Якщо ж, крім цього, $u(x,y) \in W_2^{s+1}(\mathcal{D})$, функції $g^{(s+1)}(x)$, $h^{(s+1)}(x)$ неперервні, то

$$|u-u_n| = O\left(\frac{1}{n^s}\right).$$

1. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М., 1974. 2. В л а с о в а З.А. О методе приведения к обыкновенным диференциальным уравнениям // Тр. мат. ин-та АН СССР. 1959. Т. 53. С. 34-42. 3. Ж у к М.В. Дослідження швидкості збіжності методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь //Укр. мат. журн. 1976. Т. 28. № 2. С. 183-193. 4. Ж у к М.В. Розв"язування нелінійного диференціального рівняння методом Канторовича // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 41. С. 52-55.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.95

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМУ РОЗВ"ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ УРАХУВАННЯМ АПРІОРНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ"ЯЗКУ

Для аналізу та розв"язування задач математичної фізики широко застосовують метод інтегральних рівнянь /ІР/. Він дає змогу одержувати ефективні розв"язки різного типу крайових задач у суттєво просторовій постановці. Основною перевагою методу ІР є зменшення розмірності задачі на одиницю. Згаданий метод використовують для дослідження дифракції електромагнітних та акустичних хвиль на тонких екранах, електростатичних полів, утворених сукупністю заряджених електродів складної конфігурації, теплових полів у тілах з тріщинами тощо. Метод ІР полягає у поданні в інтегральній формі розв"язку відповідної крайової задачі. Як наслідок одержують різні за типом та складністю ІР.

Розглянемо в цьому контексті двовимірне ІР першого роду зі слабкою особливістю в ядрі:

$$\int_S Q(P)\,[dist(P,M)]^{-1}\,dx\,dy = F(M). \qquad /1/$$

Тут $P=(x,y)$; $M=(x_0,y_0)$ – точки евклідового простору R^2, $S=/-1,1/\times/-1,1/$; $Q(P)$ – шуканий розв"язок; $F(M)$ – задана функція, причому $M \in S$, $dist(P,M) = [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}$. За допомогою ІР /1/ описують електростатичне поле, утворене зарядженою пластиною S , квадратною за формою і розташованою паралельно до площини $Z = 0$ у декартовій системі координат XYZ простору R^3. Шукана функція $Q(P)$ виражає густину розподілу заряду на поверхні S . Попри зовнішню простоту формулювання, проблеми, які постають під час аналізу рівняння /1/, є типовими для широкого класу ІР, що моделюють різні фізичні процеси та явища в суттєво просторовій постановці на так званих многовидах з межею. З математичних міркувань розв"язки ІР /1/ можна досліджувати в різних функціональних просторах. Однак вибір останнього повинен забезпечувати поведінку шуканої густини поблизу контуру поверхні S відповідно до описуваного фізичного явища.

Беручи до уваги симетрію розв"язку, ІР /1/ доцільно подати у вигляді

$$\int_{S_{1/4}} Q(P)K(P,M)\,dx\,dy = F(M), \qquad /2/$$

де $S_{1/4} = [0,1]\times[0,1]$, $M \in S_{1/4}$, а $K(P,M) = [dist(P,M)]^{-1}+[dist(P_x,M)]^{-1}+[dist(P_y,M)]^{-1}+[dist(P_{xy},M)]^{-1}$, причому $P_x = (-x,y)$, $P_y = (x,-y)$, $P_{xy} = (-x,-y)$. Розв"язок ІР /2/ аналізуємо у так званому модифікованому просторі Гельдера $\widetilde{H}_{1/4}$. Функція $Q(P)$ належить до $\widetilde{H}_{1/4}$, якщо її можна подати у вигляді $Q(P) = Q^*(P)/\omega(P)$, де $Q^*(P) \in H(S_{1/4})$, а $\omega(P) = \sqrt{(1-x)(1-y)}/[(1-x)^{\mu}+(1-y)^{\mu}]$, причому $\mu = 1-\sqrt{2}/2$. Тут через $H(S_{1/4})$ позначений клас функцій двох змінних, які в $S_{1/4}$ задовольняють умову Гельдера рівномірно по кожній змінній. Обране подання найкраще узгоджується з фізичною картиною поведінки густини $Q(P)$ поблизу вільної межі пластини S та в околі її кутової точки в координатах /1,1/ [5].

Зауважимо, що ідея методу саморегуляризації [2,3,4] полягає в тому, що беручи до уваги характер поведінки шуканого розв"язку, а також спеціальним чином локалізуючи особливість ядра ІР /2/, можна наближено перейти до ІР другого роду, яке досліджують за відомою схемою. Для локалізації ядра подаємо його головну частину у вигляді

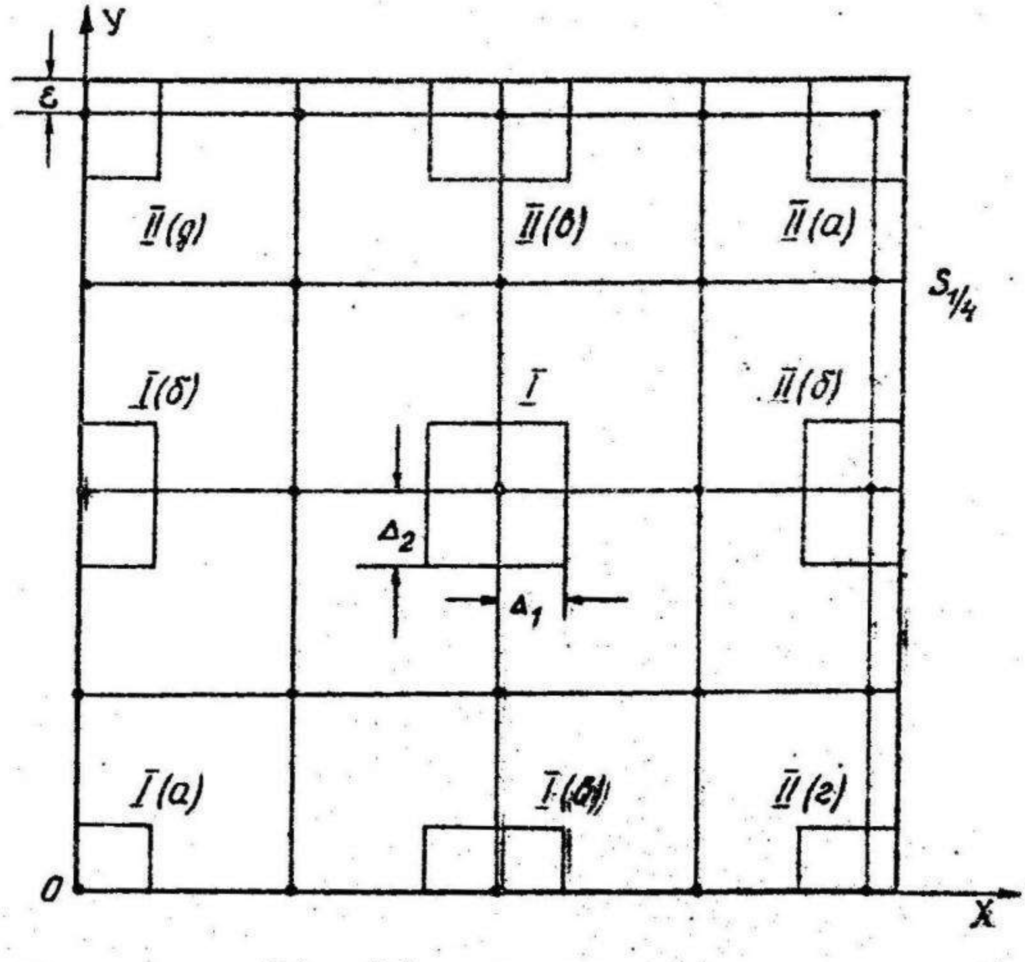
$$[dist(P,M)]^{-1} = N(P,M) + O(P,M), \qquad /3/$$

де

$$N(P,M) = \begin{cases} \dfrac{(\Delta_1-|x-x_0|)(\Delta_2-|y-y_0|)}{\Delta_1\Delta_2\, dist(P,M)}, & P \in S_0, \\ 0, & P \notin S_0, \end{cases}$$

$$G(P,M)=\begin{cases}\dfrac{\Delta_2|x-x_0|+\Delta_1|y-y_0|-|x-x_0|\cdot|y-y_0|}{\Delta_1\Delta_2\,dist(P,M)}, & P\in S_0,\\ [dist(P,M)]^{-1}, & P\notin S_0,\end{cases}$$

$S_0=[x_0-\Delta_1,\,x_0+\Delta_1]\times[y_0-\Delta_2,\,y_0+\Delta_2]$; Δ_1,Δ_2 – невід"ємні дійсні достатньо малі параметри, вибір яких узгоджується з кроком сітки розбиття $S_{1/4}$ на елементи /див. рисунок/ у процесі побудови дискретного аналога /2/.



Підставляючи /3/ в /2/, одержуємо

$$\int\limits_{S_{1/4}} Q(P)N(P,M)dxdy+\int\limits_{S_{1/4}} Q(P)R(P,M)dxdy=F(M),$$

де $R(P,M)=K(P,M)-[dist(P,M)]^{-1}+G(P,M)$. Припускаючи, що Δ_1 і Δ_2 настільки малі, що функція $Q(P)$ мало змінюється в S_0, одержуємо наближений аналог ІР /2/:

$$Q(M)L(M)+\int\limits_{S_{1/4}} Q(P)R(P,M)dxdy=F(M), \qquad /4/$$

$$L(M)=\frac{\omega(M)}{\Delta_1\Delta_2}\int\limits_{S_0}\frac{(\Delta_1-|x-x_0|)(\Delta_2-|y-y_0|)}{\omega(P)\cdot dist(P,M)}\,dxdy. \qquad /5/$$

ІР /4/ розв"язується методом колокації з використанням білінійної або біквадратичної апроксимації шуканої густини розподілу заряду $Q(P)$. У процесі розв"язання /4/ постає потреба обчислення з гарантованою точністю невласного інтеграла /5/, підінтегральна функція якого має особливості за рахунок властивості ядра ІР /І/, а також у точках поверхні S, де $\omega(P)=0$. Оскільки немає універсального способу позбавлення від особливостей у /5/, розглянемо деякі випадки /див. рисунок/, кожний з яких відзначається окремим підходом. Не зменшуючи загальності, зупинимося на двох: І і ІІ/а/. У першому інтеграл /5/ легко перетворити до вигляду

$$L(M)=\frac{1}{\Delta_1\Delta_2}\int\limits_{S_0}\frac{B(P,M)}{\omega(P)}\,dxdy+\int\limits_{S_0}[dist(P,M)]^{-1}dxdy, \qquad /6/$$

де

$$B(P,M)=[(\Delta_1-|x-x_0|)(\Delta_2-|y-y_0|)\omega(M)-\Delta_1\Delta_1\omega(P)]\cdot[dist(P,M)]^{-1},$$

причому другий інтеграл беремо аналітично /І/, а для наближеного обчислення першого подвійного інтеграла можна використати одну з відомих кубатурних формул. Річ у тому, що підінтегральна функція в першому інтегралі є неперервною, оскільки

$$\lim_{P\to M}\frac{B(P,M)}{\omega(P)}=-\frac{\Delta_1+\Delta_2}{\sqrt{2}}.$$

У випадку ІІ/а/ перший інтеграл формули /6/ має вигляд

$$\int\limits_{x_0-\Delta_1}^{1}\int\limits_{y_0-\Delta_2}^{1}\frac{B(P,M)}{\omega(P)}\,dxdy.$$

Очевидно, що це невласний інтеграл за рахунок перетворення на нуль функції $\omega(P)$. Тому виконаємо в ньому заміну змінних: $x(u,v)=1-u^2$, $y(u,v)=1-v^2$. У результаті він набуває вигляду

$$A\times\int\limits_{0}^{\sqrt{(1-x_0+\Delta_1)}}\int\limits_{0}^{\sqrt{(1-y_0+\Delta_2)}}B(P^*,M)(u^{2\mu}+v^{2\mu})\,dudv,$$

де $P^*=(x,y)=[x(u,v),y(u,v)]$. Для застосування квадратурних формул слід лише зважити, що

$$\lim_{P\to M}B(P^*,M)(u^{2\mu}+v^{2\mu})=-\varepsilon\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}.$$

Описаний алгоритм використовують для розв"язування широкого кола крайових задач теорії потенціалу в електронній оптиці. Досвід показує, що попри відносну складність реалізації методу, в окремих випадках складної конфігурації заряджених електродів позитивний результат можна отримати, лише беручи до уваги всі особливості розв"язку.

1. Гарасим Я.С., Остудін Б.А. Дослідження алгоритму обчислення одного класу двовимірних невласних інтегралів //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 33. С. 40-45. 2. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I-го рода //Вычисл. методы и программирование. 1968. Вып. 10. С. 49-54. 3. Людкевич И.В., Остудин Б.А. Численное решение граничных задач теории потенциала в электронной оптике методом саморегуляризации. Львов, 1983. 43 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 1455 Ук-Д83. 4. Тихонов А.Н. Дмитриев В.И. Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы //Вычисл. методы и программирование. 1968. Вып. 10. С.3-8. 5. Hanson R.J., Philips J.L. Numerical solution of two dimensional integral equation using linear elements // SIAM J. Numer. Anal. 1978. Vol.15. No 1. P. 113-121.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.95

УДК 517.947

А.А.Переймибіда, Р.С.Хапко

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ПОЧАТКОВО - КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

Розглядаючи задачі теплопровідності звичайно обмежуються математичною моделлю, що описується параболічним рівнянням у частинних похідних з відповідними початковими та граничними умовами. Іноді /2/ потрібно розглядати модель, що враховує скінченну швидкість поширення тепла. Така постановка задачі приводить до розгляду початково - крайових задач для гіперболічного рівняння теплопровідності, яке ще називають телеграфним рівнянням.

Постановка задачі. Нехай в R^3-задана необмежена область D, така, що доповнення її є обмеженим і однозв"язним, та його границя S належить класу C^2. Розглянемо початково-крайову задачу для