Порівнюючи ефективність /за кількістю порівнянь/ методу двійкового пошуку і методу $/m+1/$-арного пошуку, доходимо висновку, що розпаралелювання методу двійкового пошуку сприяє підвищенню ефективності приблизно в $\log_2(m+1)$ разів.

1. Цегелик Г.Г. Методы автоматической обработки информации. Львов: Вища шк. 1981. 132 с. 2. Цегелик Г.Г. Организация и поиск информации в базах данных. Львов: Вища шк. 1987. 176 с. 3. Цегелик Г.Г. Методы паралельного поиска информации в базах данных для многопроцесорных ЭВМ // Распараллеливание обработки информации: Тез. докл. 6-й Всесоюз. шк.-семинара, г.Львов, 18-23 мая 1987 г. Львов, 1987. Ч.1. С.205-206.

Стаття надійшла до редколегії 02.03.95

УДК 519.61

М.Я.Бартіш, А.І.Чипурко, С.М.Шахно

ПРО ОДНУ МОДИФІКАЦІЮ МЕТОДУ ГАУСА-НЬЮТОНА

У даній праці запропонована нова модифікація методу Гауса-Ньютона розв"язування нелінійної задачі про найменші квадрати:

$$\text{знайти } \min \tfrac{1}{2}F(x)^T F(x) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} f_i(x)^2, \qquad /1/$$

де $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m (m \geq n)$ - функція нев"язки, нелінійна по x; $f_i(x)$ - i-та компонента функції $F(x)$. Типовий приклад, коли виникає ця задача, - процес добору параметрів функціональної залежності за даними експерименту або статистичної вибірки,а також при розв"язуванні систем нелінійних рівнянь, в яких кількість нелінійних зв"язків перевищує кількість ступенів вільності.

Для розв"язування задачі /1/ використовують метод Ньютона [1]:

$$x_{n+1} = x_n - [J(x_n)^T J(x_n) + S(x_n)]^{-1} J(x_n)^T F(x_n),$$
$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \nabla^2 f_i(x) \qquad /2/$$

та Гауса-Ньютона [1]:

$$x_{n+1} = x_n - [J(x_n)^T J(x_n)]^{-1} J(x_n)^T F(x_n), \qquad /3/$$

де $J(x) = F'(x)$ - матриця Якобі з елементами $J(x)_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$, $(i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n)$,
$\nabla^2 f_i(x)$ - гесіан функції f_i у точці x, $n = 0, 1, \dots$.

Метод /2/ - швидкий локальний метод, оскільки він є локально квадратично збіжним. Однак його рідко застосовують на практиці, бо надто дорого обходиться обчислення $S(x)$. Крім цього, не бажано використовувати інші похідні.

Метод /3/ простіший, але швидкість збіжності його буде квадратичною лише у випадку задач з нульовою нев"язкою $F(x_*)=0$, де x_* - розв"язок задачі /I/, інакше швидкість збіжності буде лінійною.

Розглянемо метод розв"язання задачі /1/, побудований нами на базі методу зі швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$ [2]:

$$x_{n+1}=x_n-[J(\theta_n)^T J(\theta_n)]^{-1}J(\theta_n)^T F(x_n),$$
$$\theta_{n+1}=x_{n+1}-\frac{1}{2}[J(\theta_n)^T J(\theta_n)]^{-1}J(\theta_n)^T F(x_{n+1}),$$
$$\theta_0=x_0, \quad n=0,1,\ldots . \qquad /4/$$

На кожній ітерації методу /4/ слід розв"язувати дві системи лінійних рівнянь з однаковою матрицею $A_n=[J(\theta_n)^T J(\theta_n)]$, яка є симетричною у випадку повного стовпцевого рангу $J(x_n)$ і додатно визначеною. Ефективно розв"язувати ці системи можна за допомогою збуреного розкладу Холеського $A_n+D=LL^T$ де D - невід"ємна діагональна матриця, елементи якої дорівнюють нулю у випадку додатно визначеної матриці A_n . При цьому на кожному кроці здійснюється лише один раз розклад на множники, один раз - прямий хід методу Холеського і двічі - обернений хід. Тобто кількість обчислень на одній ітерації методу /4/ близька до кількості обчислень на одній ітерації методу Гауса-Ньютона /3/.

Реальні швидкісні властивості методу /4/ виявляли за допомогою широкого чисельного експерименту. Для порівняння виконували розрахунки також методами Ньютона /2/, Гауса-Ньютона /3/ та модифікованим методом Гауса-Ньютона [2]:

$$x_{n+1}=x_n-\beta_n[J(\bar{x}_n)^T J(\bar{x}_n)]^{-1}J(\bar{x}_n)^T F(\bar{x}_n),$$
$$\bar{x}_n=\frac{1}{2}(x_n+\varphi(x_n)),\ \varphi(x_n)=x_n-\alpha_n J(x_n)^T F(x_n), \qquad /5/$$

де $n=0,1,\ldots,\alpha_n$; β_n - дійсні числові параметри з інтервалу $(0,1]$.

Зауважимо, що під час реалізації методів /2/, /3/, /4/, як і в методу /5/, вводили демпфувальний множник β_n. Значення β_n визначали методом золотого перерізу.

У таблиці наведені результати розрахунків /кількість ітерацій для досягнення розв"язку з точністю $\mathcal{E} = 10^{-a}$/ на тестових задачах [1]. Символ "∞" означає, що при заданому початковому наближенні метод є розбіжним.

Приклад	Початкове наближення x^0	Метод Ньютона /2/	Гаусса-Ньютона /3/	Модифікація методу $1+\sqrt{2}$ /4/	Модифікація методу Гаусса-Ньютона /5/
I параметр $y_3 = 8$	3	I9	II	7	7
	2	I3	8	5	2
	I	7	5	2	5
	0.5	I	2	I	2
I параметр $y_3 = 3$	3		II	8	7
	2	I5	8	6	5
	I	9	5	4	4
	0.5	5	2	2	4
I параметр $y_3 = -I$	3		II	8	7
	2	I6	8	6	5
	I	II	5	4	4
	0	2	2	2	2
2	/2.I/	8	6	3	5
	/I.2/	8	6	3	4
	/I.I/	6	5	3	3
	/0.5, 0.5/	3	3	2	3
	/-I, -I/	4	6	4	4
	/0.0/		4	3	4
3	/-I.2,I,-I.2,I/	I5	I5	8	7
	/-I.2, -I.2/	I3	I4	7	II
	/-2.4, -2.4/	26	27	8	28
	/0.0, 0.0/	II	II	7	I2
4	/3,-I.0,I/	I6	I2	7	II
	/I0,I0,I0,I0/	I8	I4	I0	II
	/0,-4,-3,-2/	I6	I2	7	I2
	/2,-2,-I,0/	I6	I3	9	I2

Приклад 1. Задана система трьох рівнянь з одним невідомим:

$$f_i(x)=e^{t_i x}-y_i=0,\ i=1,2,3,$$

$$t_1=1,\ y_1=2,\ t_2=2,\ y_2=4,\ t_3=3.$$

Значення y_3 і x_0 наведені в таблиці.

Розв"язок задачі: при $y_3=8$, $x_*=0.69315$, $F(x_*)=0$;

при $y_3=3$, $x_*=0,44005$, $F(x_*)=1.6390$;

при $y_3=-1$, $x_*=0.04474$, $F(x_*)=6.9765$;

Приклад 2. Задана система чотирьох рівнянь з двома невідомими:

$$f_i(x)=e^{x_1+t_i x_2}-y_i=0,\ i=1,2,3,4,$$

$$t_1=-2,\ y_1=0.5,\ t_2=-1,\ y_2=1,\ t_3=0,\ y_3=2,\ t_4=1,\ y_4=4.$$

Розв"язок задачі: $x_*=(\ln 2, \ln 2)$.

Приклад 3. Розширена функція Розенброка:

$$f_{2i-1}(x)=10(x_{2i}-x_{2i-1}^2),$$

$$f_{2i}(x)=1-x_{2i-1},\ i=1,\dots,n/2,\ n=4.$$

Розв"язок задачі: $x_*=/1,1,1,1/$.

Приклад 4. Розширена узагальнена функція Пауела:

$$f_{4i-3}(x)=x_{4i-3}+10x_{4i-2},$$

$$f_{4i-2}(x)=5(x_{4i-1}-x_{4i}),$$

$$f_{4i-1}(x)=(x_{4i-2}+2x_{4i-1})^2,$$

$$f_{4i}(x)=10(x_{4i-3}-x_{4i})^2,\ i=1,\dots,n/4,\ n=4.$$

Розв"язок задачі: $x_*=/0,0,0,0/$.

Як показали обчислення, метод /4/ набагато ефективніший від методів /2/, /3/, /5/ у сенсі кількості ітерацій та кількості обчислень на задачах з нульовою та малою нев"язками. Проте, як і методи /3/ та /5/, запропонований метод /4/ може погано збігатися на задачах з великою нев"язкою.

1. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер.А. 1968. №5. С.387-391. 2. Б а р т і ш М.Я., Ш а х н о С.М. Деякі методи розв"язування нелінійної задачі про найменших квадратів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С. 3-7. 3. Д э н н и с Дж., мл., Ш н а б е л ь Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.95