УДК 536.2

Н.П.Флейшман, Ч.Н.Койфман

МЕТОД ДОВІЛЬНИХ КРИВИХ У ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПЛАСТИНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

1. Розглянемо тонку ізотропну пластинку змінної товщини $h(x,y)$, серединна площина якої займає однозв"язну область Ω криволінійного чотирикутника $A_1 A_2 A_3 A_4$ на площині (x,y). Профіль пластинки симетричний щодо цієї площини. На поверхнях $z=\pm h/2$ відбувається стаціонарний конвективний теплообмін з навколишнім середовищем. По товщині пластинки температура $T(x,y)$ залишається сталою.

За сталих теплофізичних характеристик матеріалу пластинки рівняння теплопровідності має вигляд [3]

$$\Delta T(x,y)+\frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{2}{h^2}\gamma(T-\theta)+\frac{W}{\lambda}=0, \qquad /1/$$

де θ – температура навколишнього середовища на поверхнях $z=\pm h/2$; $w(x,y)$ – питома інтенсивність внутрішніх джерел тепла; λ – коефіцієнт теплопровідності; Δ – двовимірний оператор Лапласа;

$$\gamma(x,y)=\frac{\alpha h}{\lambda}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2},$$

α – коефіцієнт тепловіддачі на поверхнях $z=\pm h/2$.

На границі Γ області Ω маємо крайову умову

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial n}+\alpha_*\left(T-\theta_*\right)=0, \qquad /2/$$

де α_* і θ_* – відомі функції точок контура Γ; α_* – коефіцієнт тепловіддачі; θ_* – температура зовнішнього середовища на Γ; n – зовнішня нормаль.

Зауважимо, що в частковому випадку $h=const$ та $\alpha=0$ крайова задача /1/, /2/ моделює плоску задачу стаціонарної теплопровідності призматичного тіла, поперечний переріз якого має форму Ω.

2. Використаємо взаємно однозначне відображення неканонічної області Ω на одиничний квадрат E площини (ξ^1,ξ^2) за допомогою неперервно диференційовного перетворення координат

$$x = x(\xi^1, \xi^2); \quad y = y(\xi^1, \xi^2); \quad 0 \le \xi^1, \xi^2 \le 1 \qquad /3/$$

де, наприклад,

$$x = \xi^1 G_1(y_3 - y_3\xi^2 + y_4\xi^2) - (\xi^1 - 1)G_0(y_2 - y_2\xi^2 - y_1\xi^2),$$

$$y = \xi^2 F_1(x_4\xi^1 - x_1\xi^1 + x_1) - (\xi^2 - 1)F_0(x_3\xi^1 - x_2\xi^1 + x_2).$$

Тут (x_K, y_K) – декартові координати вершини A_K області Ω $(K = \overline{1,4})$, сторони якої задаються відповідно рівняннями:
$x = G_0(y)$ на стороні A_1A_2; $y = F_0(x)$ на стороні A_2A_3,
$x = G_1(y)$ на стороні A_3A_4; $y = F_1(x)$ на стороні A_4A_1.

Функції $F_i(x)$ та $G_i(y)$ $(i = 1, 0)$ мають задовольняти умови

$$F_1(x) > F_0(x), \quad G_1(y) > G_0(y).$$

а Якобіан перетворення /3/ не повинен дорівнювати нулю. При цьому в області E координатам $\xi^l = const$ відповідає система взаємно ортогональних прямих, а в області Ω – деяка сітка неортогональних кривих. Сторонам квадрата $\xi^1 = 0, \xi^2 = 1, \xi^1 = 1, \xi^2 = 0$ відповідають граничні криві A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_4 області Ω.

Для підставлення /3/ в /1/ виражаємо відповідні похідні скалярної функції T через її похідні в системі неортогональних криволінійних координат (ξ^1, ξ^2) [2].

Остаточно замість рівняння /1/ одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$g^{11}\frac{\partial Q}{\partial \xi^1} + 2g^{12}\frac{\partial Q}{\partial \xi^2} + \beta_1 Q + g^{22}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi^2}\right) -$$

$$-\beta_2\frac{\partial T}{\partial \xi^2} - \frac{2}{h^2}\gamma(T - \theta) + \frac{w}{\lambda} = 0, \qquad /4/$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi^1} - Q = 0,$$

де позначено

$$\beta_1 = \frac{1}{2h}\left(\frac{\partial h}{\partial x}a_{22} - \frac{\partial h}{\partial y}a_{21}\right) - C_1,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2h}\left(\frac{\partial h}{\partial x}a_{12} - \frac{\partial h}{\partial y}a_{11}\right) - C_2,$$

$$C_K = g^{11}\Gamma^K_{11} + 2g^{12}\Gamma^K_{12} + g^{22}\Gamma^K_{22}, \qquad (k = 1, 2),$$

$g^{ki} = g^{ik}$ – контраваріантні компоненти метричного тензора; $\Gamma^K_{ts} = \Gamma^K_{st}$ – символи Кристофеля другого роду, які виражаються через g^{ik} за формулами

$$\Gamma^K_{st} = \frac{1}{2}g^{Kq}\left(\frac{\partial g_{sq}}{\partial \xi^t} + \frac{\partial g_{tq}}{\partial \xi^s} - \frac{\partial g_{st}}{\partial \xi^q}\right), \qquad (s, t, k, q = 1, 2)$$

2-2902

$$g_{11}=a_{11}^2+a_{12}^2;\quad g_{21}=g_{12}=a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22},$$
$$g_{22}=a_{22}^2+a_{21}^2;\quad z=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0,$$
$$g^{11}=\frac{1}{z^2}g_{22};\quad g^{12}=g^{21}=-\frac{1}{z^2}g_{12};\quad g^{22}=\frac{1}{z^2}g_{11},$$
$$a_{11}=\frac{\partial x}{\partial\xi^1},\ a_{12}=\frac{\partial y}{\partial\xi^1},\ a_{21}=\frac{\partial x}{\partial\xi^2},\ a_{22}=\frac{\partial y}{\partial\xi^2}.$$

Систему /4/, /5/ записуємо лише для точок внутрішніх кривих $\xi^2=\kappa\delta=\kappa/(N+1)=const\ (k=\overline{1,N})$ і заміняємо похідні за ξ^2 їх симетричними скінченно-різницевими аналогами з точністю $O(\delta^2)$. Остаточно отримуємо рівняння

$$g^{11}\frac{dQ_k}{d\xi^1}+\frac{g^{12}}{\delta}(Q_{k+1}-Q_{k-1})+\beta_1 Q_k-\frac{\beta_2}{2\delta}(T_{k+1}-T_{k-1})+$$
$$+\frac{g^{22}}{\delta^2}(T_{k+1}-2T_k+T_{k-1})-\frac{2\gamma}{h^2}T_k=\frac{2\gamma}{h^2}\theta_k-\frac{W_k}{\lambda}, \qquad /5/$$
$$\frac{dT_k}{d\xi^1}-Q_k=0, \qquad /6/$$

де $T_k(\xi^1)=T(\xi^1,\kappa\delta)$; $Q_k(\xi^1)=Q(\xi^1,\kappa\delta)$; $\theta_k(\xi^1)=\theta(\xi^1,\kappa\delta)$; $W_k(\xi^1)=W(\xi^1,\kappa\delta)$.

Крім цього на краях $\xi^2=0$ та $\xi^2=1$ області Ω маємо умови /2/, які після перетворення координат набувають вигляду

$$\lambda[v_1(\xi^1)\frac{dT_0}{d\xi^1}+\frac{1}{2\delta}v_2(\xi^1)(4T_1-T_2-3T_0)+$$
$$+\alpha_{*0}(T_0-\theta_{*0})=0 \quad \text{при } \xi^2=0, \qquad /7/$$
$$\lambda[v_1(\xi^1)\frac{dT_{N+1}}{d\xi^1}+\frac{1}{2\delta}v_2(\xi^1)(3T_{N+1}-4T_N+T_{N-1})+$$
$$+\alpha_{*1}(T_{N+1}-\theta_{*1})=0 \quad \text{при } \xi^2=1,$$

де

$$v_1=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial x}{\partial n}\cdot\frac{\partial y}{\partial\xi^2}-\frac{\partial y}{\partial n}\cdot\frac{\partial x}{\partial\xi^2}\right),\ v_2=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial y}{\partial n}\cdot\frac{\partial x}{\partial\xi^1}-\frac{\partial x}{\partial n}\cdot\frac{\partial y}{\partial\xi^1}\right), \qquad /8/$$
$$\frac{\partial x}{\partial n}=\left[1+(F_j')^2\right]^{-1/2},\ \frac{\partial y}{\partial n}=(-1)^{j+1}F_j\left[1+(F_j')^2\right]^{-1/2} \quad (j=0,1).$$

Диференціюючи крайові умови /7/ по ξ^1 з урахуванням /6/, отримуємо ще два рівняння, які ми записуємо коротко так:

$$\lambda v_1(\xi^1)\frac{dQ_0}{d\xi^1}+M_0(Q_i,T_i)=0 \quad (i=0,1,2) \text{ при } \xi^2=0;$$
$$\lambda v_1(\xi^1)\frac{dQ_{N+1}}{d\xi^1}+M_1(Q_i,T_i)=0 \quad (i=N+1,N,N-1) \text{ при } \xi^2=1.$$

Тут M_0, M_1 – лінійні функції своїх аргументів.

Рівняння /5/, /6/, /7/, /8/ утворюють замкнену систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку стосовно функцій $Q_k = (\xi^1)$, $T_k(\xi^1)$ $(k=\overline{0,N+1})$. Уводимо вектор-функцію

$$\bar{S}(\xi^1) = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_{N+1}, T_0, T_1, \dots, T_{N+1}\}^T.$$

Тоді система /5/–/8/ записується компактно так:

$$A\frac{d\bar{S}}{d\xi^1} + B\bar{S} = \bar{C}. \qquad /9/$$

Тут A, B – відомі квадратні матриці: $\bar{C}$ – відомий вектор.

До рівняння /9/ слід додати умови /2/ на краях $\xi^1 = 0$ та $\xi^1 = 1$, які після перетворення координат записуються аналогічно /7/ у вигляді

$$\varphi^T\bar{S}(0) = \bar{\beta}_0, \quad \psi^T\bar{S}(1) = \bar{\beta}_1, \qquad /10/$$

де φ^T, ψ^T – відомі прямокутні матриці розмірності $(N+1)\times(2N+2)$, а $\bar{\beta}_0$, $\bar{\beta}_1$ – відомі вектори.

Методом прогонки, наприклад, двоточкова крайова задача /9/, /10/, зводиться до задачі Коші для рівняння /9/ з початковою умовою

$$\bar{S}(1) = \begin{bmatrix} \psi^T \\ U^T(1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \gamma_*(1) \end{pmatrix},$$

де $\gamma_*(\xi^1)$ та $U(\xi^1)$ – вектор та матриця, які визначаються внаслідок розв"язання задачі Коші:

$$\gamma_*'(\xi^1) = U^T(\xi^1), \; U'(\xi^1) - (A^{-1}B)^T U(\xi^1) = 0, \; U(0) = \varphi, \gamma_*(0) = \bar{\beta}_0.$$

Остаточно визначаються елементи $T_k(\xi^1)$ вектор-функції $\bar{S}$, тобто розподіл шуканої температури $T(\xi^1, \xi^2)$ уздовж дискретних кривих $\xi^2 = const$ області Ω, які відповідають паралельним прямим одиничного квадрата E.

Примітка. Якщо область Ω двозв"язна з гладкими границями /без кутових точок/, її слід розбити /за допомогою двох перетинів/ на два криволінійних прямокутники, які аналогічно попередньому, відображаються на два квадрати, між якими справедливі умови спряження та періодичності, і метод довільних кривих /ДК/ застосовується практично без істотних змін. Цей метод можна застосувати також при параметризації двозв"язної області Ω шляхом її відображення на кругове кільце з використанням полярної системи координат [1].

Без принципових змін метод ДК узагальнюється на випадок області Ω складної форми, яку можна розбити на деяку кількість підобластей, кожна з яких обмежена контуром з чотирма кутовими точками, і між якими виконуються відповідні умови спряження.

1. Г а л и м о в К.З., П а й м у ш и н В.Н. Теория оболочек сложной геометрии. Казань, 1985. 2. Л у р ь е А.И. Теория упругости. М., 1970. 3. М о т о в и л о в е ц И.А. Теплопроводность пластин и тел вращения. К., 1969.

Стаття надійшла до редколегії 04.01.95

УДК 517.958:519.6

І.Є.Бернакевич, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ОБОЛОНОК З РІДИНОЮ

II. ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВІ АПРОКСИМАЦІЇ ТА ЇХНЯ ЗБІЖНІСТЬ

Об"єктом дослідження даної роботи є проекційно-сіткова схема для розв"язування варіаційної задачі /2.5/ [2], яка описує акустичну взаємодію оболонки з рідиною в термінах потенціалу швидкостей рідини $\psi = \psi(z, z, t)$ та вектора пружних зміщень $s = (u(z,t), w(z,t), \gamma(z,t))$ серединної поверхні оболонки.

Праця /2/ містить конструктивне доведення коректності варіаційної задачі такої взаємодії за допомогою напівдискретизації Гальоркіна. Тут за типових для методу скінченних елементів припущень отримані оцінки швидкості збіжності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна.

Нарешті, ми досягаємо повної дискретизації задачі за допомогою побудови однокрокової рекурентної схеми і визначаємо умови її стійкості та збіжності.

Для зручності викладу тут продовжується прийнята у праці [2] нумерація параграфів і формул, а також використовуються введені раніше позначення.

5. <u>Оцінка збіжності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна.</u> Розглянемо дискретизовану по просторових змінних варіаційну задачу акустичної взаємодії оболонки з рідиною:

$$\begin{cases} \text{задано } p_0 = (\varphi_0, s_0) \in Q,\ q_0 = (\varphi_0, g_0) \in H = H^0 \times X,\ F \in L^2(0,T,Q'); \\ \text{знайти вектор } p_h = (\varphi_h, s_h) \in L^2(0,T;Q_h) \text{ такий, що} \\ M(p_h''(t), q) + B(p_h'(t), q) + A(p_h(t), q) = \langle F(t), q \rangle, \\ M(p_h'(0) - q_0, q) = 0,\ A(p_h(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q_h . \end{cases} \qquad /5.1/$$