УДК 517.52

Г.Г.Цегелик, Х.С.Кудеравець

АПРОКСИМАЦІЯ ЧАСТКОВИХ СУМ УЗАГАЛЬНЕНИХ ГАРМОНІЧНИХ РЯДІВ НЕПЕРЕРВНИМИ ФУНКЦІЯМИ

У різних розділах прикладної математики та інформатики виникає потреба апроксимації часткових сум розбіжних числових рядів неперервними функціями, аргументами яких є кількість доданків цих сум. Однак така апроксимація можлива лише для окремих числових рядів.

Під час дослідження ефективності і побудови математичних моделей оптимального доступу до інформації файлів баз даних, що становлять інформаційне ядро обчислювальних систем, у випадку, коли ймовірності звертання до записів файла розподілені за законом [1, 2]

$$p_i = \frac{1}{i^s H_n^{(s)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{I}$$

де n – кількість записів файла; p_i – ймовірність звертання до i-го запису, $0 < s < 1$;

$$H_n^{(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$$

— n-на часткова сума узагальненого гармонічного ряду, постає задача апроксимації часткових сум $H_n^{(s)}$ для $0 < s \le 1$ і $H_n^{(s-1)}$ для $1< s < 2$ неперервними функціями від аргументу n.

Зауважимо, що саме нерівномірний розподіл ймовірностей звертання до записів файла є типовим для багатьох систем обробки інформації і розподіл /I/ – це узагальнений закон розподілу ймовірностей, частковими випадками якого є окремі відомі в літературі розподіли. Наприклад, при $s = 0$ розподіл ймовірностей /I/ є рівномірним, при $s = 1$ одержуємо закон Зіпфа, при $s = 0{,}8614$ маємо розподіл, який приблизно задовольняє правило "80–20" [3].

Якщо $s = 1$, то для апроксимації n-ї часткової суми

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

гармонічного ряду можна використати натуральний логарифм [4]:

$$H_n = \ln n + C + \gamma_n ,$$

де $C = 0,577...$ – ейлерова стала; γ_n – деяка нескінченно мала величина.

Якщо $0<s<1$, то для апроксимації $H_n^{(s)}$ пропонується використовувати формулу

$$H_n^{(s)} = \frac{1}{1-s} n^{1-s} - C^{(s)} + \gamma_n^{(s)} ,$$

де $C^{(s)}$ – деяка константа; $\gamma_n^{(s)}$ – деяка нескінченно мала величина. Значення констант $C^{(s)}$ для $s=0,1k$ $(k=1,2,...,9)$ наведені у праці [5].

Якщо $0<s<1$, то для апроксимації $H_n^{(s-1)}$ пропонуємо формулу

$$H_n^{(s-1)} = \frac{1}{2-s} n^{2-s} + \alpha^{(s)}(n),$$

де $\alpha^{(s)}(n)$ майже постійна функція. Для знаходження значень функції $\alpha^{(s)}(n)$ $(n=1,2,...,100)$ при $s=0,1k$ $(k=1,2,...,9)$ ми склали таблицю.

Для ознайомлення з характером поведінки функції $\alpha^{(s)}(n)$ наведемо з таблиці значення цієї функції для деяких s і n :

N	C				
	0,I	0,2	0,3	0,4	0,5
50	I6.855608	II.34II26	3.333540	5.064058	3.333540
I50	45.385693	27.434819	5.9I9240	9.939240	5.9I9240
250	7I.906I04	4I.330785	7.700443	I3.562904	7.700443
350	97.356769	54.I26778	9.I48484	I6.634I34	9.I48484
450	I22.080462	66.20I702	I0.400680	I9.368529	I0.400680
550	I46.256262	77.747I62	II.5I9930	2I.868I95	II.5I9930
650	I69.994075	88.877965	I2.54I297	24.I9I437	I2.54I297
750	I93.368076	99.670I27	I3.486699	26.3754I3	I3.486699
850	2I6.43I597	II0.I77443	I4.370923	28.445590	I4.370923
950	239.224772	I20.439848	I5.20450I	30.420363	I5.20450I

N	C			
	0,6	0,7	0,8	0,9
50	2.146904	1.324621	0,744425	0,322397
150	3.464762	1.954942	1.012671	0.408101
250	4.305459	2,327017	1.159079	0.451318
350	4.960942	2,605215	1,264042	0,481023
450	5.511467	2,832137	1.347188	0.503873
550	5.992592	3,020636	1,416652	0.522537
650	6,423665	3,196605	1,476646	0.538364
750	6.816549	3,349675	1,529657	0.552133
850	7,179120	3,489055	1,577285	0.564340
950	7.516913	3.617386	1,620623	0.575316

1. Ц е г е л и к Г.Г. Организация и поиск информации в базах данных. Львов: Вища шк., 1987. 176 с. 2. Ц е г е л и к Г.Г. Системы распределенных баз данных. Львов: Свит, 1990. 169 с. 3. К н у т Д. Искусство программирования для ЭВМ: В 3 т. М.: Мир, 1978. Т.3. 844 с. 4. Ф и х т е н г о л ь ц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Наука, 1970. Т.2. 800 с. 5. З а х а р е в и ч Л.І., Ц е г е л и к Г.Г. Про апроксимацію часткових сум узагальнених гармонічних рядів неперервними функціями //Вісн. Львів. політех. ін-ту. Диференц. рівняння і їх застосування. 1993. № 269. С. 64-66.

Стаття надійшла до редколегії 16.01.95