_{ij} s \bar{e}'_{ij} + c_e s \bar{\theta}' - \bar{\omega}'_t, \quad /16/$$

— параметр перетворення Лапласа.

Помноживши тепер рівняння /15/ і /16/ відповідно на $\bar{\theta}'$ і $\bar{\theta}$, додаємо їх почленно, а потім інтегруємо по області Ω . В результаті матимемо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i s + 1} (\bar{\theta}_{,ij} \bar{\theta}' - \bar{\theta}'_{,ij} \bar{\theta}) d\Omega &= \int_{\Omega} \beta_{ij} (\bar{e}_{ij} \bar{\theta}' - \bar{e}'_{ij} \bar{\theta}) d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} (\bar{\omega}_t \bar{\theta}' - \bar{\omega}'_t \bar{\theta}) d\Omega. \end{aligned} \quad /17/$$

Із /17/, враховуючи співвідношення

$$(\lambda_{ij}^t \bar{\theta}_{,i} \bar{\theta}')_{,j} = \lambda_{ij}^t \bar{\theta}_{,ij} \bar{\theta}' + \lambda_{ij}^t \bar{\theta}_{,j} \bar{\theta}'_{,i}, \quad /18/$$

$$(\lambda_{ij}^t \bar{\theta}'_{,i} \bar{\theta})_{,j} = \lambda_{ij}^t \bar{\theta}'_{,ij} \bar{\theta} + \lambda_{ij}^t \bar{\theta}'_{,j} \bar{\theta}_{,i} \quad /19/$$

і рівняння /16/, після застосування теореми Гауса-Остроградського знайдемо

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i s + 1} (\bar{h}' \bar{\theta}_{,j} - \bar{h} \bar{\theta}'_{,j}) n_i dS - st_0 \int_{\Omega} \beta_{ij} (\bar{e}_{ij} \bar{\theta}' - \\ - \bar{e}'_{ij} \bar{\theta}) d\Omega + \int_{\Omega} (\bar{\omega}_t \bar{\theta}' - \bar{\omega}'_t \bar{\theta}) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad /20/$$

Рівняння /20/ є другою частиною теореми взаємності.

На основі /11/ і /20/ запишемо загальну формулу:

$$\begin{aligned} st_0 \int_S (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) dS + t_0 s \int_{\Omega} (\bar{x}_i \bar{u}'_i - \bar{x}'_i \bar{u}_i) d\Omega = \\ = \int_S \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i s + 1} (\bar{h}' \bar{\theta}_{,i} - \bar{h} \bar{\theta}'_{,i}) n_j dS + \int_{\Omega} (\bar{\omega}_t \bar{\theta}' - \bar{\omega}'_t \bar{\theta}) d\Omega. \end{aligned} \quad /21/$$

Нарешті, застосувавши до рівняння /21/ обернене перетворення Лапласа, одержимо

$$\begin{aligned} t_0 \int_S \left\{ \int_0^{\tau} [p_i(M, \tau - \tau_0) \frac{\partial u'_i(M, \tau_0)}{\partial \tau_0} - p'_i(M, \tau - \tau_0) \frac{\partial u_i(M, \tau_0)}{\partial \tau_0}] d\tau_0 \right\} dS + \\ + t_0 \int_{\Omega} \left\{ \int_0^{\tau} [x_i(M, \tau - \tau_0) \frac{\partial u'_i(M, \tau_0)}{\partial \tau_0} - x'_i(M, \tau - \tau_0) \frac{\partial u_i(M, \tau_0)}{\partial \tau_0}] d\tau_0 \right\} d\Omega = \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} \left\{ \int_0^{\tau} [\theta'(M, \tau - \tau_0) \omega_t(M, \tau_0) - \theta(M, \tau - \tau_0) \omega'_t(M, \tau_0)] d\tau_0 \right\} d\Omega +$$

$$+ \int_S n_j \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i} \left\{ \int_0^{\tau} [h'(M, \tau - \tau_0) \varphi_i(M, \tau_0) - h(M, \tau - \tau_0) \varphi'_i(M, \tau_0)] d\tau_0 \right\} dS, \quad /22/$$

де

$$\varphi_i(M, \tau) = \int_0^{\tau} \theta_{,i}(M, \xi) \exp\left(\frac{\xi - \tau}{\tau_i}\right) d\xi. \quad /23/$$

Таким чином, доведена узагальнена теорема взаємозв'язаної динамічної задачі термопружності анізотропного тіла з урахуванням ортотропії часу релаксації теплового потоку.

І. К о л я н о Ю.М., К о в а л ь ч у к Б.В., Г о й О.И.
Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела, учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока // Изв. высш. уч. заведений. Математика. 1988. № 9. С.81-83. 2. Н о - в а ц к и й В. Теория упругости. М., 1975. 3. П о д с т р и - г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.94

УДК 519.6

С.Б.Костенко, Б.О.Попов
РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ФУНКЦІЙ
МНОГОЧЛЕННИМИ СПЛАЙНАМИ

Для прискорення обчислення математичних функцій розглядаються нові підходи до вибору ланок сплайнів, за допомогою яких можна здійснити рівномірне наближення.

Теорема 1. Нехай $f(x) \in C^2[a, b]$ і похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ перетворюється в нуль в s внутрішніх точках $C = \{c_i\}_{i=1}^s$ інтервалу $[a, b]$, $s = 0, 1, 2, \dots (s < z)$, а в інших точках цього інтервалу не дорівнює нулю. Тоді максимальна похибка ε рівномірного наближення чебишовими відрізками сталих функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ при $w(x) \equiv 1$ із заданою кількістю z цих відрізків, де $z \rightarrow \infty$ можна знайти за формулою

$$\varepsilon = \frac{1}{2^z} |f(a) + 2 \sum_{i=1}^s (-1)^i f(c_i) + (-1)^{s+1} f(b)| [1 + O(s(\frac{b-a}{z})^2)]. \quad /1/$$

Формула /1/ точніше, ніж відомий вираз [2].

© Костенко С.Б., Попов Б.О., 1995

Якщо функція $f(x)$ - монотонна, то формула для обчислення похибки наближення є точною і виглядає так

$$\varepsilon = |f(a) - f(b)|/2z.$$

Наслідок. В умовах теореми 1 розміщення вузлів сплайну $Z = \{z_i\}_{i=0}^z$, $a = z_0 < z_1 < \dots < z_z = b$ за асимптотичного рівномірного абсолютного наближення визначається за формулою

$$z_i = f^{-1}((-1)^i [f(a) + 2 \sum_{k=1}^z (-1)^k f(c_k) - \frac{i}{z} E]), i = \overline{0, z},$$

де $E = f(a) + 2 \sum_{i=1}^z (-1)^i f(c_i) + (-1)^{z+1} f(b)$, $c_{j-1} < z_j \leq c_j$, $c_0 = a$, $c_{z+1} = b$; $f^{-1}(u)$ - функція обернена до функції $f(x)$.

У випадку рівномірного абсолютного наближення монотонної функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ розміщення вузлів $\{z_i\}_{i=0}^z$ визначається як

$$z_i = f^{-1}(f(a) + \frac{i}{z} [f(b) - f(a)]), i = \overline{0, z}.$$

Теорема 2. Нехай $f(x) \in C^2[a, b]$, $f(x) > 0$ при $x \in [a, b]$ і похідна $f'(x)$ перетворюється в нуль в S точках $C = \{c_i\}_{i=1}^S$ інтервалу (a, b) , $S = 0, 1, 2, \dots$ ($S \leq z$), а в інших точках цього інтервалу не дорівнює нулю. Тоді максимальна похибка δ рівномірного відносного наближення чебишовими відрізками оталих із заданою кількістю z цих відрізків при $z \rightarrow \infty$ обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{|1 - f(a)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^S f(c_i)^{(-1)^i \frac{1}{2}} f(b)^{\frac{(-1)^{S+1}}{2}}|}{1 + f(a)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^S f(c_i)^{(-1)^i \frac{1}{2}} f(b)^{\frac{(-1)^{S+1}}{2}}} [1 + o(\frac{S}{z} (\frac{b-a}{z})^2)].$$

Для монотонної на проміжку $[a, b]$ функції $f(x)$ формула для обчислення похибки набирає вигляду

$$\delta = |f(b)^{\frac{1}{2}} - f(a)^{\frac{1}{2}}| / (f(b)^{\frac{1}{2}} + f(a)^{\frac{1}{2}}).$$

Наслідок. В умовах теореми 2 розміщення вузлів $Z = \{z_i\}_{i=0}^z$ асимптотичного рівномірного відносного наближення функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ визначається як

$$z_i = f^{-1}(E^{(-1)^{i+1} \frac{1}{2}} f(a)^{(-1)^i \frac{1}{2}} (\prod_{k=1}^S f(c_k)^{2(-1)^k})^{(-1)^{i+1} \frac{1}{2}}), i = \overline{0, z},$$

де $E = f(a) \prod_{i=1}^S f(c_i)^{(-1)^i \frac{1}{2}} f(b)^{\frac{(-1)^{S+1}}{2}}$, $c_{j-1} < z_j \leq c_j$, $c_0 = a$, $c_{S+1} = b$.

Якщо функція $f(x)$ на $[a, b]$ монотонна то

$$z_i = f^{-1}(f(a)^{(z-i)/2} f(b)^{i/2}), i = \overline{0, z}.$$

Рівномірне наближення функцій многочленними сплайнами досліджено у праці [2]. Використовуючи замість останнього коефіцієнта многочлена степеня m величину $W = 2^{\pm i}$, $i = 1, 2, \dots$, одержуємо

$$V_{m-1}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i + W x^m.$$

/2/

Величину w вибираємо близькою до відповідного коефіцієнта найліпшого чебишового наближення многочленом. Такі вирази називають економічними, оскільки при обчисленні на ЕОМ вони дають економію часу. Це досягається завдяки тому, що операція множення замінюється зсувом або додаванням порядків відповідних двійкових зображень.

Головним чином використовують лінійні економічні наближення:

$$V_0(x) = A + wx. \quad /3/$$

Функція похибки такого наближення для функції $f(x)$ визначається як

$$\mu(x) = f(x) - A - wx = (f(x) - wx) - A.$$

Таким чином, наближення функції $f(x)$ економічним лінійним виразом зводиться до наближення функції $\varphi(x) = f(x) - wx$ постійною, а у випадку кускової апроксимації рівномірне наближення функції $f(x)$ економічним лінійним сплайном /сплайном з ланками вигляду /3/ / зводиться до наближення чебишовими відрізками постійних. Властивості таких наближень впливають з теорем 1 і 2, а також з їхніх наслідків.

Для парних і непарних функцій вибір виразу економічних наближень доцільніше здійснювати відповідно до структури ряду розкладу функції за степенями аргументу. Якщо функція $f(x)$ парна, то здійснюватимемо її наближення, а якщо непарна, наближення функції $f(x)/x$ економічним виразом вигляду

$$\tilde{V}_0(x) = A + wx^2, \quad /4/$$

де величина w вибирається аналогічно. Як і у випадку наближення лінійними економічними сплайнами наближення парних і непарних функцій сплайнами з ланками вигляду /4/ можна звести до наближення чебишовими відрізками постійних.

Парні та непарні функції належать до множини функцій, що зображаються такими степеневими рядами:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{ip+s}, \quad |x| < R. \quad /5/$$

Ці функції зручно наближати сплайнами з ланками у вигляді многочленів за степенями x^2 :

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^m d_i x^{ip+s}. \quad /6/$$

Розглянемо властивості таких сплайнів.

Теорема 3. Максимальна похибка ε рівномірного абсолютного наближення функції /5/ чебишовим сплайном з z ланками вигляду /6/ при $\omega(x) \equiv 1$ на проміжку $[0, \beta]$, $\beta < R$ визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{2\beta^{p(m+1)+s}}{(4z)^{m+1}} \rho^{m+1} \alpha_{m+1} \left[\frac{1}{1+s/(m+1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{m+1} - i \right) \times \right. \\ \left. \times \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j \\ k=1, \infty}} \frac{\beta^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1! \dots n_k! \{(1+n_1+\dots+kn_k)\rho + \frac{s}{m+1}\}} \prod_{e=1}^k \left(\frac{(m+2)_e}{e!} \frac{\alpha_{e+m+1}}{\alpha_{m+1}} \right)^{n_e} \right] \left[1 + O\left(\frac{\beta}{z}\right) \right].$$

Наслідок. Границі ланок $Z = \{z_i\}_{i=0}^z$ асимптотичного рівномірного абсолютного наближення функції /5/ сплайном з z ланками вигляду /6/ на проміжку $[0, \beta]$ задаються рівняннями:

$$\frac{z}{\beta} \left[\frac{1}{1+\frac{s}{m+1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{m+1} - i \right) \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j \\ k=1, \infty}} \frac{\beta^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1! n_2! \dots n_k! \{(1+n_1+\dots+kn_k)\rho + \frac{s}{m+1}\}} \times \right. \\ \left. \times \prod_{e=1}^k \left(\frac{(m+2)_e}{e!} \frac{\alpha_{e+m+1}}{\alpha_{m+1}} \right)^{n_e} \right] = \frac{1}{1+\frac{s}{m+1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{m+1} - i \right) \times \\ \times \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j \\ k=1, \infty}} \frac{z_i^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1! \dots n_k! \{(1+n_1+\dots+kn_k)\rho + \frac{s}{m+1}\}} \times \prod_{e=1}^k \left(\frac{(m+2)_e}{e!} \frac{\alpha_{e+m+1}}{\alpha_{m+1}} \right)^{n_e}.$$

Теорема 4. Якщо для функції $f(x)$ і для функції $1/f(x)$ існують розклади в ряди за степенями аргументу, то максимальна похибка δ рівномірного відносного наближення функції $f(x)$ вигляду /5/ чебишовим сплайном із z ланками вигляду /6/ на проміжку $[0, \beta]$, $\beta < R$ визначається за формулою

$$\delta = \frac{2\beta^{p(m+1)}}{(4z)^{m+1}} \alpha_{m+1} \beta_0 \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{m+1} - i \right) \times \right. \\ \left. \times \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j \\ k=1, \infty}} \frac{\beta^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1! \dots n_k! (1+n_1+\dots+kn_k)} \prod_{e=1}^k \left(\frac{(m+2)_e}{e!} \frac{\alpha_{e+m+1}}{\alpha_{m+1}} \frac{\beta_{e-q}}{\beta_0} \right)^{n_e} \right] \left[1 + O\left(\frac{\beta}{z}\right) \right],$$

де $1/f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^{ip-s}$.

Наслідок. Границі ланок $Z = \{z_i\}_{i=0}^z$ асимптотичного рівномірного відносного наближення функції $f(x)$ сплайном з z ланками вигляду /6/, якщо для функцій $f(x)$ і $1/f(x)$ існують зображення /5/ і /7/ відповідно, є розв'язками рівняння

$$\frac{z}{\beta} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{m+1} - i \right) \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j \\ k=1, \infty}} \frac{\beta^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1! \dots n_k! (1+n_1+\dots+kn_k)} \times \right.$$

$$\times \prod_{e=1}^k \left(\sum_{q=1}^{\ell} \frac{(m+2)_q}{q!} \frac{\alpha_{q+m+1}}{\alpha_{m+1}} \frac{\beta_{e-q}}{\beta_0} \right)^{n_e} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{m+1} - i \right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=j \\ k=1, \infty}} \frac{Z_i^{p(n_1+2n_2+\dots+kn_k)}}{n_1! \dots n_k! (1+n_1+\dots+kn_k)} \prod_{\ell=1}^k \left(\sum_{q=1}^{\ell} \frac{(m+2)_q}{q!} \frac{\alpha_{q+m+1}}{\alpha_{m+1}} \frac{\beta_{e-q}}{\beta_e} \right)^{n_e}.$$

Доцільність запропонованих підходів до вибору структури ланок сплайнів проілюструємо на такому прикладі.

Приклад. Здійснимо рівномірне абсолютне наближення функції $f(x) = \cos x$ сплайнами з ланками різного вигляду на проміжку $[0, \pi/2]$. Похибки відповідних наближень для різних значень z наведені у таблиці /верхнє значення – похибка, визначена теоретично, за допомогою однієї із виведених формул; нижнє – максимальна із похибок, отриманих на кожній ланці сплайну внаслідок реалізації методу найліпших чебишових наближень/. Приклад підтверджує також точність отриманих формул.

Вигляд ланки сплайну	z = 2	z = 4	z = 8
A	$2,5000 \cdot 10^{-1}$	$1,25000 \cdot 10^{-1}$	$6,2500 \cdot 10^{-1}$
	$2,5000 \cdot 10^{-1}$	$1,2500 \cdot 10^{-1}$	$6,2600 \cdot 10^{-1}$
A + wx	$1,1756 \cdot 10^{-1}$	$5,8781 \cdot 10^{-2}$	$2,9390 \cdot 10^{-2}$
	$1,1756 \cdot 10^{-1}$	$5,8781 \cdot 10^{-2}$	$2,9390 \cdot 10^{-2}$
A + Bx	$2,2430 \cdot 10^{-2}$	$5,6075 \cdot 10^{-3}$	$1,4019 \cdot 10^{-3}$
	$2,2637 \cdot 10^{-2}$	$5,6232 \cdot 10^{-3}$	$1,4104 \cdot 10^{-3}$
A + wx ²	$5,8425 \cdot 10^{-2}$	$2,9213 \cdot 10^{-2}$	$1,4606 \cdot 10^{-2}$
	$5,8425 \cdot 10^{-2}$	$2,9213 \cdot 10^{-2}$	$1,4606 \cdot 10^{-2}$
A + Bx ²	$6,9953 \cdot 10^{-3}$	$1,7488 \cdot 10^{-3}$	$4,3721 \cdot 10^{-4}$
	$6,9968 \cdot 10^{-3}$	$1,7489 \cdot 10^{-3}$	$4,3721 \cdot 10^{-4}$

де $w = -1/2$.

І. Б л а г о в е щ е н с к и й Ю.В., Т е с л е р Г.С. Вычисление элементарных функций на ЭВМ. К.: Техника, 1977. 205 с.
2. П о п о в Б.О. Равномерное приближение сплайнами. К.: Наук. думка, 1989. 272 с.
3. П о п о в Б.О., Т е с л е р Г.С. Приближение функций для технических приложений. К.: Наук. думка, 1980. 350 с.

Стаття надійшла до редакції 3.02.94 р.

Марія Д.Мартиненко, Н.В.Горбачова

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ОДНІЄЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ
КОШІ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

В області $D = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$ розглянемо таку задачу Коші:

$$\prod_{k=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = f(u, x, t), \quad (x, t) \in D; \quad /1/$$

$$\frac{\partial^l u(x, 0)}{\partial t^l} = \varphi_l(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq l \leq 2m-1. \quad /2/$$

Припустимо, що $a_k \neq a_l, k \neq l, |\varphi_0(x)| > 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$.
 Та задача /1/-/2/ має єдиний класичний розв'язок в області D .
 Крім цього, вважаємо, що $f(u, x, t)$ обмежена, неперервна та задовольняє умову Ліпшиця по змінній u зі сталою L , яка не залежить від $(x, t) \in D$.

Задачі /1/-/2/ поставимо у відповідність таку лінійну задачу:

$$\prod_{k=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tilde{u} = \kappa \tilde{u}, \quad (x, t) \in D, \quad /3/$$

$$\frac{\partial^l \tilde{u}(x, 0)}{\partial t^l} = \varphi_l(x), \quad 0 \leq l \leq 2m-1, \quad /4/$$

де

$$\kappa = \frac{f(u_0, x, t)}{u_0}, \quad u_0 \equiv u(x, 0) = \varphi_0(x).$$

Оцінимо близькість розв'язків задач /1/-/2/ та /3/-/4/. Для цього позначимо через v їхню різницю: $v = u - \tilde{u}$. Тоді з /1/-/4/ дістанемо:

$$\prod_{k=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v = f(u, x, t) - \kappa \tilde{u} \equiv F(u, \tilde{u}, x, t), \quad /5/$$

$$\frac{\partial^l v(x, 0)}{\partial t^l} = 0, \quad 0 \leq l \leq 2m-1. \quad /6/$$

Звідки на основі відомої теореми Боджіо [4] та принципу Дюгамеля [1] матимемо таке інтегральне зображення для v :

$$v(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \alpha_{2m-1, k} \int_0^t \left\{ \int_0^{x+a_k(t-\tau)} \frac{[x+a_k(t-\tau)-\xi]^{2m-2}}{(2m-2)!} F(u, \tilde{u}, \xi, \tau) d\xi - \right. \\ \left. - \int_0^{x-a_k(t-\tau)} \frac{[x-a_k(t-\tau)-\xi]^{2m-2}}{(2m-2)!} F(u, \tilde{u}, \xi, \tau) d\xi \right\} d\tau, \quad /7/$$

де сталі $\alpha_{2m-1, k}$ є розв'язками такої системи алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{2m-1, k} a_k^{2l+1} = \delta_{l, m-1} \quad (l = \overline{0, m-1}), \quad \delta_{l, m} = \begin{cases} 0, & l \neq m, \\ 1, & l = m. \end{cases} \quad /8/$$

Система /8/ має єдиний розв'язок, оскільки її визначник є визначником Вандермонда, який завжди не дорівнює нулю при $a_k \neq a_l$, $k \neq l$.

Звичайними міркуваннями з формули /7/ маємо таку нерівність при $(x, t) \in D_\Delta$, де D_Δ - найбільший з трикутників, утворених прямими $\xi = x + a_k(t - \tau)$, $\xi = x - a_k(t - \tau)$ та $\xi = 0$; $k = \overline{1, m}$:

$$\max_{(x, t) \in D_\Delta} |v| \leq \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{|\alpha_{2m-1, k}|}{a_k (2m)!} (x + k)}{1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{|\alpha_{2m-1, k}|}{a_k (2m)!} A_{km}} \max_{(x, t) \in D_\Delta} |\tilde{u} - u_0|, \quad /9/$$

де

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{|\alpha_{m-1, k}|}{a_k (2m)!} 2A_{km} < 1, \quad /10/$$

$$A_{km} = \max_{(x, t) \in D_\Delta} \left\{ (x + a_k t)^{2m} - (x - a_k t)^{2m} \right\},$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in (-\infty, +\infty), t \in [0, \tau]} |K(x, t)|.$$

Лінеаризація /3/-/4/ може бути ефективно спрощена, якщо замість $K(x, t)$ у /3/ взяти $K_0 = K(x_0, 0)$. Тоді у нерівності /9/ замість K, u_0 треба взяти $|K_0|, u_0(x_0)$ відповідно. Точку x_0 вибираємо з умови $\varphi(x_0) \neq 0$.

Дана стаття є узагальненням праць [2, 3].

І. Кур'янт Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир. 1964. С.832. 2. Мартиненко М.Д. Басьяні Х. Лінеаризація для нелінійної задачі Коші першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.35. С.69-72. 3. Мартиненко М.Д., Басьяні Х. Лінеаризація для однієї задачі Дарбу другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 37. 1992. С.84-85. 4. Boggio T. Sull integrazione di alcuna equazioni lineari alle derivate parziali // Ann. Mat. Ser. III. 1903. Vol. 8. P.101.

Стаття надійшла до редколегії 25.08.93

І.С.Муха, Я.Г.Савула

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ
ТОНКОСТІННИХ ІНУЧКИХ ТІЛ

Тонкостінні тіла є поширеними елементами конструкцій, що використовуються в авіабудуванні, енергетичному машинобудуванні і будівництві. У сучасній механіці існує багато різних теорій пружного деформування тонкостінних тіл, загальний підхід до побудови яких розглянутий у праці [7]. Усіх їх об'єднує той факт, що в рамках цих теорій внаслідок нелінійних залежностей Коші між деформаціями і переміщеннями виникають складні системи диференціальних рівнянь. Застосування таких теорій для побудови чисельних схем веде до громіздких обчислень, обсяг яких часто перевищує можливості сучасних комп'ютерів.

У даній роботі запропонований дуже простий і наочний варіант нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка. Він відрізняється від відомих аналогів тим, що під час його побудови ніде не нехтувались члени порядку $K_1 h$ порівняно з одиницею. Крім цього, слід відзначити, що шляхом граничного переходу із запропонованих рівнянь можна отримати рівняння нелінійної класичної теорії [6], застосовуючи більш жорсткі гіпотези деформування типу Кірхгофа-Лява, а також лінійні рівняння уточненої теорії типу Тимошенка [10] у разі відмови від нелінійних членів у співвідношеннях Коші.

1. Тривимірне теорія деформування. Нехай недеформоване пружне тіло віднесене до криволінійної системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ і задане в ній за допомогою радіус-вектора
$$\vec{R} = \vec{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \vec{V}, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \omega_3.$$

Припустимо, що тіло є тонкостінним, тобто характерний розмір тіла вздовж напрямку α_3 істотно менший від двох інших. Надалі вважатимемо, що коваріантна база $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$ недеформованої конфігурації є триортogonalною. Усі співвідношення записуватимемо для фізичних компонентів векторів і тензорів, тому круглі дужки біля індексів відсутні.

Унаслідок пружної деформації тіло переходить в актуальну конфігурацію і у фіксований момент часу t задається в ній радіус-вектором

$$\bar{R}^t = \bar{R}^t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in V.$$

Локальний рух матеріальної частинки визначає тензор градієнта руху F , компоненти якого в недеформованій базі мають вигляд

$$F = \delta_{ij} + \frac{1}{H_i H_j} \dot{V}_j (H_i u_i), \quad /1.1/$$

де u_i - компоненти вектора переміщень точок тіла під час деформації; $\dot{V}_j$ - коваріантна похідна в недеформованій базі $\bar{R}_i$; $H_i = \sqrt{\bar{R}_i \cdot \bar{R}_i}$.

Введемо у розгляд тензор лінійних деформацій і тензор лінійних поворотів:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji}) - \delta_{ij}; \quad /1.2/$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} - F_{ji}). \quad /1.3/$$

Із /1.2/ і /1.3/ випливає, що

$$F_{ij} = \delta_{ij} + E_{ij} + \Omega_{ij}. \quad /1.4/$$

Використовуючи подання градієнта руху у вигляді /1.4/, отримуємо вираз для компонент тензора деформацій Гріна:

$$\varepsilon_{ij} = E_{ij} + \frac{1}{2}(E_{ki} E_{kj} + E_{ki} \Omega_{kj} + \Omega_{ki} E_{kj} + \Omega_{ki} \Omega_{kj}). \quad /1.5/$$

Припускаємо, що компоненти тензора Ω є величинами порядку $\sqrt{\delta}$, а компоненти тензора E величинами порядку δ , що справедливо для тонкостінних гнучких тіл [9, II, 12]. За таких припущень підкресленими у виразі /1.5/ членами можна знехтувати як членами вищого порядку малості порівняно з членами порядку δ , і для компонент тензора ε отримуємо вираз

$$\varepsilon_{ij} = E_{ij} + \frac{1}{2} \Omega_{ki} \Omega_{kj}. \quad /1.6/$$

У рамках прийнятих припущень вираз для кратності зміни об'єму має вигляд

$$\bar{J} = |F_{ij}| = 1 + E_{11} + E_{22} + E_{33} + \Omega_{12}^2 + \Omega_{13}^2 + \Omega_{23}^2.$$

У випадку, коли тіло є транверсально-ізотропним, а процес навантаження адіабатичним, співвідношення пружності можна записати для стандартного матеріалу другого порядку у вигляді

$$\Sigma_{ij} = A_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th}), \quad /1.7/$$

де $\varepsilon_{kl}^{th} = \alpha \Delta T \delta_{kl}$ - компоненти тензора температурних деформацій; Σ_{ij} - фізичні компоненти другого /симетричного/ тензора Піоли-Кірхгофа в недеформованій базі. Вони відображають /з точністю до множника J / значення напружень на координатних площинках у деформованому тілі. Подання закону пружності у вигляді /1.7/ виправдане у випадку малих деформацій тонкостінних тіл при не малих кутах повороту [11, 12].

Використовуючи вираз для густини роботи напружень у вигляді згортки енергетичної пари [12] можна записати

$$\rho \delta W = \Sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \Sigma_{ij}^* \delta F_{ij}.$$

Тут Σ_{ij}^* - фізичні компоненти тензора номінальних напружень в недеформованій базі. Зокрема з другої тотожності можна визначити вирази для компонент тензора Σ^* з урахуванням гіпотез /1.6/. Детальні викладки цього питання наведені у праці [8].

Процес деформування тіла опишемо варіаційним рівнянням Гамільтона [3]:

$$\delta \int_0^t [K(U) - L(U)] dt = 0,$$

де $K(U) = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV$ - кінетична енергія, а

$$L(U) = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) A_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th}) dV - \int_V q_i u_i dV - \int_{S_z} \hat{\Sigma}_{ni}^* u_i dS$$

- потенціальна енергія тіла в момент часу t

Для забезпечення єдиності розв'язку потрібно задати початкові умови і на частині граничної поверхні S_u крайові умови на переміщення.

2. Теорія оболонок типу Тимошенка. Припустимо, тепер, що тонкостінне тіло має форму оболонки, тобто

$$\hat{V} = \{ \hat{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega_2, h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2 \}.$$

При цьому вважатимемо, що значення h на порядок менше від характерних розмірів образу тіла в декартовому просторі x_1, x_2, x_3 .

Розглянемо поверхню $\hat{S}_2 = \{ \hat{z}(\alpha_1, \alpha_2) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega_2 \}$, яка є серединою поверхнею недеформованого тонкостінного тіла. Нехай у цьому тілі вибрана така система криволінійних координат, що радіус-вектор точок тіла записується у вигляді

$$\hat{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \hat{z}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \hat{n}(\alpha_1, \alpha_2), \quad /2.1/$$

де $\hat{n}$ - одиничний вектор нормалі до $\hat{S}_2$. Нехай $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ - коваріантна база $\hat{S}_2$. Для коефіцієнтів справедливі співвідношення

$$H_i(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = A_i(\alpha_1 \alpha_2)(1 + \alpha_3 K_i(\alpha_1 \alpha_2)), \quad i=1,2,$$

$$H_3(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 1;$$

/2.2/

$$\text{де } A_i = \sqrt{\frac{g}{z_i} \cdot \frac{g}{z_i}}, \quad K_i = \frac{1}{A_i^2} \left(\frac{g}{z_i} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha_i^2} \right).$$

Для побудови теорії деформування оболонок прийємо такі гіпотези. По-перше, вважатимемо, що справедливий узагальнений плоский напружений стан, тобто $\sum_{33} = 0$. При цьому співвідношення пружності запишемо у вигляді

$$\sum_{ij} = A_{ijkl}^0 (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th}); \quad /2.3/$$

де тензор A_{ijkl}^0 має такі ненульові компоненти:

$$A_{zzzz}^0 = \lambda^* + 2\mu, \quad A_{zzss}^0 = \lambda^*, \quad A_{zszz}^0 = A_{zssz}^0 = \mu,$$

$$A_{zzzz}^0 = A_{zzzz}^0 = A_{zzzz}^0 = A_{zzzz}^0 = \mu', \quad z, s = 1, 2; \quad z \neq s.$$

$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{2\mu + \lambda}$, λ, μ, μ' - пружні константи трансверсально-ізотропного тіла.

По-друге, вважатимемо, що компоненти

$$\Omega_{12} = 0. \quad /2.4/$$

Можливість такого припущення обґрунтована у працях [9, 13].

По-третє, прийємо гіпотези Тимошенка для деформування нормалі, згідно з якими

$$U_s(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = u_s(\alpha_1 \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_s(\alpha_1 \alpha_2); \quad s=1,2;$$

$$U_3(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = u_3(\alpha_1 \alpha_2). \quad /2.5/$$

Обтиском оболонки будемо нехтувати, що не суперечить основним припущенням теорії середнього згину оболонок [5]. За припущення /2.5/ компоненти тензора градієнту руху /I.I/ можна подати у вигляді

$$F_{ij} = \frac{f_{ij} + \alpha_3 \varphi_{ij}}{1 + \alpha_3 K_j}, \quad i, j = 1, 3. \quad /2.6/$$

Тут K_1, K_2 - головні кривини поверхні $\bar{\Omega}^2$, $K_3 = 1$;

$$f_{zs} = \delta_{zs} + \frac{1}{A_z A_s} \bar{\nabla}_s (A_z u_z) + K_z \delta_{zs} u_z,$$

$$\varphi_{zs} = \delta_{zs} K_z + \frac{1}{A_z A_s} \bar{\nabla}_s (A_z \gamma_z),$$

$$f_{zz} = \gamma_z, \quad f_{zz} = \frac{1}{A_s} \partial_s u_z - K_s u_s,$$

$$\varphi_{zz} = 0, \quad \varphi_{zs} = -K_s \gamma_s.$$

$\bar{\nabla}_j$ - символ коваріантної похідної відносно метрики недеформованої поверхні $\bar{\Omega}^2$; $z, s = 1, 2$.

Аналогічно подаємо компоненти тензорів лінійних деформацій та лінійних поворотів:

$$E_{zz} = \frac{e_{zz} + \alpha_3 K_{zz}}{1 + \alpha_3 K_z},$$

$$E_{12} = \frac{e_{12} + \alpha_3 K_{12}}{(1 + \alpha_3 K_1)(1 + \alpha_3 K_2)},$$

/2.7/

$$E_{z3} = \frac{e_{z3}}{1 + \alpha_3 K_z}.$$

Тут

$$e_{rs} = \frac{1}{2}(f_{rs} + f_{sr}) - \delta_{rs};$$

$$K_{zz} = \varphi_{zz} - K_z, \quad K_{12} = \frac{1}{2}(\varphi_{12} + K_1 f_{12} + \varphi_2 + K_2 f_{21});$$

$$\mathcal{E}_{z3} = \frac{\omega_{z3} + \alpha_3 \tau_{z3}}{1 + \alpha_3 K_z},$$

/2.8/

де

$$\omega_{z3} = \frac{1}{2}(f_{z3} - f_{3z});$$

$$\tau_{z3} = K_z \gamma_z = \varphi_{z3}.$$

Відзначимо, що у виразі для E_{z3} відсутня складова по α_3 внаслідок взаємного знищення членів вигляду $K_z \gamma_z$. У виразі для $\mathcal{E}_{z3}$ ці члени додаються, і внаслідок цього компоненти тензора $\mathcal{E}$ змінюються за лінійним законом у напрямі α_3 .

Виходячи з подання компонент тензора $\mathcal{E}$ у вигляді /1.6/, можемо записати, що

$$\mathcal{E}_{zz} = \frac{e_{zz} + \alpha_3 \mathcal{E}_{zz}}{1 + \alpha_3 K_z},$$

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{e_{12} + \alpha_3 \mathcal{E}_{12}}{(1 + \alpha_3 K_1)(1 + \alpha_3 K_2)},$$

/2.9/

$$\mathcal{E}_{z3} = \frac{e_{z3}}{1 + \alpha_3 K_z},$$

де

$$\mathcal{E}_{rs} = e_{rs} + \frac{1}{2}\omega_{z3}\omega_{s3};$$

$$\mathcal{E}_{z3} = K_{z3} - \frac{1}{2}(\omega_{z3}\tau_{s3} + \omega_{s3}\tau_{z3}) - \frac{1}{2}\omega_{z3}\omega_{s3}\delta_{zs}K_z;$$

$$\mathcal{E}_{z3} = e_{z3}.$$

Тут доцільно відзначити, що лінеаризовані вирази для $\mathcal{E}_{z3}$ не відповідають дійсності, тому що вказані деформації не є постійними по товщині оболонки. Тому під час побудови теорії оболонок приймають ще й четверту гіпотезу, яка полягає у тому, що розподіл деформацій поперечного зсуву по товщині оболонки зображають у вигляді [4]

$$\mathcal{E}_{z3} = \frac{e_{z3} \chi(\alpha_3)}{1 + \alpha_3 K_z},$$

$$\text{де } \chi(\alpha_3) = 5[1/4 - (\alpha_3/h)^2].$$

Вираз для роботи напружень тепер можна подати у вигляді

$$\int_V \delta W = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{ij} \delta \varepsilon_{ij} (1 + K_1 \alpha_3) (1 + K_2 \alpha_3) d\alpha_3 d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} m_{ij} \delta \kappa_{ij} d\Omega, \quad /2.10/$$

де

$$\sigma_{zz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{zz} (1 + \alpha_3 K_s) d\alpha_3; \quad z, s = 1, 2; \quad z \neq s; \quad /2.11/ \\ \sigma_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{12} d\alpha_3;$$

$$\sigma_{z3} = \sigma_{3z} = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{z3} (1 + \alpha_3 K_s) d\alpha_3; \\ m_{zz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{zz} \alpha_3 (1 + \alpha_3 K_s) d\alpha_3, \quad m_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{12} \alpha_3 d\alpha_3, \quad m_{z3} = 0. /2.12/$$

Ідея визначення σ_{12} та m_{12} у вигляді /2.11/, /2.12/ належить Новожилову В.В. [9] і дає змогу ввести в теорії оболонок симетричні тензори зусиль та моментів, аналогічні симетричному тензору Піоли-Кірхгофа у тримірній теорії.

Використовуючи далі вирази для густини роботи напружень у вигляді згортки тензорів, і збираючи члени при δf_{ij} і $\delta \varphi_{ij}$ отримуємо [8]

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} m_{ij} \delta \kappa_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \delta f_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} m_{ij}^* \delta \varphi_{ij} d\Omega. \quad /2.13/$$

$$\text{Тут } \sigma_{zs}^* = \sigma_{zs}, \quad z, s = 1, 2;$$

$$\sigma_{z3}^* = \sigma_{z3} - \frac{1}{2}(\sigma_{zz} \omega_{z3} + \sigma_{12} \omega_{s3}) - \frac{1}{2}(m_{zz} \tau_{z3} + m_{12} \tau_{s3}) + \frac{1}{2}K_z \omega_{z3} m_{zz};$$

$$\sigma_{3z}^* = \sigma_{3z} + \frac{1}{2}(\sigma_{zz} \omega_{z3} + \sigma_{12} \omega_{s3}) + \frac{1}{2}(m_{zz} \tau_{z3} + m_{12} \tau_{s3}) + \frac{1}{2}K_z \omega_{z3} m_{zz} + K_z \omega_{z3} m_{12};$$

$$m_{zs}^* = m_{zs}, \quad m_{z3}^* = m_{z3} = 0. \quad /2.14/$$

Цікаво відзначити, що вирази /2.14/ можна отримати також шляхом безпосереднього усереднення напружень $\sum_{ij}^*$ за формулами, аналогічними /2.11/ і /2.12/.

Закон пружності в теорії оболонок визначимо із закону пружності тривимірної теорії. Для цього розглянемо вираз для густини роботи напружень:

$$\delta W = \delta W = [(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) A_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th})] \delta t.$$

Нехай

$$\int_V \delta W dV = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \delta W (1 + \alpha_3 K_1) (1 + \alpha_3 K_2) d\alpha_3 d\Omega = \int_{\Omega} \delta W d\Omega.$$

Введемо також позначення

$$T^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) d\alpha_3; \quad T^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) d_3 d\alpha_3.$$

Враховуючи ці позначення і нехтуючи членами порядку $O(h^2)$ порівняно з одиницею, дістаємо вираз для $\delta\Phi$.

Закон пружності в теорії оболонок отримуємо зі співвідношень

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad m_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_{ij}}.$$

У тензорному вигляді його можна записати

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}^{(11)} \varepsilon_{kl} + a_{ijkl}^{(12)} \kappa_{kl} + \sigma_{ij}^{th},$$

$$m_{ij} = a_{ijkl}^{(21)} \varepsilon_{kl} + a_{ijkl}^{(22)} \kappa_{kl} + m_{ij}^{th},$$

/2.15/

Тут σ_{ij}^{th} , m_{ij}^{th} - тензори температурних зусиль і моментів з ненульовими компонентами:

$$\sigma_{zz}^{th} = \frac{\alpha^{th} E h}{1-\nu} \Delta T^{(0)},$$

$$m_{zz}^{th} = \frac{\alpha^{th} E h^3}{12(1-\nu)} \Delta T^{(1)}, \quad z=1, 2,$$

де Δ - символ приросту температурних моментів $T^{(0)}$ і $T^{(1)}$

за час деформації; $a_{ijkl}^{(pq)}$ - тензори пружних констант з ненульовими компонентами:

$$a_{zzzz}^{(11)} = \beta_h, \quad a_{zzss}^{(11)} = \nu \beta_h, \quad a_{zssz}^{(11)} = a_{sszz}^{(11)} = \frac{\beta_h}{2} (1-\nu),$$

$$a_{zzzz}^{(12)} = a_{zzzz}^{(21)} = a_{zzzz}^{(12)} = a_{zzzz}^{(12)} = g_h,$$

$$a_{zzzz}^{(22)} = \delta_h, \quad a_{zzss}^{(22)} = \nu \delta_h, \quad a_{zssz}^{(22)} = a_{sszz}^{(22)} = \frac{\delta_h}{2} (1-\nu),$$

$$\beta_h = (\lambda^* + 2\mu)h = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad \delta_h = (\lambda^* + 2\mu) \frac{h^3}{12} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$g_h = \mu' \frac{h^{1/2}}{12} \int_{-h/2}^{h/2} \kappa^2(\alpha_3) d\alpha_3 = \frac{5}{8} G' h; \quad z, s = 1, 2; \quad z \neq s.$$

Процес деформування оболонок описується варіаційним рівнянням Гамільтона:

$$\delta \int_0^t [\kappa(u, \gamma) - l(u, \gamma)] dt = 0,$$

/2.16/

де

$$\kappa(u, \gamma) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} \rho h \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial \gamma_z}{\partial t} \frac{\partial \gamma_z}{\partial t} d\Omega \right\};$$

$$l(u, \gamma) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} a_{ijkl}^{(11)} \varepsilon_{kl} d\Omega + \int_{\Omega} \kappa_{rs} a_{rspt}^{(22)} \kappa_{pt} d\Omega - \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^{th} d\Omega - \int_{\Omega} \kappa_{rs} m_{rs}^{th} d\Omega - \right.$$

$$\left. - \int_{\Sigma} q_i^{(1)} u_i d\Omega - \int_{\Sigma} q_z^{(2)} \gamma_z d\Omega - \int_{\Gamma} \hat{\sigma}_{ni}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{m}_{nz}^* \gamma_z d\Gamma; \right.$$

$$q_i^{(1)} = (1 + K_1 \frac{h}{2})(1 + K_2 \frac{h}{2}) \hat{\Sigma}_{3i}^* (\frac{h}{2}) - (1 - K_1 \frac{h}{2})(1 - K_2 \frac{h}{2}) \hat{\Sigma}_{3i}^* (-\frac{h}{2}) + \int_{-h/2}^{h/2} Q_i (1 + K_1 \alpha_3)(1 + K_2 \alpha_3) d\alpha_3;$$

$$q_i^{(2)} = \frac{h}{2} (1 + K_1 \frac{h}{2})(1 + K_2 \frac{h}{2}) \hat{\Sigma}_{3i}^* (\frac{h}{2}) + \frac{h}{2} (1 - K_1 \frac{h}{2})(1 - K_2 \frac{h}{2}) \hat{\Sigma}_{3i}^* (-\frac{h}{2}) + \int_{-h/2}^{h/2} Q_i \alpha_3 (1 + K_1 \alpha_3)(1 + K_2 \alpha_3) d\alpha_3$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3; r, s, p, t = 1, 2.$

Аналогічно, як і у тривимірному випадку, для забезпечення єдиності розв'язку необхідно задати початкову умову, і на частині граничного контура Γ_u — крайові умови на переміщення.

За переміщеннями і кутами повороту, визначеними з варіаційної задачі /2.16/ можна знайти компоненти оболонкових тензорів ϵ_{ij} і κ_{ij} , і далі за формулами /2.9/ — тривимірне поле тензора ϵ_{ij} . Компонента ϵ_{33} цього тензора визначається при узагальненому плоскому напруженому стані зі співвідношення $\Sigma_{33} = 0$:

$$\epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}).$$

Із співвідношень /2.3/ одержуємо напруження в тонкостінному тілі.

Наприкінці зупинимось на дослідженні інваріантності тензора деформацій до обертання тіла як твердого цілого. Нехай точки тіла здійснюють жорсткі переміщення в просторі, яке задається формулами

$$\bar{u} = \bar{R} \cdot \bar{r} = \theta \bar{R} \cdot \bar{r} = (\theta \cdot I) \bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

де

$$\theta = \begin{bmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{bmatrix}.$$

Компоненти тривимірного тензора деформацій Гріна /1.5/ за таких зміщень дорівнюють нулю. При використанні тензора деформацій у вигляді /1.6/ вони становлять

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2}(1 - \cos \chi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(1 - \cos \chi)^2 \end{matrix} \right] \frac{1}{2}, \quad /2.17/$$

Беручи до уваги той факт, що члени $1 - \cos \chi$ мають порядок $O(\epsilon_{ij})$, отримуємо, що деформації $\epsilon_{ij} \sim O(\epsilon_{ij}^2) \sim O(\delta^2)$, тобто ϵ_{ij} дорівнюють нулю з точністю прийнятих у виразі /1.6/ гіпотез.

Подано тепер вектор переміщень у вигляді

$$\bar{U} = \bar{u} + \alpha_3 \bar{y},$$

де $\bar{u} = (\theta \cdot I) \bar{r}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\bar{y} = (\theta \cdot I) \bar{n}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Якщо прийняти гіпотези типу Тимошенка без урахування обтіку, то вектор $\bar{y}$ можна подати у вигляді

$$\bar{y}_* = [\theta - (1 + \gamma_n) \dot{I}] \bar{n}(\alpha_1, \alpha_2),$$

де

$$\gamma_n = \bar{n}(\theta^T - \dot{I}) \bar{n} = (1 - \cos \chi)(n_1^2 + n_3^2) \sim O(E_{ij}).$$

Деформації, отримані по таких переміщеннях для індексів $i, j = 1, 2$, збігаються з виразами /2.17/ з точністю до членів порядку $K_i h$ порівняно з одиницею. Для деформацій поперечного зсуву маємо вирази

$$\varepsilon_{i3} = \bar{n} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[(1 - \cos \chi)^2 + \gamma_n] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}[(1 - \cos \chi)^2 + \gamma_n] \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Таким чином, члени ε_{i3} не дорівнюють нулю з точністю прийнятих у виразі /1.6/ гіпотез, і цим самим порушують інваріантність тензора деформацій розглянутої теорії до обертання тіла як твердого цілого. Тому запропонований варіант теорії оболонок доцільно використовувати для дослідження тонкостінних тіл під дією навантажень, які не ведуть до виникнення великих деформацій поперечного зсуву. Однак таке звуження області застосованості запропонованої теорії є неістотним оскільки спільномірне за порядком з гіпотезами, прийнятими в /1.6/.

Чисельне розв'язання задач зі запропонованою теорією і зіставлення результатів із результатами, отриманими в рамках інших теорій містить праця [2].

І. Б а ж е н о в В.Г. Численное исследование нестационарных процессов деформации упругопластических оболочек // Пробл. прочности. 1984. № 11. С.51-54. 2. В а г і н П.П., М у х а І.С., С а в у л а Я.Г. Розв'язування геометрично нелінійних задач статки оболонок типу Тимошенка методом скінченних елементів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. С.67-74. 3. В а с и л з у К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир. 1987. 4. В о л ь м и р А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 5. Г а л и м о в К.З. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 6. Г р и г о р е н к о Я.М., М у к о е л А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К.: Вища шк. 1983. 7. К а ю к Я.Ф. Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. К.: Наук. думка, 1987. 8. М у х а І.С., С а в у л а Я.Г. Постановки задач упругого равновесия тонкостенных гибких тел с учетом геометрической нелинейности. Львов; 1988. 48 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ 19.12.88 г., № 2969-Ук88. 9. Н о в о ж и л о в В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 10. П е т е х Б.И. Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища шк. 1978.

11. П о б о д р я Б.Е. О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений // Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. № 4. С.15-26.
 12. Ч е р н ы х К.Ф., Л и т в и н е н к о в а З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1988.
 13. Ш а п о в а л о в Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. Механика твердого тела. 1968. № 1.

Стаття надійшла до редколегії 25.02.94

УДК 517:547.534

С.М.Левицька.

ВИОКРЕМЛЕННЯ ЕЛІПТИЧНИХ ІНТЕГРАЛІВ В ОСЕСИМЕТРИЧНІЙ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Граничні задачі математичної фізики на незамкнутах поверхнях методом потенціалу зводяться до розв'язування інтегральних рівнянь другого роду. Застосування методики виокремлення особливостей має змогу регуляризувати отримане інтегральне рівняння. Якщо поверхня має осьову симетрію, просторову задачу можна звести до розв'язування одномірного інтегрального рівняння. Вводячи циліндричну систему координат, отримуємо інтеграли, залежні від кута. Їх можна обчислити аналітично.

Мета даної роботи – обчислення інтегралів, які виникають під час розв'язування третьої граничної задачі нестационарної теплопровідності на незамкнутах поверхнях з осьовою симетрією методом інтегральних рівнянь. При цьому вдалося явно виокремити еліптичні інтеграли першого і другого роду.

Зупинимось на обчисленні інтегралів вигляду

$$P_1 = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{a}\right)}{z} d\varphi; \quad P_2 = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{z^2}{a^2}}}{a^2} d\varphi;$$

$$P_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{a}\right)}{z} d\varphi; \quad P_4 = \int_0^{2\pi} \cos\varphi e^{-\frac{z^2}{a^2}} d\varphi;$$

$$P_5 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial z^2}{\partial n} \left(\frac{e^{-\frac{z^2}{a^2}}}{z^2} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{a}\right)}{z^3} \right) d\varphi,$$

де $\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{a}\right)$ – інтеграл нехибок;

$r = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi + (z-z_0)^2}$ - віддаль між двома точками (ρ, z, φ) і $(\rho_0, z_0, 0)$; $\frac{\partial z^2}{\partial n} = -\frac{2}{j}(\rho^2 z' - (z-z_0)\rho\rho' - \rho\rho_0 z' \cos \varphi)$ - нормальна похідна від відстані; $J = \rho \sqrt{\rho'^2 + z'^2}$ - якобіан переходу; $a = \text{const}$.

Для обчислення цих інтегралів підінтегральні функції розкладаються в ряди:

$$e^{zf(x)} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{e=1}^{\infty} \frac{(-1)^e x^{2e+1}}{(2e+1)e!}; \quad /1/$$

$$e^x = \sum_{e=0}^{\infty} \frac{x^e}{e!}. \quad /2/$$

Докладніше зупинимось на обчисленні інтеграла P_1 :

$$P_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{z} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{e=1}^{\infty} \frac{(-1)^e}{(2e+1)e!} \int_0^{2\pi} z^{2e} d\varphi. \quad /3/$$

Перший інтеграл у формулі /3/ за відомою методикою зводиться до еліптичного інтеграла першого роду:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi + (z-z_0)^2]^{1/2}} = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos 2\theta + (z-z_0)^2]^{1/2}} \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 - 4\rho\rho_0 \sin^2 \theta + (z-z_0)^2]^{1/2}} = \frac{4}{\sqrt{(\rho+\rho_0)^2 + (z-z_0)^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-p^2 \sin^2 \theta} = \frac{4}{\sqrt{3}} K(p), \end{aligned}$$

де $\theta = \frac{\varphi - \pi}{2}$; $\beta = (\rho+\rho_0)^2 + (z-z_0)^2$; $p = \frac{4\rho\rho_0}{\beta}$;

$K(p)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду.

Виконуючи аналогічні перетворення в другому інтегралі /3/, отримуємо

$$\int_0^{2\pi} z^{2e} d\varphi = 4\beta^e \int_0^{\pi/2} [1-p^2 \sin^2 \theta]^e d\theta. \quad /4/$$

Застосуємо біном Ньютона.

$$\int_0^{2\pi} z^{2e} d\varphi = 4\beta^e \sum_{v=0}^e (-1)^v C_e^v p^{2v} \int_0^{\pi/2} \sin^{2v} \theta d\theta = 2\pi \beta^e \sum_{v=0}^e (-1)^v C_e^v p^{2v} \frac{\pi(2+2v-1)!!}{2^{v+1}v!}. \quad /5/$$

Остаточно інтеграл P_1 набере вигляду

$$P_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} K(p) + f_1(a, p, \beta). \quad /6/$$

Ці ж перетворення застосуємо до обчислення інтеграла

$$P_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{z} d\varphi - C_1 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{e=1}^{\infty} \frac{(-1)^{e+1}}{(2e+1)e!} \int_0^{2\pi} \cos \varphi z^{2e} d\varphi. \quad /7/$$

Перший інтеграл в P_3 зводиться до повних еліптичних інтегралів першого роду $K(p)$ і другого роду $E(p)$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{z} = -\frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{p^2} E(p) - \frac{1-p^2}{p^2} K(p) \right) + \frac{4}{\sqrt{3}} K(p).$$

Останній інтеграл в /7/ обчислюємо аналогічно, як у /5/.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos \varphi z^{2\ell} d\varphi &= -4\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} (1-2\sin^2 \theta)(1-p^2 \sin^2 \theta)^\ell d\theta = \\ &= 8\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta (1-p^2 \sin^2 \theta)^\ell d\theta - 4\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} (1-p^2 \sin^2 \theta)^\ell d\theta = \\ &= 8\sqrt{3} \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\ell} (-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu} \frac{(2\nu+1)!!}{2^{\nu+1}(\nu+1)!} - 4\sqrt{3} \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\ell} (-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu} \frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!} = \\ &= 2\sqrt{3} \pi \sum_{\nu=0}^{\ell} (-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu} \frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!} \frac{\nu}{\nu+1}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$P_3 = -\frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{p^2} E(p) - \frac{1-p^2}{p^2} K(p) \right) + \frac{4}{\sqrt{3}} K(p) + f_2(a, p, \sqrt{3}).$$

Ці ж міркування застосовуємо для обчислення інших інтегралів:

$$P_2 = -\frac{8\sqrt{\pi}}{a^3} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell \sqrt{3}^\ell}{\ell! a^{2\ell}} \sum_{\nu=0}^{\ell} (-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu} \frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!} \right];$$

$$P_4 = -\frac{8\sqrt{\pi}}{a^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell \sqrt{3}^\ell}{\ell! a^{2\ell}} \sum_{\nu=0}^{\ell} (-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu} \frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!} \frac{\nu}{\nu+1}.$$

Складніші вирази отримуємо під час обчислення P_5 . Тут потрібно розглянути інтеграли:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{z^3} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{E(p)}{1-p^2};$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{z^3} = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{E(p)}{1-p^2} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \left[\frac{E(p)}{p(1-p^2)} - \frac{1}{p^2} K(p) \right];$$

$$\int_0^{2\pi} z^{2(\ell-1)} d\varphi = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\ell-1} (-1)^\nu C_\ell^\nu p^{2\nu} \frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!};$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi z^{2(\ell-1)} d\varphi = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\ell-1} (-1)^\nu C_{\ell-1}^\nu p^{2\nu} \frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu \nu!} \frac{\nu}{\nu+1}.$$

Тому

$$P_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{z} \left[z'(\rho^2 - \rho_0^2 - (z - z_0)^2) - 2\rho\rho'(z - z_0) \right] \frac{E(\rho)}{1 - \rho^2} + \frac{2z'}{\sqrt{3}} K(\rho) + f_3(a, \rho, z).$$

Аналізуючи поведінку отриманих функцій при $(\rho, z) \rightarrow (\rho_0, z_0)$ і враховуючи розклад еліптичних інтегралів в ряди:

$$K(\rho) = U(\beta) + V(\beta) \ln \frac{1}{\beta};$$

$$E(\rho) = \bar{U}(\beta) + \bar{V}(\beta) \ln \frac{1}{\beta},$$

де $\beta = 1 - \rho^2$, можна зробити висновок про наявність логарифмічної особливості в ядрі інтегрального рівняння. Крім цього, в P_5 наявна особливість $\frac{E(\rho)}{1 - \rho^2}$, яка послаблюється множителем

$$z'(\rho^2 - \rho_0^2 - (z - z_0)^2) - 2\rho\rho'(z - z_0).$$

І. Бережанская З.С., Левицкая С.М., Свирида М.И. Численное решение нестационарной задачи теплопроводности на незамкнутых поверхностях методом интегральных уравнений // Лучевая технология электрон. техники: теория и эксперимент: Межвуз. сб. М., 1988. С.55-62. 2. Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. Таблицы неопределенных интегралов. М., 1986. 3. Левицкая С.М., Бережанская З.С. Задача Неймана для уравнения теплопроводности в случае разомкнутых границ с осевой симметрией // Програм. средства машиностроения. К., 1990. С.51-57.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.94

УДК 517.947

Р.М.Пасічник, Р.С.Ханко

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ СІТОК ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧІ ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ХВИЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Наближене розв'язування нестационарних задач математичної фізики на незамкнених поверхнях пов'язане із деякими труднощами, які викликані наявністю часу як незалежної змінної, необмеженістю області, де шукається розв'язок, та складністю граничної поверхні. Тому найбільш придатним для розв'язування таких задач виявився метод інтегральних рівнянь*.

У даній роботі розглядавана задача за допомогою сіткової апроксимації по часу зводиться до послідовності стаціонарних

©Пасічник Р.М., Ханко Р.С., 1995

* Ханко Р.С. Про три підходи чисельного розв'язування нестационарних задач на незамкнених поверхнях за допомогою методу інтегральних рівнянь // Доп. АН України. 1991. № 12. С.19-22.

задачі. Застосовуючи спеціально введені функції, цю послідовність редукуємо до послідовності інтегральних рівнянь першого роду зі слабкою особливістю в ядрі та правими частинами спеціального вигляду.

1. Розглянемо граничну задачу для хвильового рівняння:

$$\Delta u = u_{tt}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad t \in [0, T], \quad /1/$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad /2/$$

$$u(x, t) = f(x, t), \quad x \in S, \quad t \in [0, T], \quad /3/$$

де $u = u(x, t)$ - шуканий розв'язок; S - кусково-Діраковська замкнена чи розімкнена гранична поверхня. Дискретизуємо задачу /1/-/3/ за допомогою різницьових співвідношень:

$$\Delta u_i - \kappa^2 u_i + 2\kappa^2 u_{i-1} - \kappa^2 u_{i-2} = 0; \quad /4/$$

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad i = \overline{2, N}; \quad /5/$$

$$u_i(x) = f_i(x), \quad x \in S, \quad /6/$$

де $u_i = u_i(x) = u(x, t_i)$, $f_i(x) = f(x, t_i)$, $h_t = T/N$, $\kappa = 1/h_t$, $t_i = i h_t$. Таким чином, приходимо до послідовності стаціонарних задач, яку намагатимемося розв'язати за допомогою методу інтегральних рівнянь.

Покажемо, що розв'язок i -ї задачі з послідовності /4/-/6/ можна подати у вигляді

$$u_i(x) = \iint_S \{q_i(y) H(\kappa R) + \sum_{j=3}^i q_{i+2-j}(y) \varepsilon_j(\kappa R)\} dS_y, \quad /7/$$

де $q_i(y)$, $\varepsilon_i(\kappa R)$ задовольняють такі рівняння

$$\iint_S q_i(y) H(\kappa R) dS_y = f_i(x) - \sum_{j=3}^i \iint_S q_{i+2-j}(y) \varepsilon_j(\kappa R) dS_y, \quad /8/$$

$x \in S,$

$$\Delta \varepsilon_i(\kappa R) - \kappa^2 \varepsilon_i(\kappa R) + 2\kappa^2 \varepsilon_{i-1}(\kappa R) - \kappa^2 \varepsilon_{i-2}(\kappa R) = \delta(R), \quad x \in S, \quad /9/$$

$R = R(x, y) = |x - y|$, $H(\kappa R) = \frac{e^{-\kappa R}}{R}$, $\delta(R)$ - дельта-функція; $q_i(y)$, $\varepsilon_j(\kappa R)$, $j = \overline{2, i-1}$ - функції, визначені на попередніх кроках, причому

$$\varepsilon_1(\kappa R) = \varepsilon_0(\kappa R) = 0, \quad \varepsilon_2(\kappa R) = H(\kappa R). \quad /10/$$

Підставляючи зображення /7/ в рівняння /4/, після нескладного перегрупування отримуємо:

$$\iint_S q_k(y) [\Delta H(\kappa R) - \kappa^2 H(\kappa R)] dS_y + \iint_S q_{k-1}(y) [\Delta \varepsilon_3(\kappa R) -$$

$$-x^2 \varepsilon_3(xR) + 2x^2 H(xR)] dS_y + \dots + \iint_S q_2(y) [\Delta \varepsilon_k(xR) - \\ - x^2 \varepsilon_k(xR) + 2x^2 \varepsilon_{k-1}(xR) - x^2 \varepsilon_{k-2}(xR)] dS_y = 0.$$

Використовуючи співвідношення /9/ та /10/ неважко переко-
нати, що отримане рівняння перетворюється в тотожність. Умова
/6/ задовольняється, оскільки виконується співвідношення /8/.
Отже, наше твердження доведене і послідовність задач /4/-/7/
зведена до послідовності інтегральних рівнянь /8/, після розв'я-
зання яких розв'язки задач /4/-/6/ визначаються за допомогою
співвідношення /7/.

2. Визначимо вигляд функцій $\varepsilon_j(xR)$, які задоволь-
нятимуть умови /9/ та /10/. Зобразимо шукані функції у такій
формі

$$\varepsilon_j(xR) = P_i(xR) H(xR), \quad i = \overline{3, N}; \quad /11/$$

$$P_{i+2}(xR) = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i-1} a_{i,i-j} (xR)^{i-j}, \quad i = \overline{1, N-2}. \quad /12/$$

Спочатку визначимо вигляд функцій $\varepsilon_3(xR)$ та $P_3(xR)$.
Підставляючи зображення /11/ при $i=3$ в рівняння /9/, врахо-
вуючи умови /10/ а також те, що $H(xR)$ є фундаментальним роз-
в'язком рівняння Гельмгольца, отримуємо співвідношення

$$(\Delta P_3(xR) + 2x^2) H(xR) = 0.$$

Якщо врахувати зображення оператора Лапласа у сферичній систе-
мі координат, то можна отримати простіше рівняння:

$$P_3''(xR) - 2x P_3'(xR) + 2x^2 = 0.$$

Із останнього співвідношення та із зображення /12/ при $i=1$
отримуємо

$$P_3(xR) = a_{11} xR, \quad a_{11} = 1. \quad /13/$$

Аналогічно для $P_4(xR)$ маємо рівняння

$$P_4''(xR) - 2x P_4'(xR) + 2x^2 P_3(xR) - x^2 = 0 \quad /14/$$

та зображення

$$P_4(xR) = \frac{1}{2} [a_{22} (xR)^2 + a_{21} (xR)],$$

причому із рівняння /14/ визначаємо, що

$$a_{22} = 1, \quad a_{21} = 2. \quad /15/$$

Розглянемо тепер зображення /12/ при $i > 2$. Воно повинно
задовольняти рівняння

$$P_{i+2}''(xR) - 2x P_{i+2}'(xR) + 2x^2 P_{i+1}(xR) - x^2 P_i(xR) = 0.$$

Підставляючи зображення /12/ в останнє рівняння і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при $(\mathcal{H}R)^{i-1}$, $(\mathcal{H}R)^{i-2}$, $(\mathcal{H}R)^{i-j-1}$ та $(\mathcal{H}R)$, отримуємо співвідношення:

$$a_{ii} = a_{i-1, i-1}, \quad i = \overline{2, N-2}; \quad /16/$$

$$a_{i, i-1} = \frac{i}{i-1} a_{i-1, i-2}, \quad i = \overline{2, N-2}; \quad /17/$$

$$a_{i, i-j} = \frac{(i-j+1)(i-j)a_{i, i-j+1} + 2ia_{i-1, i-j-1} - i(i-1)a_{i-2, i-j-1}}{2(i-j)}, \quad i-j \geq 2; \quad /18/$$

$$a_{i2} = a_{i1}, \quad i = \overline{3, N-2}. \quad /19/$$

Із співвідношень /16/ та /14/ можна знайти одне загальне

$$a_{ii} = 1, \quad i = \overline{2, N-2}. \quad /20/$$

Аналогічно, зі співвідношень /17/ та /15/ виводимо

$$a_{i, i-1} = i, \quad i = \overline{2, N-2}. \quad /21/$$

Неважко бачити, що формули /18/, /19/, /20/ та /21/ задають співвідношення, достатні для побудови всіх функцій $P_i(\mathcal{H}R)$, а отже, і функції $\mathcal{E}_i(\mathcal{H}R)$, $i = \overline{2, N}$.

3. Знайдемо простіші формули для побудови функцій $P_i(\mathcal{H}R)$. Зокрема, за допомогою співвідношення /18/ можна довести, що

$$a_{ij} = \frac{i}{j} a_{i-1, j-1}, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad j = \overline{2, i}. \quad /22/$$

Доведення виконаємо методом індукції. Дійсно, при $j=i$ отримуємо співвідношення, яке збігається із формулою /16/. При $j=i-1$ отримуємо співвідношення, яке збігається з формулою /17/. Допустимо тепер, що формула /22/ справедлива при $j=i-k+1$.

Покажемо, що тоді вона справедлива також для випадку $j=i-k$. Використовуючи співвідношення /18/ при $i=m$, $j=k$ та формулу /22/ при $i=m$, $j=i-k+1$ та $i=m-1$, $j=i-k+1$, отримуємо

$$\begin{aligned} a_{m, m-k} &= \frac{(m-k+1)(m-k)a_{m, m-k+1} + 2ma_{m-1, m-k-1} - m(m-1)a_{m-2, m-k-1}}{2(m-k)} \\ &= \frac{(m-k+1)(m-k) \frac{m}{m-k+1} a_{m-1, m-k} + 2ma_{m-1, m-k-1} - m(m-1) \frac{m-k}{m-1} a_{m-1, m-k}}{2(m-k)} \\ &= \frac{m}{m-k} a_{m-1, m-k-1} \end{aligned}$$

що й доводить справедливість формули /22/.

Формула /22/ дає підставу сформулювати вираз для обчислення коефіцієнтів a_{ij} в явному вигляді:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ \frac{i!}{j! 2^{i-j-1}} & \text{при } i \neq j, \quad i = \overline{2, N-2}. \end{cases} \quad /23/$$

Покажемо, що співвідношення /23/ справедливе при $j=2$. Дійсно, за допомогою співвідношень /22/ та /19/ можна записати

$$a_{i2} = \frac{i}{2} a_{i-1,1} = \dots = \frac{i(i-1) \dots 2}{2^{i-1}} a_{21} = \frac{i!}{2^{i-2}}.$$

Використовуючи отримане співвідношення, доведемо справедливість формули /23/ для решти випадків, коли $i \neq j$, $j > 2$. Справді,

$$a_{ij} = \frac{i}{j} a_{i-1,j-1} = \dots = \frac{i(i-1) \dots (i-j+3)}{j(j-1) \dots 3} a_{i-j+2,2} = \frac{i!}{j! 2^{i-j-1}}.$$

Формула /23/ дає підставу спростити зображення функцій $P_i(xR)$

$$P_{i+2}(xR) = \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} (xR)^{i-j}, \quad i = \overline{1, N-2}, \quad /24/$$

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i!} & \text{при } i=j, \\ \frac{1}{j! 2^{i-j-1}} & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Із зображення /24/ неважко бачити, що при $i \rightarrow \infty$, $P_{i+2}(xR)$ прямує до нескінченності не швидше як e^{xR} . Тому при $i \rightarrow \infty$ $\varepsilon_i(xR)$ не перевищує $1/R$.

Підсумовуючи, зауважимо, що схема запропонованого методу утворена формулами /7/, /8/, /11/, /24/, які зводять задачу /1/-/3/ до послідовності стаціонарних інтегральних рівнянь /8/.

Викладену схему можна застосовувати для розв'язування складніших задач, а також для теоретичних досліджень.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.94

ПАРАМЕТРИЧНА ІНТЕГРОВНІСТЬ ЗА ЛАКСОМ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ
ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ФУНКЦІОНАЛЬНИХ МНОГОВИДАХ

1. Нехай на нескінченновимірному гладкому функціональному многовиді $M \simeq C^{(\infty)}(R; R)$ задана нелінійна неоднорідна динамічна система типу Кортвега-де Фріза:

$$u_t = u_{3x} + 6uu_x + \varepsilon(2u + xu_x) = K[u; x, \varepsilon], \quad /1/$$

де $u \in M$; $\varepsilon \in R$ - довільний параметр; $t \in R$ - еволюційна змінна. На основі градієнтно-голономного алгоритму [2] у праці [1] доведена параметрична повна інтегровність системи вигляду /1/. Згідно з методом, описаним у працях [1, 2], вивчені асимптотичні при $|\lambda| \rightarrow \infty$ розв'язки асоційованого рівняння Лакса:

$$\tilde{\varphi}_\tau + K' * \tilde{\varphi} = 0 \quad /2/$$

для динамічної системи /1/ по еволюційному параметру $\tau \in R$; $u_\tau = K[u; x]$:

$$\tilde{\varphi}[u; \tilde{\lambda}] = \exp(\tilde{\lambda}x + \tilde{\lambda}^3\tau + \partial^{-1}\tilde{\sigma}[u; \tilde{\lambda}]), \quad /3/$$

де $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t, \tau; \lambda)$, $\partial^{-1}(\cdot) = (1/2)(\int_{x_0}^x dx(\cdot) - \int_x^{x_0+2x} dx(\cdot))$ - оператор оберненого диференціювання; $x_0 \in R$ - довільна відмічена точка; $\tau \in R$ - параметр; $\lambda \in C$ - довільне число, і при $|\tilde{\lambda}| \rightarrow \infty$

$$\tilde{\sigma}[u; \tilde{\lambda}] \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\sigma}_j[u] \tilde{\lambda}^j, \quad /4/$$

З огляду на те, що $\tilde{\lambda}(t, \tau; \lambda)|_{\tau=0} = \tilde{\lambda}(t, \tau; \lambda)|_{\tau=t} = \tilde{\lambda}(t; \lambda)$, $t \in R$ - довільне, то при $\tau = t \in R$ із /2/ і /3/ знаходимо нескінченну рекурентну послідовність для визначення коефіцієнтів розкладу в

$$\begin{aligned} \partial^{-1}\tilde{\sigma}_{j,\tau} - 3\tilde{\sigma}_{j+2} - 3\tilde{\sigma}_{j+1-k}\tilde{\sigma}_k - \tilde{\sigma}_{j-k}\tilde{\sigma}_{k-2}\tilde{\sigma}_3 - 3\tilde{\sigma}_{j+1,x} - 3\tilde{\sigma}_{j-k}\tilde{\sigma}_{k,x} - \\ - \tilde{\sigma}_{j,xx} - (6u + \varepsilon x)\tilde{\sigma}_{j-1} - (6u + \varepsilon x)\tilde{\sigma}_j + \varepsilon\delta_{j,0} = 0. \end{aligned} \quad /5/$$

Розв'язуючи /5/, знаходимо з точністю до $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_0 &= 0, \quad \tilde{\sigma}_1 = -2u - (1/3)\varepsilon x, \quad \tilde{\sigma}_2 = 2u_x + (2/3)\varepsilon, \\ \tilde{\sigma}_3 &= -2u^2 - 2u_{3x} - (2/3)\varepsilon xu - (2/3)\varepsilon\partial^{-1}u, \\ \tilde{\sigma}_4 &= 8uu_x + 2u_{3x} + (4/3)\varepsilon xu_x + (10/3)\varepsilon u + (1/9)\varepsilon^2 x, \\ \tilde{\sigma}_5 &= -4u^3 - 10u_x^2 - 2u_{4x} - 12uu_{2x} - 2\varepsilon xu^2 - (20/3)\varepsilon u_x - \\ &\quad - 2\varepsilon xu_{2x} - 2\varepsilon\partial^{-1}u^2 - (4/3)u\partial^{-1}u + O(\varepsilon^2), \dots \end{aligned}$$

Оскільки $|\tilde{\lambda}(t; \lambda)| \rightarrow \infty$, вважаємо, що параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ також прямує до безмежності в $\mathbb{C}$, тобто $|\lambda| \rightarrow \infty$, причому справедливий розклад:

$$\tilde{\lambda}'(t; \lambda) \approx S_1(t)\lambda^{-1} + S_2(t)\lambda^{-2} + \dots, \quad /6/$$

де $j \in \mathbb{N}$, а $S_j \in \mathbb{R} \sim \mathbb{C}$ мають вигляд $S_j(t) = \exp(-\varepsilon t)$, $t \in \mathbb{R}$. Явні вирази для законів збереження записуються так:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1 &= -2\exp(-\varepsilon t) \int_{\mathbb{R}} dx u, \quad \mathcal{Y}_2 = -2\exp(-\varepsilon t) \int_{\mathbb{R}} dx, \\ \mathcal{Y}_3 &= -2\exp(-\varepsilon t) \int_{\mathbb{R}} dx u - 2\exp(-3\varepsilon t) \int_{\mathbb{R}} dx u^2, \dots \end{aligned}$$

Крім цього, із /6/ знаходимо, що "спектральний" параметр $\tilde{\lambda}(t; \lambda) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ має такий явний вигляд: $\tilde{\lambda}(t; \lambda) = \exp(\varepsilon t)(\lambda - 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Розв'язуючи також рівняння Картана-Нетер $L_K \mathcal{L} + \partial \mathcal{L} / \partial t = 0$, $t \in \mathbb{R}$, знаходимо, що динамічна система /I/ має узгоджену пару $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ імплектичних операторів на функціональному многовиді M :

$$\mathcal{L} = \exp(2\varepsilon t) \partial / \partial x, \quad \mathcal{M} = \partial^3 / \partial x^3 + 2u \partial / \partial x + 2\partial / \partial x \cdot u. \quad /7/$$

Враховуючи тепер, що "спектральний" параметр $\tilde{\lambda}(t; \lambda) \in \mathbb{C}$ не залежить явно від елемента $u \in M$, на основі градієнтно-голомомного алгоритму [2] із /7/ знаходимо в явному вигляді зображення типу Лакса для динамічної системи /I/:

$$L[u; \lambda] = -\partial^2 / \partial x^2 + u - \tilde{\lambda}^2(t; \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Таким чином, ми з'ясували, що нелінійна динамічна система /I/ повністю інтегрована за Лаксом.

Отримані результати можна сформулювати у вигляді твердження.

Твердження. Якщо елемент $\tilde{\varphi} \in T^*(M)$ задовольняє асоційоване визначальне рівняння Лакса /2/, де $\tilde{\varphi}(x; \tilde{\lambda})$ - спеціальний асимптотичний розв'язок /3/ при $|\tilde{\lambda}(t; \lambda)| \rightarrow \infty$, $\tilde{\lambda}(t_0; \lambda) = \lambda \in \mathbb{C}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ - фіксоване, то система /I/ має параметричну ізоспектральну інтегрованість за Лаксом тоді і тільки тоді, коли елемент $\varphi(x; \lambda) := \tilde{\varphi}(x; \tilde{\lambda})|_{\tau=t}$ задовольняє асимптотично тотожно при $|\lambda| \rightarrow \infty$ визначальне рівняння Лакса:

$$\varphi_t + K'^* \varphi = 0 \quad /8/$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, причому умовою сумісності рівнянь Лакса /2/ і /8/ є диференціальні співвідношення на параметр $S_j(t)$, $j \in \mathbb{N}$ в розкладі /6/ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

3. У випадку стандартної ізоспектральної інтегрованості системи $u_t = K[u]$ на M її гамільтонівість визначають ви-

ходячи зі несиметричних розв'язків $\varphi \in T^*(M)$ рівняння типу Лакса $\varphi_t + K' * \varphi = \text{grad } \eta$, де $\eta \in D(M)$ - деякий довільний функціонал. У цьому випадку $u_t = K[u] = -\theta \text{grad } H$, де $H = (\varphi - K) - \eta$, $\theta = \varphi' - \varphi'^*$.

3. Слід відзначити, що у праці [1] одержана повна інтегрованість за Ліувіллем нелінійної динамічної системи:

$$u_t = \delta u u_x + u_{3x} + \varepsilon u^3 u_x = K[u; \varepsilon] \quad /9/$$

тільки на односолітонному інваріантному підмноговиді $M^2(\varepsilon) \hookrightarrow M$ при будь-яких $\varepsilon \in \mathbb{R}$; інших інваріантних підмноговидів не існує, тобто динамічна система /9/ на M не інтегрована.

І. К у й б и д а В.С., П р и т у л а Н.Н., П р и к а р - п а т с к и й А.К. Исследование свойств параметрической изо-спектральной интегрируемости нелинейных динамических систем на функциональных многообразиях и их конечномерных аппроксимаций. Львов, 1991. 41 с. /Препринт/ АН Украины. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім. Я.С.Подстригача; № 10-91. 2. М и т р о - п о л ь с к и й Ю.А., Б о г о л ь б о в Н.Н., П р и к а р п а т - с к и й А.К., С а м о й л е н к о В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. К.: Наук. думка, 1987... 296 с.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.94

УДК 536.2:519.6

Я.Г.Савула, Є.Я.Чапля, В.М.Кухарський

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В СЕРЕДОВИЩІ З ТОНКИМ КАПІЛЯРОМ

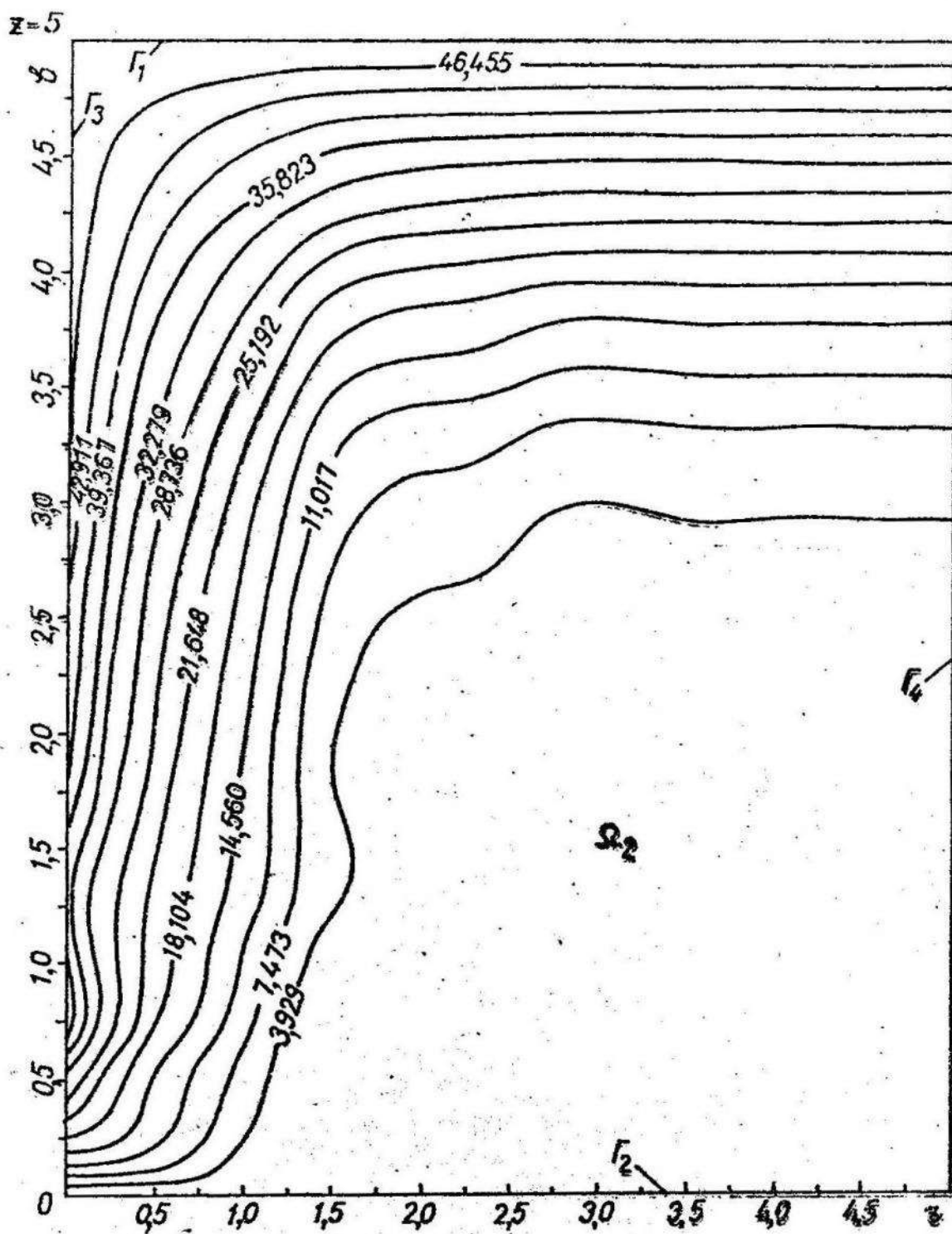
1. Постановка задачі. У праці [3] запропонований спосіб побудови математичних моделей теплопереносу [1] в середовищах з тонкими покриттями і включеннями. Використовуючи основні ідеї цієї праці, подамо ключову систему двовимірної задачі /плоска та осесиметричні задачі/ теплопереносу в середовищі з прямо-лінійним капіляром завтовшки h вздовж осі Oz /див. рисунок/ у вигляді

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - \kappa_1^{(0)} \nu \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \lambda_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial z} = -q_0', \quad \forall \Omega_1 \times (0, T], \quad /1/$$

$$\kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - \beta \left[\frac{\partial}{\partial z} (\beta \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}) + \beta \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}) \right] = 0, \quad \forall \Omega_2 \times (0, T]. \quad /2/$$

Тут $\kappa_i^{(0)} = \gamma h \kappa_i$, $\lambda_i^{(0)} = \gamma h \lambda_i$, $q_0^+ = h q^+$; $\gamma = 1$, $\beta = 1$

© Савула Я.Г., Чапля Є.Я., Кухарський В.М., 1995



- для плоскої задачі; $\gamma = h/2$, $\beta = z$ - для осесиметричної задачі;
 κ_1, κ_2 - об'ємні теплоємності середовищ Ω_1 та Ω_2 ; λ_1, λ_2 -
 коефіцієнти теплопровідності середовищ Ω_1 та Ω_2 ; q^+ - густи-
 на теплового потоку на спільній межі областей Ω_1 та Ω_2 , v -
 швидкість конвективного переносу через капіляр.

Через $T_1(\tau, z)$, $T_2(\tau, z, z)$ позначимо розподіли температур
 в областях Ω_1 і Ω_2 . З огляду на умови симетрії відносно осі
 Oz , температуру по товщині капіляра вважасмо сталою.

До рівнянь /1/, /2/, потрібно додати граничні умови:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial z} &= -\alpha_1^{(1)} (T_1 - T_c^{(1)}), \quad z = \delta, \tau \in (0, T], \\ \lambda_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \alpha_1^{(2)} (T_1 - T_c^{(2)}), \quad z = 0, \tau \in (0, T], \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \nu} &= -\alpha_2^{(1)} (T_2 - T_c^{(1)}) \text{ на } \Gamma_1 \times (0, T], \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \nu} &= -\alpha_2^{(2)} (T_2 - T_c^{(2)}) \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T], \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \nu} &= 0 \text{ на } \Gamma_4 \times (0, T], \end{aligned} \quad /3/$$

умови спряження

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2, \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} &= -q^+ \text{ на } \Gamma_3 \times (0, T]; \end{aligned} \quad /4/$$

та початкові умови

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1^{(0)}, \quad \tau = 0, z \in [0, \delta]; \\ T_2 &= T_2^{(0)}, \quad \tau = 0, (z, z) \in \Omega_2. \end{aligned} \quad /5/$$

2. Варіаційна постановка задачі. Введемо простори

$$V_1 = \{U(z) | U(z) \in W_2^{(1)}[0, \delta]\},$$

$$V_2 = \{U(z, z) | U(z, z) \in W_2^{(m)}(\Omega_2)\}.$$

Розглянемо функції $T_1 \in L_2(0, T; V_1)$, $T_2 \in L_2(0, T; V_2)$
 і білінійні форми:

$$\begin{aligned} m_1(T_1', \tilde{T}_1) &= \int_0^\delta \kappa_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \tilde{T}_1 dz; \\ a_1(T_1, \tilde{T}_1) &= \int_0^\delta \kappa_1^{(0)} v \frac{\partial T_1}{\partial z} \tilde{T}_1 dz; \\ b_1(T_1, \tilde{T}_1) &= \int_0^\delta \lambda_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial z} dz + \alpha_1^{(2)} T_1 \tilde{T}_1 \Big|_{z=0} + \\ &\quad + \alpha_1^{(1)} T_1 \tilde{T}_1 \Big|_{z=\delta}; \\ m_2(T_2', \tilde{T}_2) &= \int_{\Omega_2} \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} \tilde{T}_2 d\Omega; \\ b_2(T_2, \tilde{T}_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial z} \right) d\Omega + \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} \alpha_1^{(1)} T_2 \tilde{T}_2 z d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \alpha_1^{(2)} T_2 \tilde{T}_2 z d\Gamma; \end{aligned}$$

$$\langle l_1, \tilde{T}_1 \rangle = \alpha_1^{(2)} T_c^{(2)} \tilde{T}_1|_{z=0} + \alpha_1^{(4)} T_c^{(4)} \tilde{T}_1|_{z=\theta};$$

$$\langle l_2, \tilde{T}_2 \rangle = \int_{\Gamma_1} \alpha_2^{(1)} T_c^{(1)} \tilde{T}_2 z d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \alpha_2^{(2)} T_c^{(2)} \tilde{T}_2 z d\Gamma,$$

де $\tilde{T}_1 \in V_1, \tilde{T}_2 \in V_2$.

Домножуючи рівняння /1/, /2/ на довільні функції $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ і додаючи, отримуємо варіаційну задачу:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} [m_1(T_1, \tilde{T}_1) + m_2(T_2, \tilde{T}_2)] + a_1(T_1, \tilde{T}_1) + b_1(T_1, \tilde{T}_1) + b_2(T_2, \tilde{T}_2) = \langle l_1, \tilde{T}_1 \rangle + \langle l_2, \tilde{T}_2 \rangle,$$

$$m_1(T_1, \tilde{T}_1) + m_2(T_2, \tilde{T}_2) = m_1(T^{(0)}, \tilde{T}_1) + m_2(T^{(0)}, \tilde{T}_2)$$

при $\tau = 0$,

$$T_1 = T_2,$$

$$T_1 = T_2 \text{ на } \Gamma_3 \times (0, T].$$

3. Чисельний аналіз задачі. Для знаходження розв'язку варіаційної задачі використаємо напівдискретний метод Галльоркіна [4], згідно з яким подамо шукані функції у вигляді

$$T_1^h = \sum_{i=1}^N q_{1i}(\tau) \varphi_{1i}^h(z);$$

$$T_2^h = \sum_{i=1}^N q_{2i}(\tau) \varphi_{2i}^h(z, z),$$

де $q_{1i}(\tau), q_{2i}(\tau), i = 1, N$ - шукані функції; $\varphi_{1i}^h(z), \varphi_{2i}^h(z, z)$ - базові функції, які будемо методом ізопараметричного відображення з використанням квадратичних та лінійних базисних функцій [2]:

$$\varphi_{11}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)(-\xi);$$

$$\varphi_{12}(\xi) = 1 - \xi^2;$$

$$\varphi_{13}(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)\xi;$$

$$\varphi_{i2} = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi + \eta_i\eta - 1), i = 1, 3, 5, 7;$$

$$\varphi_{i2} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta), i = 2, 6;$$

$$\varphi_{i2} = \frac{1}{2}(1+\xi_i\xi)(1-\eta^2), i = 4, 8.$$

Зауважимо, що згідно з першою умовою /4/ функції $q_{1i}(\tau)$ та $q_{2i}(\tau)$ задовольняють співвідношення

$$q_{i1}(\tau) = q_{i2}(\tau)$$

для скінченно-елементних вузлів і співвідношення, що лежать на границі Γ_3 .

З використанням зображення /7/ варіаційна задача /6/ зводиться до задачі Коші вигляду [4]

$$M \frac{dQ}{d\tau} + KQ = F, \quad /8/$$

$$Q|_{\tau=0} = Q_0,$$

де M, K, F - відомі матриці; Q - вузлові значення шуканої температури; Q_0 - вузлові значення у початковий момент часу.

Для розв'язання задачі /8/ використаємо різницеву схему Кранка-Ніколсона [4].

Приклад. Виконаємо чисельний аналіз розподілу температурного поля в середовищі, яке характеризується $\kappa_2 = 1,789, \lambda_2 = 0,03$ /пісок/ з капіляром завтовшки $h = 0,01$ через який протікає вода ($\kappa_1 = 4,181, \lambda_1 = 0,54$) зі швидкістю $v = 2$. Вибрані такі значення температур зовнішнього середовища: $T_c^{(1)} = 50, T_c^{(2)} = 0$ та коефіцієнти тепловіддачі: $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = 50$. На рисунку подані ізотерми в області Ω_2 при $\tau = 40$ для значень $a = 5, b = 5$.

І. Б е л я є в Н.М., Р я д н о А.А. Методи теорії теплопроводності. В 2 ч. М., 1982. Ч.1. 2. С а в у л а Я.Г. Метод скінченних елементів. К., 1993. 3. С а в у л а Я.Г., С и п а І.М., С т р у г а н с ь к и й І.В. Математичні моделі теплопроводності для тіл з тонкими покриттями і включеннями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.37. С.39-45. 4. Ш и н я р е н к о Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К., 1991.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.94

П.С.Сеньо, М.П.Дивак, Г.М.Гладій, П.С.Венгерський

ІНТЕРВАЛЬНІ МОДЕЛІ
В МЕДИКО-ЕКОЛОГІЧНОМУ ПРОГНОЗУВАННІ

Стан здоров'я людини залежить від багатьох факторів: екологічних, соціальних, демографічних тощо.

Позначимо: x_{ik} - істотність впливу i -го фактора в k -му році на здоров'я населення конкретного територіального району /вплив заданий ваговим коефіцієнтом/; y_k - кількість захворювань певного виду /скажімо, серцево-судинних/ протягом k -го року серед населення району.

Враховуючи точність діагнозів, можна розрахувати максимальну абсолютну похибку Δy_k при визначенні y_k . Тоді дані, отримані від дільничних лікарів шляхом аналізу соціально-екологічної ситуації та діагностування хворих, можна подати в інтервальній формі:

$$\vec{x}_k, [y_k^-, y_k^+], \quad k=1, 2, \dots, N; \quad /1/$$

де $\vec{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{ki}, \dots, x_{kn})$,

$$y_k^- = y_k - \Delta y_k, \quad y_k^+ = y_k + \Delta y_k.$$

При цьому істинна кількість захворювань y_{ok} протягом k -го року належить відомому інтервалу $[y_k^-, y_k^+]$.

Сукупний вплив факторів на кількість захворювань $y(\vec{x})$ заданого виду зручно виписати інтервальною моделлю у вигляді лінійно-параметризованого рівняння [2]:

$$y(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \vec{\delta}, \quad /2/$$

де $\vec{\varphi}^T(\vec{x}) = (\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_m(\vec{x}))$ - відомий вектор базисних функцій; $\vec{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_m)^T$ - невідомий вектор параметрів моделі; $\vec{x}$ - відомий вектор факторів істотності впливу на здоров'я населення.

Із праці [2] випливає, що інтервальною моделлю медико-екологічного прогнозу є будь-яка функція вигляду /2/, що задовольняє інтервальні дані /1/, тобто

$$y_k^-(\vec{x}_k) \leq \vec{\varphi}^T(\vec{x}_k) \vec{\delta} \leq y_k^+(\vec{x}_k), \quad k=1, 2, \dots, N. \quad /3/$$

Очевидно, що система нерівностей /3/ лінійна відносно вектора $\vec{\delta}$. Розв'язком системи /3/ є область значень параметрів

$\vec{b}$ інтервальної моделі. Зі системи рівнянь випливає, що область Ω в просторі параметрів $\vec{b}$ є опуклим багатогранником.

У випадку великої кількості нерівностей у системі /3/ аналіз області Ω істотно ускладнюється. Тому зручно скористатися деякими наближеннями області Ω , приміром у вигляді описаного паралелепіпеда:

$$\Pi = \{ \vec{b} \in R^m : b_i^- \leq b_i \leq b_i^+, i = 1, 2, \dots, m \} \quad /4/$$

з гранями, паралельними осям b_i . При цьому b_i^- і b_i^+ шукаємо шляхом розв'язання відповідних задач лінійного програмування:

$$b_i^- = \min_{\vec{b} \in \Omega} b_i, \quad /5/$$

$$b_i^+ = \max_{\vec{b} \in \Omega} b_i. \quad /6/$$

Модель прогнозу для даного випадку набирає вигляду

$$[\hat{y}^-(\vec{x}), \hat{y}^+(\vec{x})] = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) [\vec{b}^-, \vec{b}^+],$$

де $\hat{y}^-(\vec{x})$, $\hat{y}^+(\vec{x})$ - відповідно нижня та верхня оцінки кількості захворювань; $\vec{b}^-$ і $\vec{b}^+$ - вектори, компонентами яких є розв'язки задач /5/ і /6/.

У загальному випадку межі коридору прогнозу $[\hat{y}^-(x), \hat{y}^+(x)]$, побудовані на основі області Ω , є не достатньо гладкими функціями:

$$\hat{y}^-(\vec{x}) = \min_{\vec{b} \in \Omega} \varphi^T(\vec{x}) \vec{b}; \quad /7/$$

$$\hat{y}^+(\vec{x}) = \max_{\vec{b} \in \Omega} \varphi^T(\vec{x}) \vec{b}, \quad /8/$$

що не завжди зручно на практиці. Для уникнення цієї незручності у випадку $N = m$ можна використати таке твердження.

Твердження. Для $N = m$ навколо багатогранника Ω можна описати еліпсоїд:

$$Q_m = \{ \vec{b} \in R^m : (\vec{b} - \vec{\bar{b}})^T \Phi^T E^{-2} \Phi (\vec{b} - \vec{\bar{b}}) = m \}, \quad /9/$$

що проходить через усі вершини багатогранника Ω з центром ваги

$$\vec{\bar{b}} = \Phi^{-1} \vec{\bar{y}},$$

де $\vec{\bar{y}} = \frac{1}{2}(y_1^- + y_1^+, y_2^- + y_2^+, \dots, y_N^- + y_N^+)$.

Центр ваги збігається з центром симетрії Ω .

У виразі /9/ $\Phi = \{ \varphi_j(\vec{x}_k), j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, N \}$ - матриця значень базисних функцій розмірності $N \times m$; E - відома матриця інтервальних похибок даних, яка має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} \Delta y_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta y_N \end{pmatrix}$$

Твердження доведене у праці [17].

Користуючись виразом /9/, неважко показати, що межі коридору прогнозу є функціями вигляду

$$\hat{y}^-(\vec{x}) = \varphi^T(\vec{x}) \vec{\beta} - \Delta y(\vec{x});$$

$$\hat{y}^+(\vec{x}) = \varphi^T(\vec{x}) \vec{\beta} + \Delta y(\vec{x}),$$

де

$$\Delta y(\vec{x}) = \sqrt{\vec{\varphi}^T(\vec{x}) (\varphi^T E^{-2} \varphi)^{-1} \varphi(\vec{x}) m}.$$

Таким чином, побудована інтервальна модель дає змогу, враховуючи соціально-екологічну ситуацію в районі, спрогнозувати в будь-який момент часу гарантований інтервал кількості захворювань певного класу серед населення району.

2. В о щ и ш и н А.П., Д ы в а к Н.П. Планирование оптимального насыщенного эксперимента в задачах интервальных данных // Завод. лаб. 1993. № 1. С.56-59. 2. Voshinin A.P., Dyvak N.P., Simoff S.J. Interval methods: theory and application in design of experiments, data analysis and fitting // Design of Experiments and analysis: New Trends and Results / Edited by Letzky E.K. Moscow: ANTAL, 1993. P.10-51.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.94

УДК 617.51

Г.Г.Цегелик, Н.В.Федчишин

ВИКОРИСТАННЯ НЕКЛАСИЧНОГО АПРАТУ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ ДЛЯ ПОБУДОВИ НОВОЇ КВАДРАТНОЇ ФОРМУЛИ

Некласична теорія мажорант і діаграм Ньютонa бере свій початок у працях [6, 7], в яких вперше введено поняття некласичної мажоранти і діаграми Ньютонa нескінченної числової послідовності, визначені необхідні та достатні умови існування діаграми Ньютонa, вивчені властивості мажоранти Ньютонa. Як застосування

© Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В., 1995

запропонований підхід до побудови класу наближених методів пошуку інформації у файлах баз даних, що використовують характеристики діаграми Ньютона послідовності значень пошукового ключа, яким характеризуються записи файла. У працях [1, 3, 4, 5] апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона узагальнюється на функції дійсних змінних, заданих на опуклих множинах евклідового простору, а також на самі множини цього простору. У праці [8] теорія неklasичних мажорант і діаграм Ньютона перенесена на функції дійсної змінної, що задані таблично. У праці [2] побудований апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона числових рядів, який використаний для визначення достатніх умов їх збіжності.

У даній роботі із використанням неklasичного апарату мажорант і діаграм Ньютона функцій дійсної змінної, заданих таблично, побудована нова квадратурна формула для наближеного обчислення означених інтегралів.

Розглянемо функцію дійсної змінної $y=f(x)$, яка задана своїми значеннями в деяких точках

$$f(x_i) = y_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Нехай

$$|y_i| = a_i \leq M \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad a_1 a_n \neq 0,$$

де M — деяка константа.

Точка $P_i(x_i, -\ln a_i)$ з координатами $x=x_i, y=-\ln a_i$ в площині xy називається точкою зображення значення функції $y=f(x)$ в точці x_i . Припустимо, що точки зображення P_i значень функції $y=f(x)$ в точках $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ у площині xy побудовані. Множину цих точок позначимо через S а її опуклу оболонку — через $C(S)$. Для кожного $x \in [x_1, x_n]$ визначимо точку $B_x(x, \mathcal{H}_x)$, де

$$\mathcal{H}_x = \inf_{(x,y) \in C(S)} y.$$

Множина точок $B_x(x, \mathcal{H}_x), x \in [x_1, x_n]$, утворює лінію $\mathcal{V}_f$, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця лінія є неперервною опуклою ламаною лінією, її рівняння має вигляд

$$y = \mathcal{H}(x), \quad x \in [x_1, x_n],$$

де $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_x$. Ламана лінія $\mathcal{V}_f$, визначена на проміжку $[x_1, x_n]$, називається діаграмою Ньютона функції $y=f(x)$ на цьому проміжку [5].

Позначимо

$$M_f(x) = \exp(-\kappa(x)), \quad x \in [x_1, x_n].$$

Функція $y = M_f(x)$, визначена на проміжку $[x_1, x_n]$, називається мажорантою Ньютона функції $y = f(x)$ на цьому проміжку [8].

Якщо точка зображення P_i ($i=1, 2, \dots, n$) розміщена у вершині V_f , то індекс i називається вершинним, якщо κ на V_f , то - діаграмним. Індеси $i=1$ та $i=n$ належать до вершинних індесів.

Нехай $\{i_k\}$ ($k=1, 2, \dots, S; S \leq n$) - послідовність вершинних індесів V_f . Тоді, якщо $x_{i_{k-1}} \leq x \leq x_{i_k}$, то

$$M_f(x) = \left(a_{i_{k-1}}^{x_{i_k}-x} a_{i_k}^{x-x_{i_{k-1}}} \right)^{\frac{1}{x_{i_k}-x_{i_{k-1}}}}. \quad /1/$$

Покажемо, як використовуючи формулу /1/, побудувати нову квадратурну формулу для наближеного обчислення означених інтегралів.

Нехай треба обчислити означений інтеграл

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

де $f(x) > 0$ для всіх $x \in [a, b]$. Замінивши на проміжку $[a, b]$ функцію $f(x)$ мажорантою Ньютона:

$$M_f(x) = ((f(a))^{b-x} (f(b))^{x-a})^{\frac{1}{b-a}},$$

одержимо

$$S = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b M_f(x) dx = \int_a^b ((f(a))^{b-x} (f(b))^{x-a})^{\frac{1}{b-a}} dx.$$

Позначимо $f(a) = A$, $f(b) = B$,

$$\bar{S} = \int_a^b (A^{b-x} B^{x-a})^{\frac{1}{b-a}} dx$$

і обчислимо $\bar{S}$. Одержимо

$$\bar{S} = (b-a) \frac{f(b) - f(a)}{\ln f(b) - \ln f(a)}.$$

Розіб'ємо тепер проміжок інтегрування $[a, b]$ на n однакових частинок завдовжки $h = (b-a)/n$ точками $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, де $x_0 = a$, $x_n = b$, і на кожному проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) замінимо функцію $f(x)$ мажорантою Ньютона $M_f(x)$. Одержимо

$$S = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} m_f(x) dx.$$

Оскільки

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} m_f(x) dx = (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\ln f(x_{i+1}) - \ln f(x_i)},$$

то

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{\ln f(x_1) - \ln f(x_0)} + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\ln f(x_2) - \ln f(x_1)} + \dots + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{\ln f(x_n) - \ln f(x_{n-1})} \right)$$

І. Захаревич Л.І., Цегелик Г.Г. Некласичний апарат мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих на обмежених замкнених множинах // Вісн. Львів. політехн. ін-ту "Диференціальні рівняння та їх застосування". 1991. № 251. С.46-49. 2. Захаревич Л.І., Цегелик Г.Г. Побудова мажорант і діаграм Ньютона числових рядів // Вісн. Львів. політех. ін-та "Диференціальні рівняння та їх застосування". 1989. № 232. С.61-62. 3. Цегелик Г.Г., Захаревич Л.І. Апарат мажорант і минорант Ньютона функцій, заданих на випуклих множинах евклідова простору // Тез. докл. і збір. шк. "Теорія наближення функцій". К.: Ін-т математики АН УРСР. 1989. С.159. 4. Цегелик Г.Г. Мажоранти і миноранти Ньютона обмежених замкнених множин евклідова простору // Тез. докл. XIX Всесоюз. алгебраїчної конф. Львів, 1987. Ч.1. С.304. 5. Цегелик Г.Г. Мажоранти і діаграми Ньютона функцій дійсної змінної, заданих в проміжку // Докл. АН УРСР. Сер. А. 1987. № 6. С.18-19. 6. Цегелик Г.Г. Мажоранти і діаграми Ньютона числових послідовностей і їх застосування до пошуку інформації в базах даних. К., 1985. 12 с. /Препринт АН УРСР, Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова; № 85-49/. 7. Цегелик Г.Г. Організація пошуку інформації в базах даних. Львів: Вища шк. 1987. 176 с. 8. Цегелик Г.Г. Теорія мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, і її застосування // Укр. мат. журн. 1989. Т.41. № 9. С.1273-1276.

Стаття надійшла до редакції 10.02.94

Н.П.Флейшман, Ч.Н.Койфман

УЗАГАЛЬНЕНІ УМОВИ СПРЯЖЕННЯ СЕРЕДОВИЩ
ЗА ДОПОМОГОЮ ТОНКОГО ПЛОСКОГО ПРОШАРКУ

1. Розглянемо ізотропний, однорідний, плоский прошарок малої товщини $2h = \text{const}$, який з'єднує два середовища /тіла/ "1" та "2". Припустимо, що в прошарку відбувається деякий фізичний одновимірний нестационарний процес, який моделюється рівнянням

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\kappa \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma^2 v - \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial t} = A(z, t), \quad /1/$$

де $v(z, t)$ - шукана функція; t - час; $-h \leq z \leq h$; κ, a, γ^2 - відомі константи; $A(z, t)$ - відома функція.

При часткових значеннях коефіцієнтів рівняння /1/ описує, зокрема, теплопровідність рухомого та нерухомого середовища; теплопровідність тіла, теплофізичні параметри якого залежать від температури, дифузії; фільтрації; поширення теплових хвиль; поширення домішок в атмосфері тощо [1-6].

У середовищах "1", "2" з іншими фізичними характеристиками опостерігається той же фізичний процес, який визначається функціями $u_1(z, t)$ та $u_2(z, t)$. На площинах $z = \pm h$ виконуються умови спряження, які загалом можна записати у вигляді:

$$\beta v(-h, t) = \beta_1 u^+, \quad \beta v(h, t) = \beta_2 u^+, \quad /2/$$

$$\lambda \frac{\partial v(-h, t)}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial u^+}{\partial z}, \quad \lambda \frac{\partial v(h, t)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial u^+}{\partial z}, \quad /3/$$

де u^-, u^+ - значення функцій u_1, u_2 відповідно при $z = -h$ та $z = h$; $\beta, \beta_1, \beta_2, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ - відомі числа.

Дискретизуючи область прошарку вздовж осі z , вибираємо три точки $z = 0$ та $z = \pm h$ і записуємо рівняння /1/ лише в точці $z = 0$, замінюючи одночасно похідні по z їхніми симетричними різницевиими аналогами з точністю $O(h^2)$. В умовах /3/ похідні по z замінюємо відповідно їхніми несиметричними аналогами з такою ж точністю і після виключення вели-

чин $V(-h, t)$, $V(h, t)$ та

$$V(0, t) = \frac{1}{2} [V(h, t) + V(-h, t)] - \frac{h}{4\lambda} (\lambda_2 \frac{\partial u^+}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial u^-}{\partial z}). \quad /4/$$

отримуємо остаточно узагальнені умови спряження середовищ "1", "2":

$$\frac{1}{\beta} (\beta_2 u^+ - \beta_1 u^-) - \frac{h}{\lambda} (\lambda_1 \frac{\partial u^-}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial u^+}{\partial z}) = 0; \quad /5/$$

$$\begin{aligned} (1+2kh) \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{\partial u^+}{\partial z} - (1-2kh) \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial u^-}{\partial z} = \\ = h \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \gamma^2 \right) \left[\frac{1}{\beta} (\beta_2 u^+ + \beta_1 u^-) - \right. \\ \left. - \frac{h}{2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{\partial u^+}{\partial z} - \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial u^-}{\partial z} \right) \right] + 2hA(0, t). \end{aligned} \quad /6/$$

2. Розглянемо частковий випадок, коли тіло "2" відсутнє, а на зовнішній площині $z = h$ тонкого покриття тіла "1" справедлива гранична умова

$$\lambda \frac{\partial V(h, t)}{\partial z} + \alpha V(h) = F_0(t), \quad /7/$$

де $\lambda \geq 0$, $\alpha \geq 0$ - відомі числа; $F_0(t)$ - відома функція.

Враховуючи /2/, /3/ перепишемо умову /7/ так

$$\lambda_2 \frac{\partial u^+}{\partial z} = -\alpha \frac{\beta_2}{\beta} u^+ + F_0(t). \quad /8/$$

Виключаючи величини u^+ та $\frac{\partial u^+}{\partial z}$ з формул /5/, /6/, /8/, виводимо узагальнену граничну умову на функцію $u_1(z, t) \equiv u(z, t)$ для середовища з тонким покриттям на площині $z = -h$ /верхній індекс мінує у функції u пропущений/

$$\alpha_* u + \lambda_* \frac{\partial u}{\partial z} + \mu_* \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1 h^2 \mu_* \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = F(t), \quad /9/$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_* &= \alpha \frac{\beta_1}{\beta} [1 + 2kh] - \gamma^2 h \left(\frac{2\lambda}{\alpha} + \frac{3}{2} h \right), \\ \lambda_* &= \lambda_1 \left[(1 - 2kh + 2\alpha h / \lambda) - \frac{1}{2} \gamma^2 h^2 (3 + 2\alpha h / \lambda) \right], \\ \mu_* &= (2\lambda h + \frac{3}{2} \alpha h^2) \beta_1 / \beta, \quad \mu = \frac{3}{2} + \alpha h / \lambda, \\ F(t) &= 2\lambda h \left(1 + \frac{\alpha h}{\lambda} \right) A(0, t) + \\ &+ \left[(1 + 2kh) - \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \gamma^2 \right) \frac{h^2}{2} \right] F_0(t). \end{aligned} \quad /10/$$

3. Граничну умову /9/ для тіла з тонким покриттям сталої товщини можна подати також в інтегральній формі /після інтегрування по t /

$$\alpha_*(u-u_0) + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial z}(u - e^{-\pi t} u_0) = \\ = \pi e^{-\pi t} \int_0^t [(\lambda_0 - \lambda_*) \frac{\partial u}{\partial z} + F(t)] e^{\pi t} dt, \quad t > 0, z = -h, \quad /II/$$

де

$$\lambda_0 = \pi \lambda, h^2 \mu / a, \quad \pi = a \alpha_* / \mu_*, \quad u_0 = u(z, 0).$$

1. Г о л у б е в а О.В. Курс механики сплошных сред. М., 1972. 2. К а р с л о у Г., Е г е р Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. 3. М а р ч у к Г.И. Математическое моделирование в проблеме охраны окружающей среды. М., 1982. 4. П а с к о - н о в В.М., П о л е ж а е в В.И., Ч у д о в Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М., 1984. 5. П о - л у б а р и н о в а - К о ч я н е П.Я. Теория движения грунтовых вод. М., 1947. 6. Ф л е й ш м а н Н.П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісник ЛДУ. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С.30-34.

Стаття надійшла до редколегії 27.04.94

УДК 539.3

М.В.Щербатий

ОПТИМІЗАЦІЯ ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СКЛАДОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

У даній роботі розглянуті постановки і схема розв'язування задач оптимізації для складових оболонок обертання типу Тимошенка з урахуванням частот несесиметричних вільних коливань. Отримане співвідношення аналізу чутливості для простих частот вільних коливань відносно геометричних і структурних параметрів оптимізації. Проаналізовані числові результати оптимізації, які показують можливість появи кратних частот власних коливань у процесі пошуку оптимального розв'язку.

1. Постановка задач оптимізації складається з функцій керування і функцій стану розглядуваної системи; рівнянь, які пов'язують функції керування і функції стану /математична модель системи/; критерію мети і множини допустимих керувань

1995.

Щербатий М.В., 1995

Покамо область S_2 , яку займає серединна поверхня оболонки обертання, у вигляді об'єднання підобластей:

$$S_2 = \bigcup_{i=1}^N S_{2i}, \quad S_{2i} = \{\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i) : \alpha_{10}^i \leq \alpha_1^i \leq \alpha_{1e}^i, 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi\}.$$

Позначимо через $x_z = (x_{z1}, \dots, x_{zN})^T$,

$$x_{zi}(\alpha^i) = [z_i(\alpha_1^i), z_i(\alpha_1^i), h_i(\alpha_1^i), E_i(\alpha_1^i), \nu_i(\alpha_1^i), \rho_i(\alpha_1^i)]^T,$$

$i = \overline{1, N}$ - набір геометричних і фізичних параметрів оболонки, за допомогою яких визначаються коефіцієнти операторів математичної моделі оболонки та її характеристики. Тут $z_i, \bar{z}_i$ - функції, які задають рівняння меридіана серединної поверхні в області S_{2i} ; h_i - товщина i -ї частини оболонки; E_i, ν_i, ρ_i - модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і густина матеріалу оболонки відповідно.

Серединна поверхня кожної зі складових оболонки в циліндричній системі координат записується у вигляді:

$$x^1 = z_i(\alpha_1^i) \cos \alpha_2, \quad x^2 = z_i(\alpha_1^i) \sin \alpha_2, \quad x^3 = z_i(\alpha_1^i).$$

Частина або всі компоненти вектора параметрів x_z оболонки можуть бути параметрами вектора керування x .

Запишемо математичну модель задачі про вільні коливання складової оболонки обертання у вигляді варіаційного рівняння [3, 4, 6]:

$$a_x(u_j, v) = \omega_j^2 d_x(u, v) \quad \forall v \in H, \quad /1/$$

які виконуються для будь-яких форм власних коливань v із простору кінематично допустимих функцій H . Тут ω_j - частота вільних коливань; u_j - форма вільних коливань, яка відповідає даній частоті;

$$a_x(u_j, v) = \int_{\mathcal{R}} (cu_j)^T E_0 B C v d\mathcal{Q}; \quad /2/$$

$$d_x(u_j, v) = \int_{\mathcal{R}} u_j^T M v d\mathcal{Q} \quad /3/$$

- білінійні симетричні форми, коефіцієнти яких залежать від параметрів керування x ; $C = C(z_i, \bar{z}_i)$ - матриця диференціальних операторів; $B = B(h_i, E_i, \nu_i)$ - матриця пружних констант; E_0 - діагональна матриця з елементами $e_{kk} = 1, k = \overline{1, 7}, e_{33} = 2$; $M = M(h_i, \rho_i)$ - матриця мас. Для того щоб наголосити на залежності коефіцієнтів білінійних форм /2/, /3/ і відповідно розв'язку (ω_j, u_j) від функції керування x їх записують з індексом x .

Позначимо через $U = \{x: x \in X, x_-(\alpha) \leq x(\alpha) \leq x_+(\alpha)\}$ - множину керувань /для спрощення запису індекс i біля α_i^i не ставимо/. Тут X - клас функцій, з якого вибираються керування; x_- , x_+ - допустимі межі зміни функції керування для яких задача /1/ має розв'язок /докладніше існування розв'язку прямих і оптимізаційних задач розглянуте у праці [3] /. Нехай $(u, \omega) = (u(x), \omega(x))$ - розв'язок задачі /1/, отриманий для заданої функції керування x ; $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_j, \dots)$, $\omega_1 \leq \dots \leq \omega_j \leq \dots$ - впорядкований спектр частот власних коливань; $u = (u_1, \dots, u_j, \dots)$ - відповідний набір власних векторів.

Розглянемо деякі функціонали від частот власних коливань, які найчастіше використовуються в задачах оптимізації [1, 3]:
а/ найнижча частота власних коливань:

$$\tilde{\psi}_1(x) = \omega_1^{-1}; \quad /4/$$

б/ розмір безрезонансної смуги в околі заданого значення ξ :

$$\tilde{\psi}_2(x) = (\min_j |\omega_j - \xi|)^{-1}. \quad /5/$$

Окрім функціоналів /4/, /5/, як правило, фігурує функціонал об'єму /маси/ конструкції:

$$\tilde{\psi}_3(x) = \int_{\Omega} \varphi(x) d\Omega, \quad /6/$$

φ - задана функція приміром, у випадку об'ємної характеристики $\varphi = h$ у випадку маси - $\varphi = \rho h$).

Один із функціоналів /4/-/6/ вибирають у ролі критерію оптимізації:

$$\psi_0(x) = \tilde{\psi}_i(x), \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad /7/$$

інші в цей час можуть бути обмеженнями:

$$\psi_k(x) = \tilde{\psi}_k(x) - \psi_k^+ \leq 0, \quad k \in \{1, 2, 3\}, \quad k \neq i. \quad /8/$$

Крім обмежень /8/ на функції керування x накладають двосторонні обмеження:

$$\begin{aligned} x^-(\alpha) &\leq x(\alpha) \leq x^+(\alpha), \\ x_-(\alpha) &\leq x^-(\alpha), \quad x^+(\alpha) \leq x_+(\alpha). \end{aligned} \quad /9/$$

З урахуванням /8/, /9/ множину допустимих керувань U_0 записують у вигляді

$$\begin{aligned} U_0 = \{x: x \in U, \quad x^-(\alpha) &\leq x(\alpha) \leq x^+(\alpha), \\ \psi_k(x) &\leq 0, \quad k = \overline{1, m}\}. \end{aligned} \quad /10/$$

Задача оптимізації /оптимального керування/ полягає в знаходженні такої функції керування x_* , яка надає найменшого значення критерію мети ψ_0 на множині допустимих керувань U_D [3]:

$$x_* \in U_D, \psi_0(x_*) = \inf_{x \in U_D} \psi_0(x). \quad /11/$$

2. Дискретизація задач оптимізації. Отримати точний розв'язок задачі оптимізації /11/ вдається досить рідко. Тому для отримання розв'язку задач оптимізації використовують один із двох підходів. Згідно з першим підходом пошук розв'язку задачі /11/ здійснюється на основі методів оптимізації систем з розподіленими параметрами і варіаційного числення. Після отримання відповідних умов оптимальності застосовуються числові алгоритми. Відповідно до другого підходу [5, 6, 8, 9], який використаний у даній роботі, з самого початку здійснюється апроксимація функцій керування їх скінченновимірними аналогами. Для розв'язування отриманих наслідків дискретизації задач оптимізації використовуються відомі методи нелінійного програмування.

Нехай множина параметрів x_z оболонки характеризується вектором $\beta_z = (\beta_{z1}, \dots, \beta_{zp})^T, \beta_z \in R^p$ (p - розмірність евклідового простору):

$$x_z(\alpha) = x_z(\alpha, \beta_z).$$

Позначимо через $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T, \beta \in R^n$ - вектор оптимізації, компоненти якого є компонентами вектора β_z і через які змінюється функція керування x :

$$x(\alpha) = x(\alpha, \beta). \quad /12/$$

На компоненти вектора оптимізації β накладаються двосторонні обмеження:

$$\beta^- \leq \beta \leq \beta^+, \beta^-, \beta^+ \in R^n. \quad /13/$$

Внаслідок подання функції керування x згідно з /12/, коефіцієнти білінійних форм /2/, /3/, а також функціонали /4/-/6/ є функціями вектора оптимізації β . Множина допустимих керувань U_D записується у вигляді множини допустимих значень:

$$U_D = \{\beta: \beta \in R^n, \beta^- \leq \beta \leq \beta^+, \psi_k(\beta) \leq 0, k = 1, m\}. \quad /14/$$

У виразі /14/ в ролі обмежень ψ_k використані обмеження типу /8/, а також обмеження, отримані з /9/.

Тоді задача оптимізації /11/ є задачею нелінійного математичного програмування. Вона полягає в знаходженні вектора оптимізації $\beta_* \in R^n$, який надає мінімального значення критерію мети ψ_0 на множині допустимих значень /14/:

$$\beta_* \in U_D, \psi_0(\beta_*) = \inf_{\beta \in U_D} \psi_0(\beta). \quad /15/$$

Для розв'язування варіаційного рівняння /1/ скористаємось напіваналітичним методом скінченних елементів /MSE/. Подамо функцію форми власних коливань u_j у вигляді розкладу

$$u_j(\alpha) = \sum_i \Phi_i(\alpha_2) \Psi_{ij}(\alpha_1) \quad /16/$$

по повній системі тригонометричних функцій $\Phi_i(\alpha_2)$ вздовж кругової координати α_2 . Функції $\Psi_{ij}(\alpha_1)$ апроксимуємо вздовж α_1 , згідно з MSE:

$$\Psi_{ij}(\alpha_1) = \sum_e N_e(\alpha_1) q_{eij}, \quad /17/$$

q_{eij} - вектор вузлових невідомих на елементі e для функції /гармоніки/ з номером i .

Підставляючи у варіаційне рівняння /1/ розклади /16/, /17/, а також аналогічне /16/ подання пробної функції v , і враховуючи ортогональність функцій Φ_p, Φ_q на проміжку $[0, 2\pi]$ ($(\Phi_p, \Phi_q) = 0, p \neq q$) приходимо до узагальнених матричних задач на власні значення для кожної i -ї гармоніки:

$$K_i(\beta) q_{ij} = \omega_{ij}^2 M_i(\beta) q_{ij}, \quad i=0,1,2,\dots \quad /18/$$

у /18/: $K_i = \sum_e K_{ie}$, $M_i = \sum_e M_{ie}$ - симетричні матриці жорсткості і маси для i -ї гармоніки; K_{ie}, M_{ie} - матриці жорсткості і маси елемента e ; ω_{ij} , q_{ij} - j -та частота власних коливань і вектор вузлових значень j -ї форми власних коливань, які відповідають i -ї гармоніці. Узагальнені матричні задачі на власні значення /18/ розв'язуються методом ітерацій у підпросторі [2].

Нехай $\omega_{(i)} = (\omega_{i1}, \dots, \omega_{ij}, \dots)$ - впорядкований спектр частот власних коливань, що відповідає i -ї гармоніці. Очевидно, що у впорядкованому спектрі частот власних коливань $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k, \dots)$, який складається із частот $\omega_{(i)}$, частоти, які відповідають різним гармонікам i переміщуються. Тоді функціонал /4/ для знаходження найнижчої частоти власних коливань має вигляд

$$\tilde{\psi}_1(\beta) = (\min_i \omega_{i1})^{-1}.$$

3. Аналіз чутливості для простих частот власних коливань.

Використання методів нелінійного програмування вимагає ефективних процедур обчислення похідних /аналіз чутливості [8] / відповідних характеристик розглядуваних систем відносно параметрів оптимізації. Наведемо коефіцієнти чутливості для вагових і частотних характеристик оболонки.

У випадку вагових характеристик /6/ оболонки обчислення похідної здійснюють шляхом явного диференціювання підінтегральної функції φ /форма області не змінюється/:

$$\frac{d\tilde{\varphi}_3}{d\delta} = \int_{\Omega} \frac{d\varphi}{d\delta} d\Omega.$$

У випадку функціоналів /4/, /5/ необхідно вміти обчислювати повну похідну $d\omega_{ij}/d\delta$ від частот власних коливань ω_{ij} . Нехай власне число ω_{ij} є простим, а відповідний власний вектор q_{ij} нормований відносно матриці мас M_i :

$$q_{ij}^T M_i q_{ij} = 1. \quad /19/$$

Після домноження обох частин рівняння /18/ зліва на q_{ij}^T і диференціювання його по вектору оптимізації δ з урахуванням /19/, отримуємо співвідношення для обчислення похідної простого власного числа ω_{ij} по вектору оптимізації δ :

$$\frac{d\omega_{ij}}{d\delta} = \frac{1}{2\omega_{ij}} q_{ij}^T \left[\frac{dK_i}{d\delta} - \omega_{ij}^2 \frac{dM_i}{d\delta} \right] q_{ij}. \quad /20/$$

Таким чином, якщо відомі проста частота власних коливань ω_{ij} і відповідний власний вектор q_{ij} , то похідна від нього по вектору оптимізації δ безпосередньо обчислюється згідно з /20/.

Проаналізуємо спосіб обчислення похідних

$$dK_i/d\delta = \sum_e dK_{ie}/d\delta, \quad dM_i/d\delta = \sum_e dM_{ie}/d\delta,$$

для матриць жорсткості і маси у випадку різних керувань.

У разі керування товщиною і структурними характеристиками $x = (h(\delta), E(\delta), \nu(\delta), \rho(\delta))$ обчислення $dK_{ie}/d\delta, dM_{ie}/d\delta$ зводиться до явного диференціювання $(dB/dx)(dx/d\delta), (dM/dx)(dx/d\delta)$ елементів матриці пружних констант B і матриці маси M на кожному скінченному елементі. Якщо, скажімо, функції керування мають кусковий характер процес обчислення похідних можна зробити ефективнішими. Для цього відповідні матриці подають у вигляді лінійних комбінацій, що не залежать від параметрів керування матриць, домножених на дані параметри у відповідній степені [5, 6].

У випадку керування формою меридіана серединної поверхні, $x = (z(\delta), z(\delta))$, $dM_i/d\delta = 0$. Обчислення $dK_{ie}/d\delta$ вимагає знаходження похідних $(dc/dx)(dx/d\delta)$ від матриці диференціальних операторів на скінченному елементі. Коефіцієнти оператора C складним чином залежать від функцій, що описують меридіан серединної поверхні та їхніх похідних. Отримати аналітичні співвідношення для обчислення dc/dx в загальному випадку не вдається. Тому доцільним є для обчислення даних похідних використання скінченних різниць.

4. Чисельні приклади. 4.1. Розглядається задача максимізації найнижчої частоти власних коливань круглої пластини радіусом R при обмеженні на вагу:

$$\psi_0(\delta) = \omega_1^{-1}, \quad /21/$$

$$U_2 = \left\{ \delta: \delta \in R^n, \delta^- \leq \delta \leq \delta^+, \psi_1(\delta) = \int_{\Omega} \rho h d\Omega - \psi_1^+ \leq 0 \right\}.$$

У ролі вектора оптимізації δ вибирають товщину h пластини, яка апроксимується кусково-постійною функцією:

$$h(\alpha_1, \delta) = \delta_i, \quad \alpha_1 = [(i-1)\Delta, i\Delta], \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

$$\Delta = (\alpha_{1e} - \alpha_{10})/n, \quad \alpha_{10} = 0, \quad \alpha_{1e} = R, \quad /22/$$

або лінійно-змінною функцією:

$$h(\alpha_1, \delta) = \delta_i(i - \alpha_1/\Delta) + \delta_{i+1}(\alpha_1/\Delta - i + 1),$$

$$\alpha_1 = [(i-1)\Delta, i\Delta], \quad i \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$\Delta = (\alpha_{1e} - \alpha_{10})/(n-1), \quad \alpha_{10} = 0, \quad \alpha_{1e} = R.$$

Тут n - розмірність вектора оптимізації δ , на компоненти якого накладаються двосторонні обмеження /13/.

Задачу оптимізації /21/ розв'язували методом зовнішніх штрафних функцій в поєднанні з методом спряжених градієнтів [7] за таких вихідних даних: $\delta_i^- = 0,05$, $\delta_i^+ = 0,01$, $\delta_i^+ = 0,1$, $i = \overline{1, n}$, $R = 1$ /радіус пластини/, $E = 0,21 \cdot 10^{12}$, $\rho = 0,785 \cdot 10^4$, $\nu = 0,3$, $k' = 5/6$ /всі величини подані у системі СІ /. Уздовж радіуса пластини вибрали 8 скінченних елементів. Величина ψ_1^+ дорівнює вазі пластини при початковій товщині.

У табл. 1 і 2 наведені значення товщин δ_i і найнижчої частоти ω_1 в початковій та отриманій внаслідок розв'язування

задачі оптимізації /21/ пластинах в умовах жорсткого заземлення /табл. 1/ і вільного опирання /табл. 2/ вздовж краю $\alpha_1 = R$ для $n = 2, n = 4$.

Таблиця 1

Тип апроксимації товщини : n :	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	ω_1	
Постійна /початковий розподіл/	4	0,05	0,05	0,05	0,05	126
Кусково-постійна	2	0,021	0,06			149
Кусково-постійна	4	0,011	0,024	0,048	0,068	160
Лінійно-змінна	2	0,01	0,01			150

Таблиця 2

Тип апроксимації товщини	n	δ_1	δ_2	ω_1
Постійна /початковий розпо- діл/	2	0,05	0,05	61
Кусково-постійна	2	0,094	0,27	68

Бідазначимо, що найнижча частота в початковій та оптимальній пластинах досягається при осесиметричних формах коливань вздовж кругової координати /гармоніка $\bar{z} = 0$ /. У випадку жорсткого заземлення товщина пластини зростає від центра, до краю пластини. У випадку вільного опирання товщина є найбільшою в центрі пластини.

4.2. Розглядається циліндрична оболонка завдовжки l і радіусом R , шарнірно оперта вздовж країв $\alpha_1 = 0, \alpha_1 = l$, яка здійснює вільні коливання, симетричні вздовж середини циліндра. Аналіз симетричних вздовж середини циліндра коливань дає змогу розглядати тільки половину циліндра: $0 \leq \alpha_1 \leq l/2$. На краю $\alpha_1 = l/2$ задаються умови симетрії.

Ставиться задача /21/ максимізації найнижчої частоти власних коливань ω_{i1} для кожної із гармонік $\bar{z} = 0, 1, 2, 3$. У ролі вектора оптимізації δ вибирається товщина циліндра, яка апроксимується кусково-постійною функцією /22/.

Задача оптимізації /21/ розв'язана за таких вихідних даних: $\delta_i^- = 0,00254$, $\delta_i^+ = 0,0001$, $\delta_i^+ = 0,01$, $\bar{z} = \bar{z}_n$, $R = 0,065$, $l = 0,6$, $E = 0,625 \cdot 10^{11}$, $\rho = 0,245 \cdot 10^4$, $\nu = 0,22$,

$k' = 5/6$ /всі величини подані у системі СІ /. Вважали, що величина ψ_1^+ дорівнювала вазі циліндричної оболонки при початковій товщині.

Таблиця 3

Номер i гармоніки	$\delta_1 \cdot 10^2$	$\delta_2 \cdot 10^2$	$\delta_3 \cdot 10^2$	$\delta_4 \cdot 10^2$	ω_{i1} ° /поч./	ω_{i1} /опт./
0 /осесиметричні коливання/	0,01	0,027	0,17	0,81	12069	15925
0 /крутильні коливання/	0,77	0,21	0,03	0,01	7895	17426
1	0,45	0,26	0,018	0,014	4365	4741
2	1,0	0,019	0,013	0,01	2058	3306
3	0,01	1,0	0,01	0,01	3678	6495

У табл. 3 наведені значення товщин δ_i і найнижчої частоти ω_{i1} /поч. /, ω_{i1} /опт. /, циліндричної оболонки до оптимізації і після оптимізації для різних гармонік при чотирьох параметрах оптимізації / $n = 4$ /.

Із табл. 3 бачимо, що товщина в оболонці для різних гармонік i /різних форм коливань вздовж осі обертання/ розподіляється по-різному. Скажімо при врахуванні тільки осесиметричних коливань товщина циліндра спадає від середини до країв. Для крутильних коливань і для гармонік $i = 1, 2$ навпаки, товщина є найменшою в середній частині циліндра і збільшується із наближенням до країв. Для гармоніки $i = 3$ товщина є найбільшою на відстані близько $1/8 \ell$ від країв циліндра і досягає нижньої межі δ_i на краях і в середині циліндра.

Зуважимо, що в разі максимізації найнижчої частоти ω_{i1} на один із гармонік i найнижчі частоти на інших гармоніках зменшуються і стають меншими від ω_{i1} /опт. /. Тобто, при повному розподілі товщини виникають кратні власні частоти. Тому для підвищення найнижчої частоти циліндричної оболонки потрібно врахувати можливість появи кратних власних частот і будувати відповідні алгоритми аналізу чутливості та оптимізації.

1. Б а н я ч у к Н.В. Введение в оптимизацию конструкции. М.: Наука, 1986. 302 с. 2. Б а т е К., В и л с о н Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Мир, 1982. 488 с. 3. Л и т в и н о в В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 366 с. 4. П е л е х Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978. 158 с. 5. С а в у л а Я.Г., Ф л е й ш м а н Н.П. Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями. Львов: Вища школа, 1989. 172 с. 6. С а в у л а Я.Г., Щ е р б а т ы й М.В. Анализ чувствительности при оптимальном проектировании составных оболочечных конструкций // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. Вып. I. С. 137-143. 7. Х о г Э., А р о р е Я. Прикладное оптимальное проектирование. М.: Мир, 1983. 479 с. 8. Х о г Э., Ч о й К., К о м к о в В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428 с. 9. Bletzinger K.-U., Ramm E. Structural optimization as tool for shape design // Proc. of the First Eur. Conf. on Num. Met. in Eng., 7-11 Sept. 1992, Brussels, Belgium, 1992. P. 465-467.

Стаття надійшла до редколегії 07.04.94

УДК 681.3.06

М.Д.Щербина, П.Д.Мосорін, В.В.Черняхівський

СИНТАКСИЧНИЙ АНАЛІЗ І ЕМУЛЯЦІЯ ТРАСУВАННЯ ДЛЯ ДЕТЕКТУВАННЯ ПОЛІМОРФНИХ ВІРУСІВ

У даній праці викладені результати експериментальних досліджень вірусу OneHalf, який належить до категорій stealth і поліморфних вірусів [1, 2]. Цей вірус заражає виконавчі файли і MBR вінчестера, тобто є файлово-бутовим [1, 2]. Stealth - компонента маскує наявність бутового веріанту вірусу на вінчестері /на рівні int 13h / і виває стару довжину для заражених файлів /на рівні функцій 41h, 42h, 4Eh, 4Fh переривання int 21h /. У файлах вірус закодує своє тіло, а декодер щоразу модифікує, що і є проявом поліморфізму. Вірус не містить компонент, спрямованих на пошкодження інформації, але має компоненту, яка закодує фрагмент вінчестера. У разі перезавантаження вірус поширює цей фрагмент і при виконанні певних умов виводить на екран фразу, яка починається так: "Dis is one half" звідки й походить неформальна назва вірусу. Закодовані сектори підставляються вірусом у нормального вигляді /на рівні int 13h /. Тому можливі

©Щербина М.Д., Мосорін П.Д., Черняхівський В.В., 1995

проблема при завантаженні зі системної дискети і при зникненні вірусу з MBR. Остання проблема виникала у деяких користувачів, котрі виявивши вірус, відновили старий MBR за допомогою ADInf або Norton Utilities, унаслідок чого деяка частина інформації була втрачена. За деякими даними, вірус впливає також на роботу Microsoft Windows. Далі викладені загальні погляди на методи детектування поліморфних вірусів, а також побудована узагальнена модель структури декодувальної компоненти вірусу OneHalf.

Під терміном "вірус" розумітимемо файлові віруси або компоненти вірусів, оскільки на даний час автори не мають даних про існування бутових поліморфних вірусів; хоча для них також можна застосовувати описану нижче методику.

Як відомо [1], для детектування вірусу V у файлі F треба виділити сигнатуру $S \subset V$. Сигнатура /характеристичний код/ визначається під час аналізування коду вірусу і має бути інваріантною стосовно екземпляра даного вірусу. Сигнатура містить звичайно від 10 до 100 байтів коду, що дає змогу досить надійно і швидко детектувати вірус. При виконанні умови $S \subset F$ файл F будемо вважати зараженим вірусом V . Крім сигнатурного методу існує ще метод контрольних сум [2], але фундаментальні основи цих методів аналогічні.

Поліморфним вважатимемо вірус P , з якого ми не можемо виділити сигнатуру, тобто два екземпляри вірусу можуть цілком різнитись. Інакше кажучи, їх спільний характеристичний код може не перевищувати одного байта. Для детектування вірусу P можна розбити його на декілька вірусів $V_1, V_2, \dots, V_n$ і отримати відповідні сигнатури $S_1, S_2, \dots, S_n$; де n - кількість різних варіантів вірусу P , а під "вірусами" ми розуміємо всі можливі поліморфні різновиди вірусу P . Проте цей метод має недоліки, а саме:

1/ якщо n достатньо велике, що справджується для більшості поліморфних вірусів [1, 2], то питання часу роботи антивірусної програми стає критичним;

2/ деякі віруси, приміром OneHalf, складаються з декількох фрагментів, які не мають фіксованого місця у файлі. Хоча існують досить ефективні алгоритми пошуку підпоследовності у последовності /файлі/, скажімо, алгоритми Кнута чи Моріса-Пратта, це не розв'язує проблему часу та ускладнює задачу "лікування".

Тоді ~~можливо~~ існує інший метод, який апробований на вірусі *OneHalf* і дає позитивні результати. Метод ґрунтується на тому, що ~~застосовується~~ основний аспект алгоритму самодекодування вірусу є інваріантним стосовно модифікації.

На рис. 1 можна бачити синтаксичну діаграму декодувальної компоненти вірусу *OneHalf* /для зараженого COM-файлу, EXE -- варіант неістотно різниться/. Початок діаграми відповідає першій машинній команді в даній програмі, а кінець -- останній команді декодувальної компоненти. На рис. 2 подана синтаксична діаграма для блоків коду, які генерує вірус для заповнення проміжків між функціонально значущими командами. У діаграмах використані такі позначення: *SEGCS*, *SEGDS*, *SEGES*, *SEGSS* -- відповідні префікси заміни сегментів; *reg*, *reg2* -- деякі регістри загального призначення; *seg* -- деякий сегментний регістр, *reg1* -- деякий індексований регістр; *VBeg*, *Work*, *AddV*, *VEnd* -- конкретні константи, які використовуються для декодування. Робочі регістри, константи декодування і проміжковий код вірус вибирає випадковим чи-

Decoder

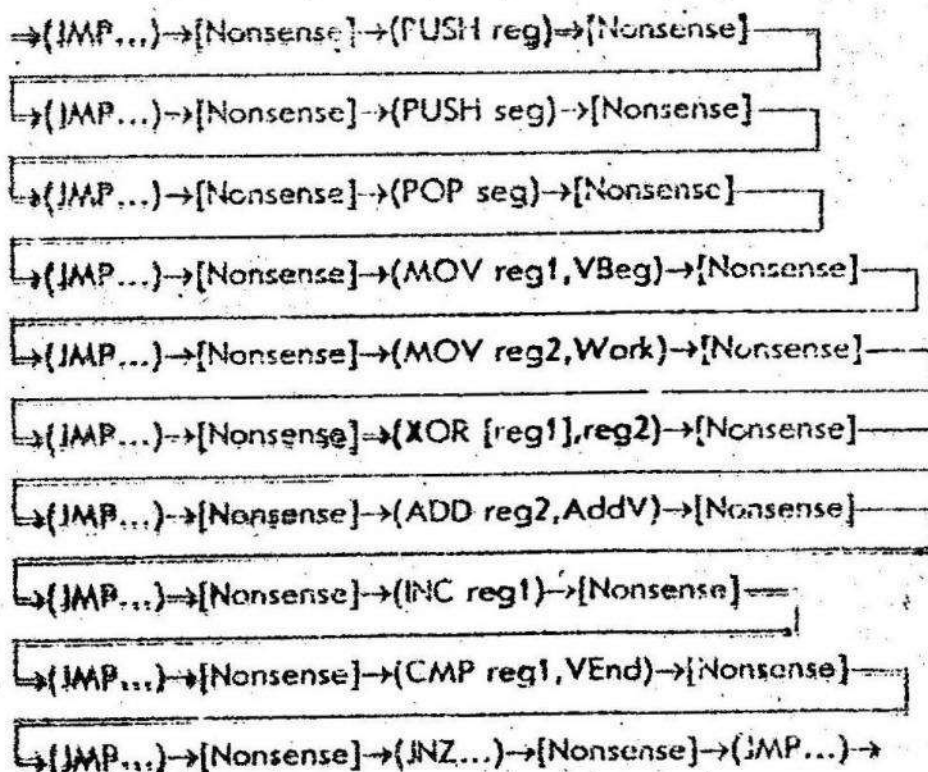


Рис. 1

Nonsense

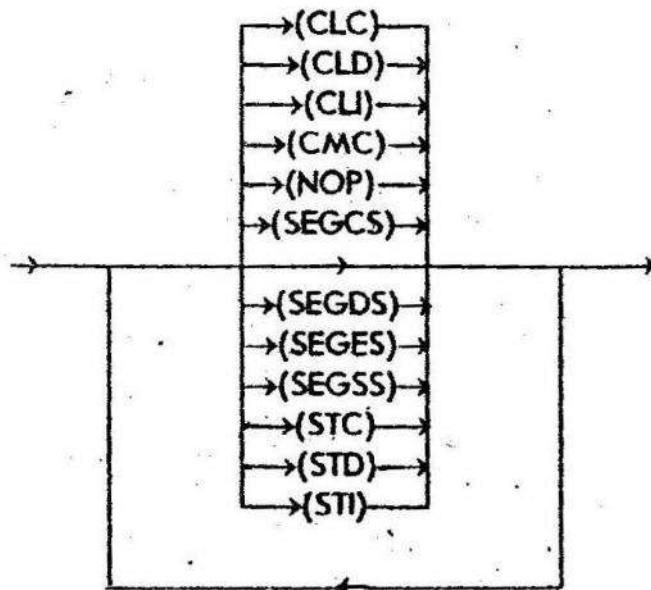


Рис. 2

```

mov bx,[VBeg]      ;Початок закодованої частини
mov ax,[Work]      ;Стартове значення ключа
@@1:
xor [es:bx],ax     ;Зробити XOR з ключем
add ax,[AddV]      ;Змінити ключ (додати AddV)
inc bx             ;На наступний байт
cmp bx,[VEnd]      ;Кінець закодованої частини?
jnz @@1            ;Якщо ні, продовжити...

```

Рис. 3

ном, що і є проявом поліморфізму. Відповідно до наведених діаграм пропонується такий алгоритм роботи антивіруса.

Потрібно рухатись діаграмою /рис. 1/, емулюючи виконання команд *JMP* і "витягаючи" з деяких команд константи декодування. Для цього зручно завести змінну *IP*, функціонально аналогічну відповідному регістру процесорів *180x86* [3], і виконувати такі дії: інкрементувати *IP* для однобайтових команд, модифікувати при емуляції команд *JMP* на відповідне зміщення,

витягати за відповідною адресою константи декодування і модифікувати на довжину команди. Якщо ми "прийшли" до кінця діаграми, тобто зустріли відповідні команди у вказаній послідовності, то вважаємо, що файл заражений. Тепер відомі значення всіх констант декодування, і вірус легко декодувати /на рис. 3 поданий відповідний фрагмент коду/. Після декодування можна ще раз пересвідчитись у наявності віруса традиційними методами, оскільки він уже декодований. Можна також "вилікувати" заражений файл, оскільки вся потрібна інформація вже є доступною.

Описаний метод, на погляд авторів, можна успішно використовувати для детектування переважної більшості наявних і нових поліморфних вірусів, зокрема всіх, описаних у працях [1, 2, 7].

На основі запропонованого методу розроблена антивірусна програма, яка знаходить і знешкоджує вірус *OneHalf* у виконавчих файлах, а також, на відміну від відомих на даний час інших антивірусів, відновлює інформацію на вінчестері, що була закодована вірусом.

І. Б е з р у к о в Н.Н. Компьютерная вирусология: Справочное руководство. К., 1991. 416 с. 2. К а с п е р с к и й Е.В. Компьютерные вирусы в *MS DOS*. М., 1992. 176 с. 3. П е т р у х и н В.С., С т е п ч е н к о Ю.А., Ф и л и н А.В. Персональные ЗМ на основе архитектуры *Intel 80386*. В 2 кн. Обнинск, 1993. Кн. I. 336 с.

Стаття надійшла до редколегії 28.10.94

З М І С Т

Бартіш М.Я., Шахно С.М., Доміков- ський В.О., Чипурко А.І. Чисельне досліджен- ня деяких алгоритмів розв'язування нелінійних рівнянь....	3
Бернакевич І.Є., Шинкаренко Г.А. Чисельне моделювання акустичної взаємодії об'єктів з рі- диною. І. Формулювання і розв'язування варіаційних за- дач.....	7
Блажисівська О.В. Автоматизований розв'язок задачі горіння суміші газів.....	13
Бенгеровський П.С., Сенько П.С. Один інтервальный алгоритм знаходження початкових наближень ме- тоду Ньютона.....	16
Бовк В.Д., Дияк І.І., Макар В.М. Програмний комплекс багатокритеріальної оптимізації напру- жень при нестационарному нагріві.....	23
Гарасим Я.С., Остудін Б.А. Розробка ма- тематичного та програмного забезпечення для розрахунку асесиметричних електростатичних полів на базі персональних комп'ютерів.....	27
Голуб Б.М., Оліярник Ю.П. Туновий ал- горитм пошуку глобального мінімуму неперервної функції....	35
Голуб Б.М., Щербина Ю.М. Релаксацийний алгоритм квазіньютонівської модифікації методу лінеариза- ції.....	39
Дияк І.І., Марчук Ю.Б. Застосування іте- раційних методів для дослідження комбінованих схем методів скінченних та граничних елементів.....	43
Дудзяний І.М., Цимбал В.М. Нелокальна задача для деякого сингулярно збуреного рівняння третього порядку.....	48
Жук М.В. Розв'язування нелінійного диференціаль- ного рівняння методом Канторовича.....	52

Б.М. Терлецька С.Ю. Протипотокова світлення світлення елементів для розв'язування задач атмосфери атмосфери.....	55
Зубова В.М., Терлецька С.Ю., Шин- заренко Г.А. Розв'язуваність і апроксимація уза- гальнених розв'язків початково-крайових задач міграції атмосферних атмосферних домішок.....	62
Козальчук Б.В., Гой О.І. Узагальнене варіантне рівняння і теорема взаємності розв'язків крайо- вої задачі узагальненої термодинаміки анізотропного тіла.....	71
Костенко С.Б., Попов Е.О. Рівномірне наближення математичних функцій многочленами степенями..	75
Мартиненко Марія Д., Горба- чова Н.В. Лінеаризація для однієї гіперболічної за- дачі Коші парного порядку.....	80
Мука І.С., Савула Я.Г. Нелінійна модель крутного деформування тонкостінних гнучких тіл.....	82
Девіцька С.М., Епокремлення еліптичних інте- гралів в осесиметричній задачі нестационарної теплопровід- ності.....	91
Пасічник Р.М., Халко Р.С. Послаблення ме- тодів сіток та інтегральних рівнянь при розв'язуванні задачі типу Діріхле для хвилявого рівняння.....	94
Прийтла М.М. Параметрична інтегровність за Лексом деяких нелінійних динамічних систем із функціональ- них многовидів.....	99
Савула Я.Г., Ченля Є.Я., Кухарсь- кий В.М. Чисельне моделювання конвективного теплопере- носу в середовищі з тонким капіляром.....	101
Сеньо Н.С., Дивак М.Н., Гладій Т.М., Венгерський П.С. Інтегральні моделі в медико- екологічному прог. розумінні.....	106
Цегелик Г.Г., Седчишин Н.В. Викорис- тання неklasичного апарату мажорант і діаграм Ньютона функ- цій для побудови нової квадратурної формули.....	108

Флейшман Н.П., Койфман Ч.Н. Узагальнені умови спряження середовищ за допомогою тонкого плоского прошарку... 9..... II2

Щербатий М.В. Оптимізація частот вільних коливань складових оболонок обертання..... II4

Щербина М.Ю., Мосорін П.Д., Черняхівський В.В. Синтаксичний аналіз і емуляція трасування для детектування поліморфних вірусів..... I23

Збірник наукових праць
Міністерство освіти України
Вісник Львівського університету
Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

В и п у с к 41

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Редактор Е.А.Г л а в а ц ь к а
Художній редактор Е.А.К а м е н щ и к
Технічний редактор С.Д.Д о в б а
Коректор О.І.Т р о с т я н ч и н

Підп. до друку 15.12.94. Формат 60x84/16.

Папір офсет. Умовн. друк. арк. 7,67. Умовн. фарбозідб. 7,9.

Сл.-вид. арк. 9,39. Вид. № 53. Зам. 340. Замовне.

Видавництво "Світ" при Львівському держуніверситеті.

290000 Львів, вул.Університетська, І.

Львівська обласна книжкова друкарня.

290000 Львів, вул.Стефаника, ІІ.

ISSN 0201-758X. ISSN 0320-6572

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат. 1995, вип. 41, 1—132.