Описаний алгоритм використовують для розв"язування широкого кола крайових задач теорії потенціалу в електронній оптиці. Досвід показує, що попри відносну складність реалізації методу, в окремих випадках складної конфігурації заряджених електродів позитивний результат можна отримати, лише беручи до уваги всі особливості розв"язку.

I. Гарасим Я.С., Остудін Б.А. Дослідження алгоритму обчислення одного класу двовимірних невласних інтегралів //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 33. С. 40-45. 2. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I-го рода //Вычисл. методы и программирование. 1968. Вып. 10. С. 49-54. 3. Люлкевич И.В., Остудин Б.А. Численное решение граничных задач теории потенциала в электронной оптике методом саморегуляризации. Львов, 1983. 43 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 1455 Ук-Д83. 4. Тихонов А.Н. Дмитриев В.И. Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы //Вычисл. методы и программирование. 1968. Вып. 10. С.3-8. 5. Hanson R.J., Philips J.L. Numerical solution of two dimensional integral equation using linear elements // SIAM J. Numer. Anal. 1978. Vol.15. No 1. P. 113-121.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.95

УДК 517.947

А.А.Переймибіда, Р.С.Хапко

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ПОЧАТКОВО - КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

Розглядаючи задачі теплопровідності звичайно обмежуються математичною моделлю, що описується параболічним рівнянням у частинних похідних з відповідними початковими та граничними умовами. Іноді /2/ потрібно розглядати модель, що враховує скінченну швидкість поширення тепла. Така постановка задачі приводить до розгляду початково - крайових задач для гіперболічного рівняння теплопровідності, яке ще називають телеграфним рівнянням.

Постановка задачі. Нехай в R^3-задана необмежена область D, така, що доповнення її є обмеженим і однозв"язним, та його границя S належить класу C^2. Розглянемо початково-крайову задачу для телеграфного рівняння

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u \quad \text{в} \quad D\times[0,\infty) \qquad /1/$$

$(a>0,\ b>0)$ з однорідними початковими умовами

$$u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\quad x\in D \qquad /2/$$

і граничною умовою

$$u=F \text{ на } S\times[0,\infty), \qquad /3/$$

де F – задана функція, що задовольняє умову узгодженості

$$F(x,0)=\frac{\partial F}{\partial t}(x,0)=0,\quad x\in S.$$

Крім цього, вважаємо, що в разі спрямування точки спостереження в нескінченість, функція $u(t,x)$ прямує до нуля.

Для рівняння /1/, з урахуванням умов /2/, потенціал простого шару має вигляд [1]:

$$v(x,t)=\iint\limits_S\int\limits_0^t\sigma(\tau,y)G\left(t-\tau,\frac{|x-y|}{a}\right)d\tau\, ds(y), \qquad /4/$$

де $\sigma(\tau,y)$ – густина; $G(t,r)$ – фундаментальний розв"язок, що має таке зображення:

$$G(t,r)=\frac{e^{-\alpha t}}{4\pi a}\left\{\frac{\delta_+(t-r)}{r}+E_+(t-r)\alpha\frac{I_1(\alpha\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}\right\}, \qquad /5/$$

де $E_+(z)$ – функція Хевісайда; $I_1(z)$ – модифікована функція Беселя; $\delta_+(z)$ – функція Дірака; $\alpha=a^2/2b$.

Справедливі такі твердження.

Теорема 1. Фундаментальні розв"язки телеграфного рівняння /1/ $G(t,x)$ та рівняння теплопровідності $G_T(t,x)$ зв"язані наступними співвідношеннями:

$$\lim_{a\to\infty}G(t,r)=G_T(t,r),$$

$$\lim_{t\to\infty}[G(t,r)-G_T(t,r)]=0.$$

Теорема 2. Потенціал простого шару для телеграфного рівняння, визначений як /4/, є розв"язком задачі /1/-/3/, якщо його густина є розв"язком інтегрального рівняння /ІР/ першого роду:

$$\iint\limits_S\int\limits_0^t\sigma(\tau,y)G\left(t-\tau,\frac{|x-y|}{a}\right)d\tau\, ds(y)=F(t,x),\ x\in S,\ t>0. \qquad /6/$$

Параметризація ІР. Нехай поверхня S утворена обертанням деякої кривої навколо осі OZ. Введемо циліндричну систему координат (r, z, φ) і вважатимемо, що гранична функція не залежить від φ. Тоді розв"язок задачі також не залежить від φ і його можна шукати у верхній півплощині $\varphi = 0$. Нехай

$$S = \{P(\vartheta) = (r(\vartheta), z(\vartheta)),\ \vartheta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi]\} : [r'(\vartheta)]^2 + [z'(\vartheta)]^2 > 0.$$

У такому випадку ІР /6/ записуємо у такій параметричній формі:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t q(\tau, \nu) H(t - \tau, \nu, \vartheta, \varphi)\, d\tau\, d\varphi\, d\nu = g(t, \vartheta), \qquad /7/$$

де

$$q(\tau, \nu) := \sigma(\tau, P(\nu)) |P'(\nu)| r(\nu); \quad g(t, \vartheta) := F(t, P(\vartheta)),$$

$$H(t, \nu, \vartheta) := G\left(t, \frac{R(P(\nu), P(\vartheta), \varphi)}{a}\right);$$

$$R(P(\nu), P(\vartheta), \varphi) := [r^2(\nu) + r^2(\vartheta) - 2r(\nu) r(\vartheta) \cos\varphi + (z(\nu) - z(\vartheta))^2]^{1/2}.$$

<u>Дискретизація за часом</u>. Нехай розв"язок вихідної задачі потрібно знайти на проміжку $[0; T]$ $(T > 0)$, у моменти часу $t_n = nh_t$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, N_t$), де $h_t = T/N_t$. Невідому густину вважатимемо кусково – сталою за часом, тобто

$$\forall \tau \in (t_{i-1}, t_i],\ q(\tau, \nu) = q_i(\nu).$$

Тепер у момент часу t_n, з урахуванням зображення /5/, ІР /7/ набуває вигляду

$$\int_0^{\pi} q_n(\nu) \int_0^{2\pi} \left[D_0^{(1)}(\nu, \vartheta, \varphi) + D_0^{(2)}(\nu, \vartheta, \varphi)\right] d\varphi\, d\nu = g_n(\vartheta) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{\pi} q_k(\nu) \int_0^{2\pi} \left[D_{n-k}^{(1)}(\nu, \vartheta, \varphi) + D_{n-k}^{(2)}(\nu, \vartheta, \varphi)\right] d\varphi\, d\nu, \quad n = 1, 2, \ldots, N_t, \qquad /8/$$

де

$$r(\nu, \vartheta, \varphi) = \frac{R(\nu, \vartheta, \varphi)}{a},$$

$$D_m^{(1)}(\nu, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi r(\nu, \vartheta, \varphi)} e^{-\alpha r(\nu, \vartheta, \varphi)} E_+^m(r(\nu, \vartheta, \varphi)), \qquad /9/$$

$$E_+^m(t) = \begin{cases} 0, & t \notin (mh_t, (m+1)h_t] \\ 1, & t \in (mh_t, (m+1)h_t] \end{cases},$$

$$D_m^{(2)}(\nu,\upsilon,\varphi) = E_+((m+1)h_t - r(\nu,\upsilon,\varphi))\frac{\alpha}{4\pi a}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(mh_t,(m+1)h_t)r^{2n}(\nu,\upsilon,\varphi). \qquad /10/$$

Таким чином, після дискретизації за часом гранично - часове ІР /6/ зводиться до послідовності ІР /7/, де функції $D_m^{(1)}$ та $D_m^{(2)}$ задаються співвідношенням /9/ та /10/ відповідно.

<u>Обчислення внутрішніх інтегралів</u>. Наступним кроком буде обчислення інтегралів по φ у /8/. Як бачимо з формули /10/, функції $D_m^{(2)}(\nu,\upsilon,\varphi)$ не мають ніяких особливостей, і їх інтегрування по φ можна здійснити за допомогою звичайних квадратурних формул, наприклад, Гауса. Функції $D_m^{(1)}(\nu,\upsilon,\varphi)$ мають особливість, яку потрібно брати до уваги, інтегруючи їх.

Позначимо

$$H_m^{(1)}(\nu,\upsilon) := \int_0^{2\pi} D_m^{(1)}(\nu,\upsilon,\varphi)d\varphi.$$

Враховуючи означення функції $E_+^m(z)$ та зображення /9/, $H_m^{(1)}(\varphi,\upsilon)$, можна записати у вигляді двох доданків, у першому з яких міститься особливість, а другий можна обчислити будь-яким з відомих квадратурних методів. Отже,

$$H_m^{(1)}(\varphi,\upsilon) = \hat{H}_m^{(1)}(\nu,\upsilon) + \check{H}_m^{(1)}(\nu,\upsilon),$$

де

$$\hat{H}_m^{(1)}(\nu,\upsilon) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(r(\nu)+r(\upsilon))^2+(z(\nu)-z(\upsilon))^2}}(F(\tilde{\varphi}_m,k)-F(\tilde{\varphi}_{m+1},k)),$$

$$\check{H}_m^{(1)}(\nu,\upsilon) = H_m^{(1)}(\nu,\upsilon) - \hat{H}_m^{(1)}(\nu,\upsilon);$$

$F(\varphi,k)$ - неповний еліптичний інтеграл першого роду [3]. Таким чином, послідовність інтегральних рівнянь /8/ записуємо у формі

$$\int_0^{\pi} q_n(\nu)P_0(\nu,\upsilon)d\nu = g_n(\upsilon) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi} q_k(\nu)P_{n-k}(\nu,\upsilon)d\nu, \quad n=1,2,\dots,N_t, \qquad /11/$$

де

$$P_m(\nu,\upsilon) = \int_0^{2\pi} D_m^{(2)}(\nu,\upsilon,\varphi)d\varphi + \check{H}_m^{(1)}(\nu,\upsilon) + \hat{H}_m^{(1)}(\nu,\upsilon).$$

<u>Колокація по геометричній координаті</u>. Введемо на відрізку $[0,\pi]$ розбиття $\upsilon_i = \frac{i\pi}{N_\upsilon}$, $i = 0,1,\dots,N_\upsilon$, і вважатимемо, для простоти викладу, невідомі густини кусково-сталими, тобто

$$\forall \upsilon \in (\upsilon_{i-1},\upsilon_i], \; q_n(\upsilon) = a_{ni}.$$

результаті з послідовності ІР /II/ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{N_\vartheta} a_{ni} \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} P_0(\nu,\vartheta)\,d\nu = g_n(\vartheta) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{N_\vartheta} a_{ki} \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} P_{n-k}(\nu,\vartheta)\,d\nu.$$

Задовольняючи виписані апроксимаційні рівняння в точках колокації $\bar{\vartheta}_i \in [0,\pi]$, для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ki} отримуємо послідовність систем лінійних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{N_\vartheta} a_{nj} A_j^{(0)}(\bar{\vartheta}_i) = g_n(\bar{\vartheta}_i) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{N_\vartheta} a_{kj} A_j^{(n-k)}(\bar{\vartheta}_i), \qquad /12/$$

де

$$A_j^{(m)}(\bar{\vartheta}_i) = \int_{\vartheta_{j-1}}^{\vartheta_j} P_m(\nu,\bar{\vartheta}_i)\,d\nu. \qquad /13/$$

Можна показати, що у коефіцієнтах /13/ присутня логарифмічна особливість при $m = 0$ та $\nu \to \vartheta$. Її виділення здійснюється методом Канторовича.

Отже, розв"язування вихідної нестаціонарної задачі /1/-/3/ зведене до розв"язку послідовності систем лінійних рівнянь /12/, матриці яких однакові, а для кожного моменту часу t_n перевизначають лише праву частину.

Остаточно наближений розв"язок вихідної задачі обчислюється за формулою

$$\tilde{u}(x,t_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_\vartheta} a_{ki} A_i^{(n-k)}(x).$$

Приклад. Описаний алгоритм релізований у вигляді програмного комплексу для персонального комп"ютера типу IBM. Розглянемо задачу /1/-/3/ з коефіцієнтами $a = b = 1$ на сфері $(P(\vartheta) = (\sin\vartheta, \cos\vartheta))$, з граничною умовою $F(x,t) = F(t) = 3t^2 e^{-6t+2}$.

Вона має такий точний розв"язок:

$$F_u(x,t) = F(t-p)\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{|x|} + 2p\int_p^t F(t-r)\frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{r^2-p^2}\right)}{\sqrt{r^2-p^2}} e^{-\frac{r}{2}}\,dr;\ p = |x| - 1.$$

У таблиці наведені результати порівняння $\widetilde{u}(x, t_n)$ з $F_a(x,t_n)$ при $h_r = 0{,}025$ та $N_v = 64$.

t x	(r, z) = /0.8, 0.8/		(r, z) = /0.9, 0.9/	
	$F_a(x,t_n)$	$\widetilde{u}(x,t_n)$	$F_a(x,t_n)$	$\widetilde{u}(x,t_n)$
0.I0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.20	0.057356	0.057843	0.000000	0.000000
0,30	0.I90703	0.I89958	0.009570	0.009919
0.40	0.26684I	0.264665	0.II5638	0.II4925
0.50	0.277538	0.27387I	0.2044I0	0.20I67I
0.60	0.248345	0.24327I	0.235689	0.230045
0.70	0.203I58	0.I97206	0.2244I4	0.2I5740

I. Новиков И.А. Трехмерные потенциалы для телеграфного уравнения и их применение к краевым задачам теплопроводности.// Инж.-физ. журн. I979. Т. 36. № I. С. I39-I46. 2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. К.: Наук. думка, I976. 3I0 с. 3. Справочник по специальным функциям /Под ред. Абрамовица М., Стиган М. М.: Наука, I979. 842 с.

Стаття надійшла до редколегії I5.02.95

УДК 5I9.68

М.С.Лаба, Г.Г.Цегелик

МЕТОД /m+I/-АРНОГО ПОШУКУ ІНФОРМАЦІЇ В УПОРЯДКОВАНИХ ПОСЛІДОВНИХ ФАЙЛАХ І ЙОГО ЕФЕКТИВНІСТЬ

У даній праці на основі розпаралелювання методу двійкового пошуку інформації в послідовних упорядкованих файлах /I/ вводиться поняття методу $/m+$I/-арного пошуку, орієнтованого на його використання для пошуку записів у послідовних упорядкованих файлах, що містяться в пам"яті багатопроцесорної ЕОМ, до складу якої входить m процесорів, які працюють паралельно і мають спільне поле пам"яті. За критерій ефективності приймається середня та максимальна кількість паралельних порівнянь, потрібних для пошуку запису у файлі. При цьому припускається, що послідовний файл містить N записів, які пронумеровані послідовними натуральними чис-