областей, кожна з яких обмежена контуром з чотирма кутовими точками, і між якими виконуються відповідні умови спряження.

1. Галимов К.З., Паймушин В.Н. Теория оболочек сложной геометрии. Казань, 1985. 2. Лурье А.И. Теория упругости. М., 1970. 3. Мотовиловец И.А. Теплопроводность пластин и тел вращения. К., 1969.

Стаття надійшла до редколегії 04.01.95

УДК 517.958:519.6

І.Є.Бернакевич, Г.А.Шинкаренко

# ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ОБОЛОНОК З РІДИНОЮ
## II. ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВІ АПРОКСИМАЦІЇ ТА ЇХНЯ ЗБІЖНІСТЬ

Об"єктом дослідження даної роботи є проекційно-сіткова схема для розв"язування варіаційної задачі /2.5/ [2], яка описує акустичну взаємодію оболонки з рідиною в термінах потенціалу швидкостей рідини $\psi = \psi(z, z, t)$ та вектора пружних зміщень $s = (u(z,t), \omega(z,t), \gamma(z,t))$ серединної поверхні оболонки.

Праця /2/ містить конструктивне доведення коректності варіаційної задачі такої взаємодії за допомогою напівдискретизації Гальоркіна. Тут за типових для методу скінченних елементів припущень отримані оцінки швидкості збіжності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна.

Нарешті, ми досягаємо повної дискретизації задачі за допомогою побудови однокрокової рекурентної схеми і визначаємо умови її стійкості та збіжності.

Для зручності викладу тут продовжується прийнята у праці [2] нумерація параграфів і формул, а також використовуються введені раніше позначення.

5. <u>Оцінка збіжності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна.</u> Розглянемо дискретизовану по просторових змінних варіаційну задачу акустичної взаємодії оболонки з рідиною:

$$\begin{cases} \text{задано } p_0 = (\varphi_0, s_0) \in Q,\ q_0 = (\varphi_0, g_0) \in H = H^0 \times X,\ F \in L^2(0,T,Q'); \\ \text{знайти вектор } p_h = (\varphi_h, s_h) \in L^2(0,T;Q_h) \text{ такий, що} \\ M(p_h''(t), q) + B(p_h'(t), q) + A(p_h(t), q) = \langle F(t), q \rangle, \\ M(p_h'(0) - q_0, q) = 0,\ A(p_h(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q_h. \end{cases} \quad /5.1/$$

Оцінки швидкості збіжності похибки напівдискретних апроксимацій

$$e_h(t)=p_h(t)-p(t) \qquad /5.2/$$

будуємо за типових для методу скінченних елементів припущень щодо властивостей просторів апроксимацій $Q_h$ :

$$\begin{cases} \text{для кожного } q\in Q\cap W^m,\ k\geq 0 \\ \text{знайдуться } q_h\in Q_h,\ C=const>0 \text{ такі, що} \\ \|q-q_h\|_m\leq Ch^{k+1-m}\|q\|_{k+1},\ 0\leq m\leq k. \end{cases} \qquad /5.3/$$

Тут $h$ - діаметр сітки скінченних елементів; $k$ - максимальний порядок повного полінома, який можна зобразити базисними функціями на кожному скінченному елементі.

$$\begin{cases} W^m=H^m(\Omega)\times H^m((0,L))^3, \\ \|q\|_m=\left\{\|\varphi\|^2_{m,\Omega}+\|S\|^2_{m,(0,L)}\right\}^{1/2}\ \forall q=(\varphi,S)\in W^m. \end{cases} \qquad /5.4/$$

Для аналізу похибки /5.2/ вважатимемо справедливими припущення теореми із п. 3, і скористаємось оператором ортогонального проектування $\Pi_h:Q\to Q_h$ щодо скалярного добутку $A(.,.)$, таким, що

$$A(p-\Pi_h p,q)=0 \quad \forall p\in Q,\ \forall q\in Q_h. \qquad /5.5/$$

Якщо під $p(t)$ розуміти розв"язок варіаційної задачі /2.5/, то наслідком властивостей /5.5/ та /5.3/ отже оцінка

$$\|E_h(t)\|_Q\leq Ch^k\|p(t)\|_{k+1}, \qquad /5.6/$$

де

$$E_h(t)=p(t)-\Pi_h p(t). \qquad /5.7/$$

Беручи до уваги цей факт, доцільно подати похибку напівдискретизації у вигляді

$$e_h(t)=\epsilon_h(t)-E_h(t), \qquad /5.8/$$

де лише складова

$$\epsilon_h(t)=p_h(t)-\Pi_h p(t) \qquad /5.9/$$

вимагає тепер оцінки.

Відзначимо, що складова похибки $e_h(t)$ задовольняє рівняння

$$\begin{cases} M(\epsilon_h''(t),q)+B(\epsilon_h'(t),q)+A(\epsilon_h(t),q)=M(E_h''(t),q)+B(E_h'(t),q), \\ A(\epsilon_h(0),q)=0, \\ M(\epsilon_h'(0),q)=M(E_h'(0),q) \qquad \forall q\in Q_h . \end{cases} \qquad /5.10/$$

Звідси після підставляння $q=\epsilon_h'(t)$ /а це можливо, оскільки $\epsilon_h(t)\in Q_h$ ) знаходимо енергетичне рівняння для похибки

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\epsilon_h'(t)|^2+\|\epsilon_h(t)\|^2\right\}=M(E_h''(t),\epsilon_h'(t))+B(E_h'(t),\epsilon_h'(t)) \qquad /5.11/$$

або

$$\begin{aligned} |\epsilon_h'(t)|^2+\|\epsilon_h(t)\|^2 &= |\epsilon_h'(0)|^2+\|\epsilon_h(0)\|^2+ \\ &+2\int_0^t\left\{M(E_h''(\tau),\epsilon_h'(\tau))-B(E_h''(\tau),\epsilon_h(\tau))\right\}d\tau+ \\ &+2(B(E_h'(t),\epsilon_h(t))-B(E_h'(0),\epsilon_h(0))). \end{aligned} \qquad /5.12/$$

Після перетворень з використанням леми Гронуолла [3] та початкових умов отримуємо оцінку $|\epsilon_h'(t)|^2+\|\epsilon_h(t)\|^2\le$

$$\le C\left\{\|E_h'(0)\|^2+\|E_h(t)\|^2+\int_0^t(\|E_h''(\tau)\|^2+\|E_h''(\tau)\|^2)\,d\tau\right\}. \qquad /5.13/$$

Тут і далі символом $C$ позначаються різні додатні сталі, значення яких не залежить від величин, що нас цікавлять.

Застосовуючи до останньої нерівності оцінки /5.6/, остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} &|\epsilon_h'(t)|^2+\|\epsilon_h(t)\|^2\le \\ &\le Ch^{2k}\left\{\|q_0\|^2_{k+1}+\|p'(t)\|^2_{k+1}+\int_0^t\|p''(\tau)\|^2_{k+1}\,d\tau\right\}. \end{aligned} \qquad /5.14/$$

Тепер, враховуючи /5.2/, /5.6/ і /5.14/ та застосовуючи нерівність трикутника до /5.7/, доходимо висновку, що справедлива така теорема.

<u>Теорема про збіжність напівдискретних апроксимацій.</u> Нехай $p=(\psi,S)$ – розв"язок задачі /2.5/. Допустимо також, що існує натуральне $k$, таке, що

$$p_0,\, S_0\in W^{k+1},$$

$$p,p'\in L^\infty(0,T;Q\cap W^{k+1}),\quad p''\in L^2(0,T;Q\cap W^{k+1}).$$

Нехай для кожного $h>0$ напівдискретні апроксимації Гальоркіна $\{p_h(t)\}$ визначаються як розв"язки задач /5.1/ у просторах $Q_h$, що мають властивості щільності /5.3/.

Тоді послідовність напівдискретних апроксимацій $\{p_h(t)\}$ збігається при $h\to 0$ до розв"язку $p(t)$ варіаційної задачі

/2.5/, і при цьому швидкість збіжності характеризується апріорною оцінкою

$$\|p_h(t)-p(t)\|^2 \leq$$

$$\leq Ch^{2k}\left\{\|q_0\|^2_{k+1}+\|p(t)\|^2_{k+1}+\|p'(t)\|^2_{k+1}+\int^t \|p''(\tau)\|^2_{k+1}d\tau\right\} \quad /5.15/$$

з константою $C=const>0$, значення якої не залежить від $h$ та $p$.

<u>Зауваження</u>. Енергетична оцінка похибки напівдискретизації Гальоркіна має важливе практичне значення, оскільки може бути використана для прогнозування похибки дискретизації з параметром $h_3$, якщо відомі наближені розв"язки для параметрів $h_1$ і $h_2$.

6. <u>Однокрокова рекурентна схема.</u> Побудова ефективної процедури інтегрування напівдискретизованих задач великою мірою визначає ефективність розв"язування задачі взаємодії загалом.

Далі для інтегрування в часі варіаційної задачі акустичної взаємодії оболонки з рідиною використовується проекційно-сіткова схема, запропонована у праці /5/ для задач взаємодії пружного тіла з рідиною. Досліджуються умови стійкості та оцінки збіжності цієї схеми.

Для інтегрування в часі напівдискретної задачі /5.1/ розіб"ємо проміжок $[0,T]$ на відрізки $[\tau_j,\tau_{j+1}]$, $\Delta t=\tau_{j+1}-\tau$, $j=0,1,\dots,N-1$, $N\Delta t=T$. Тоді, використовуючи ідеї праці /5/ для побудови схеми інтегрування задач взаємодії пружного тіла з рідиною, розглянемо однокрокову схему для задачі /5.1/:

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{задано крок інтегрування } \Delta t>0, \text{ параметр } \gamma>0 \\
\text{та пари } p^j=\{\psi^j,s^j\},\ q^j=\{\varphi^j,v^j\}\in Q_h=\Phi_h\times Y_h; \\
\text{знайти пари } p^{j+1}=\{\psi^{j+1},s^{j+1}\},\ q^{j+1}=\{\varphi^{j+1},v^{j+1}\}\in Q_h, \\
\text{такі, що} \\
m(\varphi^{j+1/2},\xi)+\frac{1}{2}\Delta t\{\gamma\Delta t a(\varphi^{j+1/2},\xi)-b(v^{j+1/2},\xi)\}= \\
\qquad =\frac{1}{2}\Delta t\{\langle l(t_{j+1/2}),\xi\rangle-a(\varphi^j,\xi)\} \quad \forall\xi\in\Phi_h, \\
\mu(v^{j+1/2},y)+\frac{1}{2}\Delta t\{\gamma\Delta t\alpha(v^{j+1/2},y)+b(y,\varphi^{j+1/2})\}= \\
\qquad =\frac{1}{2}\Delta t\{\langle\lambda(t_{j+1/2}),y\rangle-a(s^j,y)\} \quad \forall y\in Y_h, \\
q^{j+1}=2q^{j+1/2}-q^j \quad p^{j+1}=p^j+\Delta t q^{j+1/2} \quad j=0,1,\dots .
\end{array}\right. \quad /6.1/$$

Тут пари $\{\psi^m,\varphi^m\}$ та $\{s^m,v^m\}$ апроксимують значення $\{\psi_h(t_m),\psi_h'(t_m)\}$ та $\{s_h(t_m),s_h'(t_m)\}$ відповідно в момент часу $t_m=m\Delta t$, $m=0,1,\dots,N$.

Унаслідок леми Лакса-Мільграма система з двох перших рівнянь схеми /6.I/ має єдиний розв"язок $q^{j+1/2}=\{\varphi^{j+1/2}, v^{j+1/2}\}$.

Відзначимо, що однокрокова схема /6.I/ дає змогу точно задовольняти всі початкові умови задачі /5.I/ і виконувати її інтегрування зі змінним кроком $\Delta t$. Більше того, вибір у ролі проміжних невідомих $q^{j+1/2}=\{\varphi^{j+1/2}, v^{j+1/2}\}$ схеми веде до максимального спрощення процесу рекурентного обчислення правих частин повністю дискретизованих рівнянь задачі акустичної взаємодії.

Теорема. Нехай виконані умови теореми п.3 і $p_h(t)$ - розв"язок задачі /5.I/, причому $p_h^{IV}\in L^2(0,T;Q_h)$.

Припустимо також, що для апроксимації значень $(p_h(t_m), p_h'(t_m))$ за допомогою схеми /6.I/ визначаються $z^m=(p^m, q^m)$ відповідно, $m = 0,1,\dots,N$, $N\Delta t=T$.

Тоді справедливі твердження:

/i/ При виборі значень параметра

$$\gamma \geq 1/2 \qquad /6.2/$$

схема /6.I/ безумовно стійка щодо норми

$$\| z^m \| = \left\{ \| q^m \|_H + \| p^m \|_Q \right\}^{1/2}.$$

/ii/ Якщо виконана умова стійкості /6.2/, то похибка апроксимації $\Delta^m=\{e^m,\varepsilon^m\}=\{p^m-p_h(t_m),\ q^m-p_h'(t_m)\}$ схеми /6.I/ збігається до нуля, і при цьому швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$\| \Delta^m \| + \Delta t^2 \| \varepsilon^{j+1/2} \|^2 \leq C\Delta t^2 T\left\{ (\gamma - \tfrac{1}{2}) + \Delta t^2 \right\}, \qquad /6.3/$$

де значення $C = const > 0$ не залежить від вибору $\Delta t, \gamma$.

Доведення теореми аналогічне наведеному у праці [4] і грунтується на енергетичних міркуваннях.

1. Б е р н а к е в и ч И.Е., Ш е л ь в а х О.П., Ш и н к а р е н к о Г.А. Численное исследование вариационных задач теории балок Тимошенко проекционно-сеточными методами. Львов, 1991. 53 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, - 814-Ук91. 2. Б е р н а к е в и ч І.Є., Ш и н к а р е н к о Г.А. Чисельне моделювання акустичної взаємодії оболонок з рідиною. І. Формулювання і розв"язуваність варіаційних задач // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1994. Вип. 41. 3. Д ю в о Г., Л и о н с Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 382 с. 4. Ш и н к а р е н к о Г.А. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. II. Дискретизация и разрешимость нестационарных задач // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30. № 2. С. 317-326. 5. Ш и н к а р е н к о Г.А. Чисельне моделювання динаміки взаємодії фізико-механічних полів: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. Львів, 1993. 36 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.95