УДК 517.946

М.М.Притула, О.М.Дмуховська

ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІНВЕРСНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ БУССІНЕСКА

Нехай на нескінченновимірному періодичному функціональному многовиді $M \simeq C_l^{(\infty)}(R;R^4)$, де $R_+ \ni l < \infty$ - період, задана нелінійна інверсна динамічна система Буссінеска:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= q \\ v_t &= p \\ q_t &= v_x + 3u^2 \\ p_t &= u_x \end{aligned}\right\} = K[u,v,q,p], \qquad /1/$$

де K : M → T/M/ - гладке за Фреше поліноміальне векторне поле на многовиді M. Система /1/ одержана з нелінійного рівняння Буссінеска:

$$u_{tt} = (u_{xxx} - 6uu_x)_x$$

шляхом відображення інверсії $R \ni x \rightleftarrows t \in R$.

Згідно з алгоритмом [1, 2] дослідимо наявність нескінченної ієрархії законів збереження для динамічної системи /1/ на гладкому l-періодичному многовиді M. Для цього розглянемо асимптотичні розв"язки лінійного рівняння Лакса:

$$\varphi_t + K'^*\varphi = 0, \qquad /2/$$

де $\varphi \in T^*(M)$, K'^* - похідна Фреше оператора K : M → T/M/, " * " - спряження щодо білінійної форми:

$$(a,b) = \int_{x_0}^{x_0+l} \langle a(x), b(x) \rangle dx,$$

$$\langle a(x), b(x) \rangle = \sum_{j=1}^{4} a_j(x) b_j(x), \quad x_0 \in R^1, \quad a,b \in T(M).$$

Оскільки оператор $K'^*[u,v,q,p] : T^*(M) \to T^*(M)$ має згідно з /1/ вигляд

$$K'^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6u & -\partial \\ 0 & 0 & -\partial & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad /3/$$

то рівняння /2/ допускає вектор-розв"язок $\varphi \in T^*(M)$ у формі

$$\varphi(x,t;\lambda)=(1,b(x,t;\lambda),c(x,t;\lambda),d(x,t;\lambda))^{\tau}\exp[\lambda x+\omega(\lambda)t+\partial^{-1}\sigma(x,t;\lambda)], \qquad /4/$$

де $\lambda \in C^1$ – комплексний параметр; τ – знак транспонування; $\omega(\lambda)$ – "дисперсійна" функція, що враховує явну залежність функції $\varphi \in T^*/M/$ від λ; $\partial^{-1}(.)=\frac{1}{2}[\int_{x_0}^{x}(.)dx - \int_{x}^{x_0+l}(.)\,dx]$ – оператор "оберненого" диференціювання, $\partial\cdot\partial^{-1}=1$; причому справедливі асимптотичні розвинення при $|\lambda|\to\infty$:

$$\begin{aligned} b(x,t;\lambda) &\simeq \sum_{j\in Z_+} b_j[u,v,q,p]\lambda^{-j}, \\ c(x,t;\lambda) &\simeq \sum_{j\in Z_+} c_j[u,v,q,p]\lambda^{-j}, \\ d(x,t;\lambda) &\simeq \sum_{j\in Z_+} d_j[u,v,q,p]\lambda^{-j}, \\ \sigma(x,t;\lambda) &\simeq \sum_{j\in Z_+} \sigma_j[u,v,q,p]\lambda^{-j}. \end{aligned} \qquad /5/$$

Використовуючи співвідношення Лакса /2/ з урахуванням /4/, знаходимо початкові коефіцієнти b, c, d і величину $\omega(\lambda)$ за умови $u=v=p=q=0$, тобто $(b,c,d)|_{u=v=q=p=0}=(\bar{b},\bar{c},\bar{d})$:

$$\omega(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \bar{b}\\ \bar{c}\\ \bar{d}\end{pmatrix}\exp[\lambda x+\omega(\lambda)t]+\begin{pmatrix}0&0&0&-\partial\\ 0&0&-\partial&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \bar{b}\\ \bar{c}\\ \bar{d}\end{pmatrix}\exp[\lambda x+\omega(\lambda)t]=0. \qquad /6/$$

Розв"язуючи /5/, отримуємо

$$\bar{b}=-\omega(\lambda)^2/\lambda,\ \bar{c}=-1/\omega(\lambda),\ \bar{d}=\omega(\lambda)/\lambda,\ \omega(\lambda)=\sqrt{\lambda}.$$

Після редукції $\lambda\to\lambda^2$ шуканий розв"язок можна записати у вигляді

$$\varphi(x,t;\lambda)=(1,b(x,t;\lambda),c(x,t;\lambda),d(x,t;\lambda))^{\tau}\exp[\lambda t+\lambda^2 x+\partial^{-1}\sigma(x,t;\lambda)]. \qquad /7/$$

Підставляючи розв"язок /7/ у рівняння Лакса /2/, за умови /5/ отримуємо систему нескінченних рекурентних співвідношень:

$$
\begin{cases}
b_{j,-1} + \theta^{-1}\sigma_{j,t} + 6uc_j - d_{j,x} - d_{j+2} - \sum_{k=0}^{j} d_{j-k}\sigma_k = 0 \\
b_{j,t} - 6u\sum_{k=0}^{j} b_{j-k}c_k + \sum_{k=0}^{j} b_{j-k}d_{k,x} + \sum_{k=0}^{j+2} b_{j+2-k}d_k + \\
+ \sum_{k=0}^{j}\sum_{s=0}^{k} b_{j-k}d_{k-s}\sigma_s - c_{j,x} - c_{j+2} - \sum_{k=0}^{j} c_{j-k}\sigma_k = 0 \\
c_{j,t} - 6u\sum_{k=0}^{j} c_{j-k}c_k + \sum_{k=0}^{j} c_{j-k}d_{k,x} + \sum_{k=0}^{j+2} c_{j+2-k}d_k + \\
\quad + \sum_{k=0}^{j}\sum_{s=0}^{k} c_{j-k}d_{k-s}\sigma_s + \delta_{j,0} = 0 \\
d_{j,k} - 6u\sum_{k=0}^{j} d_{j-k}c_k + \sum_{k=0}^{j} d_{j-k}d_{k,x} + \sum_{k=0}^{j+2} d_{j+2-k}d_k + \\
\quad + \sum_{k=0}^{j}\sum_{s=0}^{k} d_{j-k}d_{k-s}\sigma_s + b_j = 0,
\end{cases}
\qquad /8/
$$

де $j \in Z_+$. Розв"язуючи послідовність рівнянь у /8/, знаходимо:

$$
\begin{array}{lll}
b_0 = -1, & c_0 = 0, & d_0 = 0, \\
& \sigma_0 = 0; & \\
b_1 = 0, & c_1 = -1, & d_1 = 1, \\
& \sigma_1 = 3/2\ ; & \\
b_2 = 3\ , & c_2 = 0, & d_2 = 0, \\
& \sigma_2 = 9/4\, u_x + 3/4\, v_x; & \\
b_3 = 0, & c_3 = 3/2\, u, & d_3 = -9/2\ , \\
& \sigma_3 = 0; &
\end{array}
\qquad /9/
$$

$$b_4 = -3/2\, u_x - 3/2\, v_x - 9u^2,\ c_4 = 3/4\, q + 3/4\, p,\ d_4 = 9/4\, q - 3/4\, p,$$

$$\sigma_4 = -3/4\, u_{xx} - 3/4\, v_{xx} - 9/16\, p^2 + 9/16\, q^2 - 63/8\, uu_x - 9/8\, uv_x - 9/8\, u^3;$$

$$b_5 = 3/2\, q_x + 3/2\, p_x - 9/2\, up,$$

$$c_5 = -3/4\, u_x - 3/4\, v_x - 9/2\, u^2,$$

$$d_5 = 9/4\, u_x - 3/4\, v_x + 9u^2,$$

$$\sigma_5 = 3/4\, p_{xx} + 3/4\, q_{xx} - 9/8\, uq_x - 9/8\, pv_x - 27/8\, (up)_x$$

і т.д. З огляду на зображення /7/ отримуємо, що всі функціонали вигляду

$$\gamma_j = \int_{x_0}^{x_0+l} dx\, \sigma_j[u, v, q, p], \qquad /10/$$

$j \in Z_+$ є для динамічної системи /1/ законами збереження, причому, відповідно до побудови, функціонально незалежними. Обчислимо згідно з /9/, /10/ градієнти

$$grad\,\gamma_j = \left(\frac{\delta\gamma_j}{\delta u}, \frac{\delta\gamma_j}{\delta v}, \frac{\delta\gamma_j}{\delta q}, \frac{\delta\gamma_j}{\delta p}\right)^{\tau} = \sigma'^{*}[u,v,q,p]\cdot 1$$

для функціоналів $\gamma_j \in D(M)$, $j \in Z_+$:

$$grad\,\gamma_0 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\tau},\quad grad\,\gamma_1 = (0,\ 0,\ 0,\ 3/2)^{\tau},$$
$$grad\,\gamma_2 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\tau},\quad grad\,\gamma_3 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\tau},$$
$$grad\,\gamma_4 = (-9/4\,v_x - 27/8\,u^2,\ 0,\ 9/8\,q,\ -9/8\,p)^{\tau}$$

і т.д.

Таким чином, доведено, що для нелінійної інверсної системи Буссінеска /1/ існує нескінченна ієрархія законів збереження, які можна подати у вигляді функціонально незалежних функціоналів $\gamma_j \in D(M)$, $j \in Z_+$.

1. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н., Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы. К., 1987. 296 с. 2. Самойленко В.Г., Притула Н.Н., Суяров У.С. Анализ полной интегрируемости инверсного уравнения Кортевега-де Фриза. К., 1989. 27 с. /Препр. /АН УССР, Ин-т математики; 89.71/.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.95

УДК 517.9

М.М.Притула, А.К.Прикарпатський

СТРУКТУРА СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ІНВАРІАНТНИХ ПІДМНОГОВИДІВ ПАРАМЕТРИЧНО ІНТЕГРОВНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Нехай на топологічному функціональному джет-многовиді $M \simeq J^{(\infty)}_{top}(R^n; R^m)$ задана нелінійна динамічна система

$$u_t = K[u], \qquad /1/$$

де $K : M \to T/M/$ - гладке за Фреше векторне поле на M, $t \in R_+$ - еволюційний параметр, $m, n \in Z_+$. Якщо векторне поле $K : M \to T/M/$ однорідне і допускає невироджену імплектичну структуру θ : $T^*/M/ \to T/M/$, що задовольняє умову Картана-Нетер [1,3], $L_K\theta = 0$ / L_K - похідна Лі вздовж векторного поля $K : M \to T/M/$/,