УДК 518:517.948

М.В.Жук

ЗБІЖНІСТЬ ТА ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядаємо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv -\frac{\partial p(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial q(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} +$$

$$+ r(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial_o}) = f(x,y) \qquad /1/$$

за однорідної крайової умови

$$\mathcal{R}[u]\Big|_{\Gamma} \equiv \Big[p(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\cos(\nu,x)+q(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\cos(\nu,y)\Big]\Big|_{\Gamma}=0, \qquad /2/$$

де Γ – межа області $\mathcal{D}$, обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y – кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x)<h(x)$; ν – зовнішня нормаль до Γ.

На функції $p(x,y,s,t,z)$, $q(x,y,s,t,z)$, $r(x,y,s,t,z)$ накладаються ті ж обмеження, що і в праці [2], $f(x,y)\in H=\mathcal{L}_2(\mathcal{D})$. Крім цього, припускається, що при $(x,y)\in\mathcal{D}$ і довільних s,t,z справедлива нерівність

$$\frac{\partial p}{\partial t}\xi_1^2+\Big(\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial t}\Big)\xi_1\xi_2+\frac{\partial q}{\partial z}\xi_2^2+\Big(\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial r}{\partial t}\Big)\xi_1\xi_0+$$

$$+\Big(\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\xi_2\xi_0+\frac{\partial r}{\partial s}\xi_0^2 \geq M(\xi_1^2+\xi_2^2)+N\xi_0^2 , \qquad /3/$$

де ξ_0,ξ_1,ξ_2 – довільні дійсні числа; $M=const>0$, $M=const<0$ [3].

Тоді для довільних u,v,ω є $W_2^1(\mathcal{D})$ виконуються нерівності

$$A(u,u-v)-A(v,u-v)\geq\mu|u-v|^2, \qquad /4/$$

$$A(u,w)-A(u,w)\leq\eta|u-v||w|, \qquad /5/$$

де $\mu=const>0$, $\eta=const>0$, що визначаються умовами задачі, $A(u,v)$ квазібілінійна форма

$$A(u,v) \equiv \iint\limits_{\mathcal{D}} \Big[p\Big(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\frac{\partial v}{\partial x} + q\Big(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\frac{\partial v}{\partial y} +$$
$$+ z\Big(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big) v \Big] dx\,dy,$$

а

$$|u| = \Big\{ \iint\limits_{\mathcal{D}} \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + u^2 \Big] dx\,dy \Big\}^{1/2} \qquad /6/$$

норма простору $W_2^1(\mathcal{D})$ [3].

Наближений розв"язок задачі /1/-/2/ шукаємо методом Канторовича у вигляді

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k(x,y), \qquad /7/$$

де лінійно незалежні в проміжку $[g(x),\ h(x)]$ функції $\varphi_k(x,y)$ вибираються таким чином, щоб система функцій $\{y_\ell(x)\varphi_k(x,y)\} \in W_2^1(\mathcal{D})$ була повною за нормою /6/. Шукані коефіцієнти $c_k(x)$ визначаються зі системи

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)} (Au_n - f)\varphi_i\,dy + \varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,P[u_n]\Big|_{y=g(x)} + \varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,P[u_n]\Big|_{y=h(x)} = 0 \qquad /8/$$

за умов

$$\int\limits_{g(a)}^{h(a)} P[u_n]\varphi_i\Big|_{x=a} dy = 0, \quad \int\limits_{g(b)}^{h(b)} P[u_n]\varphi_i\Big|_{x=b} dy = 0, \quad i=1,2,\dots,n. \qquad /9/$$

Як відомо, для узагальненого розв"язку $u \in W_2^1(\mathcal{D})$ задачі /1/-/2/ виконується тотожність

$$A(u,v) = \iint\limits_{\mathcal{D}} f v\,dx\,dy \qquad /10/$$

при довільній функції $v \in W_2^1(\mathcal{D})$. Аналогічно для узагальненого розв"язку $u_n(x,y)$ системи /8/-/9/ справедлива тотожність

$$A(u_n, v_n) = \iint\limits_{\mathcal{D}} f v_n\,dx\,dy, \qquad /11/$$

де $v_n(x,y)$ - довільна функція з $H_n \cap W_2^1(\mathcal{D}), H_n \subset H$ - простір функцій вигляду $v_n(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\varphi_k(x,y)$ [4]. Відомо, що умови /4/, /5/ забезпечують існування та єдиність узагальнених розв"язків задачі /1/-/2/ [1] і системи /7/-/8/ [4].

Покажемо збіжність та визначимо оцінку швидкості збіжності методу Канторовича.

Нехай u, u_n - узагальнені розв"язки відповідно /1/-/2/ і /8/-/9/. Тоді з тотожностей /10/-/11/ для довільного елемента

$\omega_n \in H_n \cap W_2^1(\mathcal{D})$ отримуємо

$$A(u,\omega_n) - A(u_n,\omega_n) = 0. \qquad /12/$$

З нерівності /4/, беручи до уваги співвідношення /12/ при $\omega_n = u_n - v_n$, де v_n – довільний елемент з $H_n \cap W_2^1(\mathcal{D})$, а також лінійність форми $A(u,v)$ за другим аргументом, маємо

$$|u-u_n|^2 \le \frac{1}{\mu}\left[A(u,u-u_n) - A(u_n,u-u_n)\right] = \frac{1}{\mu}\left[A(u,u-v_n) - A(u_n,u-v_n)\right].$$

Далі, використовуючи нерівність /5/, з останнього співвідношення отримуємо

$$|u-u_n|^2 \le \frac{\eta}{\mu}|u-u_n||u-v_n|.$$

Таким чином

$$|u-u_n| \le C|u-v_n|, \qquad /13/$$

де $C = \frac{\eta}{\mu}$, а елемент $v_n \in H_n \cap W_2^1(\mathcal{D})$ вибираємо таким, щоб він реалізував мінімум функціоналу $|u-v_n|$. При цьому внаслідок повноти координатної системи функцій

$$|u-v_n| \to 0$$

при $n \to \infty$ [3]. Отже, справедлива така теорема.

<u>Теорема</u>. За обмежень щодо вихідних задачі /1/-/2/, які забезпечують виконання умов /4/, /5/, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою /13/.

Зауважимо, що у випадку задання вихідного рівняння у вигляді

$$Au = -\frac{\partial p(x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial q(x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} + r(x,y,u) \qquad /14/$$

для виконання нерівності /4/ умову /3/ замінюємо умовою еліптичності рівняння /14/ та припущенням, що похідна $\frac{\partial r}{\partial s}$ додатно обмежена.

Повною системою лінійно незалежних функцій у просторі $W_2^1(\mathcal{D})$ є система $\{x^l y^k\}$, $l,k = 0,1,2,\dots$, тому можемо прийняти

$$\varphi_k(x,y) = y^k, \quad k = 0,1,2,\dots .$$

При цьому, якщо узагальнений розв"язок задачі /1/-/2/, перші похідні якого неперервні, має сумовані з квадратом в області $\mathcal{D}$ другі узагальнені похідні, $g''(x), h''(x)$ –неперервні, то використовуючи результати праці [2], отримуємо, що швидкість збіжності методу Канторовича характеризується оцінкою $|u-u_n| = O(\frac{1}{n})$.

Якщо ж, крім цього, $u(x,y) \in W_2^{s+1}(\mathcal{D})$, функції $g^{(s+1)}(x)$, $h^{(s+1)}(x)$ неперервні, то

$$|u-u_n| = O\left(\frac{1}{n^s}\right).$$

1. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М., 1974. 2. Власова З.А. О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Тр. мат. ин-та АН СССР. 1959. Т. 53. С. 34-42. 3. Жук М.В. Дослідження швидкості збіжності методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь //Укр. мат. журн. 1976. Т. 28. № 2. С. 183-193. 4. Жук М.В. Розв"язування нелінійного диференціального рівняння методом Канторовича // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 41. С. 52-55.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.95

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМУ РОЗВ"ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ УРАХУВАННЯМ АПРІОРНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ"ЯЗКУ

Для аналізу та розв"язування задач математичної фізики широко застосовують метод інтегральних рівнянь /ІР/. Він дає змогу одержувати ефективні розв"язки різного типу крайових задач у суттєво просторовій постановці. Основною перевагою методу ІР є зменшення розмірності задачі на одиницю. Згаданий метод використовують для дослідження дифракції електромагнітних та акустичних хвиль на тонких екранах, електростатичних полів, утворених сукупністю заряджених електродів складної конфігурації, теплових полів у тілах з тріщинами тощо. Метод ІР полягає у поданні в інтегральній формі розв"язку відповідної крайової задачі. Як наслідок одержують різні за типом та складністю ІР.

Розглянемо в цьому контексті двовимірне ІР першого роду зі слабкою особливістю в ядрі:

$$\int_S Q(P)\left[dist(P,M)\right]^{-1} dx\,dy = F(M). \qquad /1/$$

Тут $P=(x,y)$; $M=(x_0,y_0)$ - точки евклідового простору R^2, $S = /-1,1/ \times /-1,1/$; $Q(P)$ - шуканий розв"язок; $F(M)$ - задана