УДК 519.6

Я.Г.Савула

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛОПЕРЕНЕСЕННЯ ЧЕРЕЗ ТРИВИМІРНЕ ТІЛО З ТОНКИМ ПЛОСКИМ ПОКРИТТЯМ

Проблему побудови математичних моделей теплоперенесення через тіла з тонкими покриттями розглядали багато авторів [2, 4, 6, 8]. У працях [2, 4, 8] теплопровідність тонкого покриття моделювалась шляхом запису спеціальних граничних умов. У праці [6] математична модель тіла з тонким покриттям описувалась некласичною початково-крайовою задачею, яка складається зі системи диференціальних рівнянь, що містять диференціальні оператори за просторовими змінними різної вимірності [9]. У даній статті підхід, що запропонований у праці [6], розвинений на випадок тривимірного тіла з тонким плоским покриттям.

1. Теплопровідність тонкого плоского шару. Нехай плоский шар займає область

$$\Omega^* = \left\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega ; -\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2} \right\}.$$

Процес перенесення тепла описуємо в Ω^* диференціальним рівнянням [1, 3]

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} + c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = q , \qquad /1.1/$$

де $T = T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau)$ – функція температури; λ – коефіцієнт теплопровідності; c – питома теплоємність; ρ – густина; q – інтенсивність густини внутрішніх джерел теплоти /за індексами, що повторюються, відбувається підсумовування/.

Враховуючи мализну товщини h, подаємо температуру T в області Ω у вигляді

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau) = t(\alpha_1, \alpha_2, \tau) + \frac{2\alpha_3}{h} t_1(\alpha_1, \alpha_2, \tau) \qquad /1.2$$

Підставляючи /1.2/ в /1.1/ та ортогоналізуючи нев'язку до 1 та α_3 в сенсі інтеграла за змінною α_3 на проміжку $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, отримуємо

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\lambda_0\frac{\partial t}{\partial\alpha_i}+\chi_0\frac{\partial t}{\partial\tau}=hq_0-q^+-q^-,$$

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\lambda_0\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_i}+12\frac{\lambda_0}{h^2}t_1+\chi_0\frac{\partial t_1}{\partial\tau}=hq_1-3(q^+-q^-). \qquad /I.3/$$

Тут враховано, що

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial\alpha_3}=q^+ \text{ при } \alpha_3=\frac{h}{2}; \qquad \lambda\frac{\partial T}{\partial\alpha_3}=q^- \quad \text{при } \alpha_3=-\frac{h}{2};$$

$$q_0=\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}q\,d\alpha_3; \quad q_1=\frac{6}{h^2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}q\,\alpha_3\,d\alpha_3;$$

$$\lambda_0=h\lambda; \quad \chi_0=hc\rho.$$

Вважаємо, що на бічній циліндричній поверхні шару Ω задана крайова умова третього роду:

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial\nu}=\alpha(T-T_c),\ (\alpha_1,\alpha_2)\in\Gamma,\ -\frac{h}{2}\leq\alpha_3\leq\frac{h}{2}. \qquad /I.4/$$

Тут Γ - границя області Ω; ν - зовнішня нормаль до границі Γ ; α - коефіцієнт теплообміну; T_c - температура зовнішнього середовища.

Для отримання крайових умов на функції t, t_1 використовуємо знову процедуру усереднення за товщиною шару. Підставляємо для цього /I.2/ в /I.4/ і записуємо умови ортогональності нев"язки до 1 та α_3 . Отримуємо

$$\left.\begin{aligned}-\lambda_0\frac{\partial t}{\partial\nu}&=\alpha_0(t-t^c)\\ -\lambda_0\frac{\partial t_1}{\partial\nu}&=\alpha_0(t_1-t_1^c)\end{aligned}\right\}\ \text{на } \Gamma, \qquad /I.5/$$

де

$$\alpha_0=\alpha h; \quad t^c=\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}T_c\,d\alpha_3; \quad t_1^c=\frac{6}{h^2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}T_c\,\alpha_3\,d\alpha_3.$$

Аналогічно до цього отримуємо також початкові мови на функції t, t_1 . Вони мають вигляд

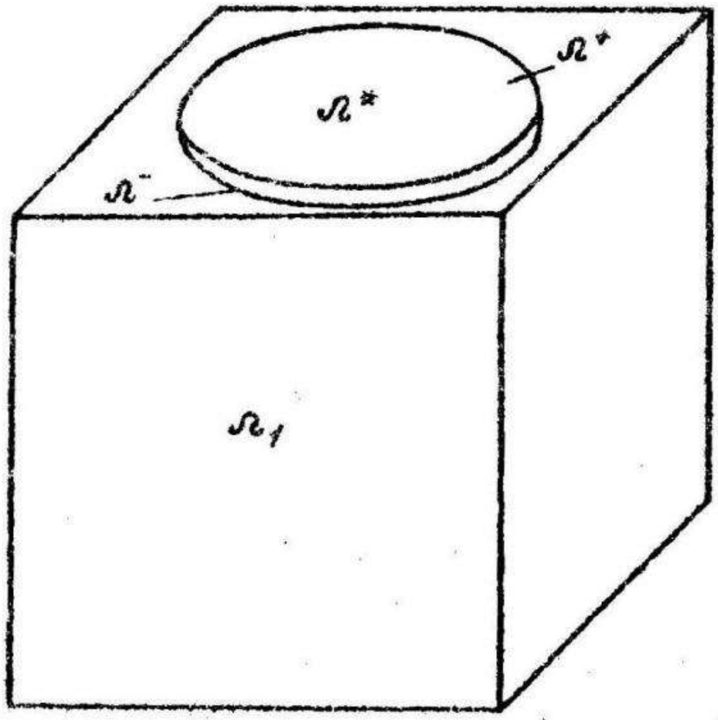
$$t=t^0,\ t_1=t_1^0 \quad \text{при} \quad \tau=0. \qquad /I.6/$$

Тут

$$t^0=\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}T_0\,d\alpha_3; \qquad t_1^c=\frac{6}{h^2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}T_0\,\alpha_3\,d\alpha_3;$$

T_0 - розподіл температури в початковий момент часу $\tau=0$.

2. <u>Теплопровідність тіла з тонким покриттям.</u> Сформулюємо постановку задачі теплопровідності для неоднорідного тіла, яке складається з масивної частини, що займає область Ω_1, і тонкого покриття, яке займає область Ω_2^* /див. рисунок/.



Вважаємо, що область Ω_1 віднесена до декартової системи координат x_1, x_2, x_3, а область Ω_2^* – до декартової системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, причому справедливе співвідношення

$$\Omega_2^* = \left\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega_2 ; -\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2}\right\}, \qquad /2.1/$$

де Ω_2 – деяка двовимірна область з ліпшицевою границею Γ_2.

Нехай границя області Ω_1, яка теж вважається ліпшицевою, складається з двох частин $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)}$.

Область Ω_2^* обмежена двома лицьовими площинами $\Omega_2^- (\alpha_3 = -\frac{h}{2})$, $\Omega_2^+ (\alpha_3 = \frac{h}{2})$ та бічною циліндричною поверхнею: $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_2$, $-\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2}$.

Вважаємо, що частина границі $\Gamma_1^{(2)}$ збігається з площиною Ω_2^-. Для опису процесу теплопередавання у тілі з тонким покриттям використовуємо рівняння теплопровідності /1.1/ в області Ω_1

$$-\frac{\partial T_1}{\partial x_i}\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x_i}+c_1\rho_1\frac{\partial T_1}{\partial \tau}=q_1 \qquad /2.2/$$

та отримані рівняння /I.3/, що описують теплопровідність тонкого шару Ω_2^*:

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\lambda_0\frac{\partial t}{\partial \alpha_i}+\chi_0\frac{\partial t}{\partial \tau}=hq_0-q^+-q^-,$$

$$-\frac{\partial t_1}{\partial \alpha_i}\lambda_0\frac{\partial t_1}{\partial \alpha_i}+12\frac{\lambda_0}{h^2}t_1+\chi_0\frac{\partial t_1}{\partial \tau}=hq_1-3(q^+-q^-), \text{ в } \Omega_2. \qquad /2.3/$$

Тут T_1 – функція розподілу температури в області Ω_1; t, t_1 – функції, за допомогою яких на основі формули /I.2/ описується температура в області Ω_2^*.

До рівнянь /2.2/, /2.3/ додаємо такі крайові та початкові умови:

$$-\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial \nu}=\alpha_1(T_1-T_c) \quad \text{на} \quad \Gamma_1^{(1)}; \qquad /2.4/$$

$$-\lambda_0\frac{\partial t}{\partial \nu}=\alpha_0(t-t^c)$$
$$-\lambda_0\frac{\partial t_1}{\partial \nu}=\alpha_0(t_1-t_1^c) \quad \text{на} \quad \Gamma_2; \qquad /2.5/$$

$$T_1=T_0 \;(T_0=T_c) \quad \text{при} \quad \tau=0; \qquad /2.6/$$

$$t=t^0,\; t_1=t_1^0 \quad \text{при} \quad \tau=0. \qquad /2.7/$$

До цих умов додаємо ще умови нерозривності теплових полів та потоків на ділянці границі $\Gamma_1^{(2)}=\Omega_2^-$;

$$T_1=t-t_1; \qquad /2.8/$$

$$-\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial \nu_1}=q^-, \qquad /2.9/$$

де ν_1 – зовнішня нормаль до границі $\Gamma_1^{(2)}$.

Таким чином, математична модель теплопровідності тіла з тонким покриттям складається з рівнянь /2.2/, /2.3/; граничних умов /2.4/, /2.5/; початкових умов /2.6/, /2.7/ та умов нерозривності /2.8/, /2.9/.

Зауважимо, що використаний тут спосіб побудови математичної моделі /6/ забезпечує збереження таких властивостей, як симетрія та додатна визначеність оператора, за просторовими змінними, що притаманні оператору класичної задачі теплопровідності [5]. Справедливими є такі леми.

Лема. Оператор за просторовими змінними задачі /2.2/–/2.9/ у випадку однорідних умов – симетричний.

Доведення стає очевидним, якщо виписати білінійну форму, що відповідає оператору

$$L(T_1, t, t_1; \hat{T}_1, \hat{t}, \hat{t}_1) = \int\limits_{\Omega_1} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial x_i} d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \alpha_k} d\Omega_2 +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_2} \left(\lambda_0 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \hat{t}_1}{\partial \alpha_k} + \frac{12 \lambda_0}{h^2} t_1 \hat{t}_1 \right) d\Omega_2, \; i = 1,2,3; \; k = 1,2. \qquad /2.10/$$

Теорема. Білінійна форма /2.10/ – коерцитивна на множині функцій

$$V = \{ T_1, t, t_1 : T_1 \in W_2^{(1)}(\Omega_1), \; t, t_1 \in W_2^{(1)}(\Omega_2); \; T_1 = 0 \;\; \text{на} \;\; \Gamma_1^{(1)};$$

$$t, t_1 = 0 \;\; \text{на} \;\; \Gamma_2, \quad T_1 = t - t_1 \;\; \text{на} \;\; \Gamma_1^{(2)} \}.$$

Доведення випливає з нерівностей Фрідріхса для випадку двох і трьох змінних [5].

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности: В 2 ч. М., 1982. Ч.1. 2. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. К., 1983. 3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967. 4. Підстригач Я.С. Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН України. 1963. № 7. 5. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985. 6. Савула Я.Г., Сипа І.М., Стругинський І.В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип.37. 1992. 8. Флейшман Н.П. Математичні моделі теплового спряження середовищ з тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 39. 1993. 9. Ciarlet P.G. Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures. Paris, 1990.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.95