$$grad\, \gamma_j = \left(\frac{\delta\gamma_j}{\delta u}, \frac{\delta\gamma_j}{\delta v}, \frac{\delta\gamma_j}{\delta q}, \frac{\delta\gamma_j}{\delta p}, \right)^{\tau} = \sigma'^{*}[u,v,q,p]\cdot 1$$

для функціоналів $\gamma_j \in D(M)$, $j \in Z_+$:

$$grad\, \gamma_0 = /0,\ 0,\ 0,\ 0/^{\tau}, \quad grad\, \gamma_1 = /0,\ 0,\ 0,\ 3/2/^{\tau},$$

$$grad\, \gamma_2 = /0,\ 0,\ 0,\ 0/^{\tau}, \quad grad\, \gamma_3 = /0,\ 0,\ 0,\ 0/^{\tau},$$

$$grad\, \gamma_4 = /-9/4\, v_x - 27/8\, u^2;\ 0,\ 9/8\, q,\ -9/8\, p/^{\tau}$$

і т.д.

Таким чином, доведено, що для нелінійної інверсної системи Буссінеска /1/ існує нескінченна ієрархія законів збереження, які можна подати у вигляді функціонально незалежних функціоналів $\gamma_j \in D(M)$, $j \in Z_+$.

1. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н., Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы. К., 1987. 296 с. 2. Самойленко В.Г., Притула Н.Н., Суяров У.С. Анализ полной интегрируемости инверсного уравнения Кортевега-де Фриза. К., 1989. 27 с. /Препр. /АН УССР, Ин-т математики; 89.71/.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.95

УДК 517.9

М.М.Притула, А.К.Прикарпатський

СТРУКТУРА СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ІНВАРІАНТНИХ ПІДМНОГОВИДІВ ПАРАМЕТРИЧНО ІНТЕГРОВНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Нехай на топологічному функціональному джет-многовиді $M \simeq J^{(\infty)}_{top}(R^n; R^m)$ задана нелінійна динамічна система

$$u_t = K[u], \qquad /1/$$

де $K: M \to T/M/$ - гладке за Фреше векторне поле на M, $t \in R_+$ - еволюційний параметр, $m, n \in Z_+$. Якщо векторне поле $K: M \to T/M/$ однорідне і допускає невироджену імплектичну структуру θ: $T^*/M/ \to T/M/$, що задовольняє умову Картана-Нетер [1,3], $L_K \theta = 0$ / L_K - похідна Лі вздовж векторного поля $K: M \to T/M/$/, то динамічна система $u_t = K[u]$ буде гамільтоновою на фазовому просторі М. Нехай тепер $\gamma \in D(M)$ – гладкий за Фреше функціонал на многовиді М. Якщо $\phi = grad\,\gamma \in T^*(M)$ задовольняє рівняння типу Лакса $L_K\phi = 0$ або рівносильне йому

$$\phi_t + K'^*\phi = 0, \qquad /2/$$

де K'^* – спряження похідної Фреше К' : Т/М/ → Т/М/ щодо стандартної білінійної форми на Т*/М/ х Т/М/, то функціонал $\gamma \in D(M)$ – закон збереження для динамічної системи /1/.

З рівняння /2/ випливає [1,4] існування спеціального асимптотичного розв"язку:

$$\phi(x,t;\lambda) \simeq (1, a(x,t;\lambda))^T exp[\omega(x,t;\lambda) + \partial^{-1}\sigma(x,t;\lambda)], \qquad /3/$$

де $\omega(x,t;\lambda) \in R^{m-1}$, $\sigma(x,t;\lambda) \in R$, $\omega(x,t;\lambda)$ – дисперсійна функція; T – знак транспонування; $m \in Z_+$; $\lambda \in C$ – комплексний параметр і при $|\lambda| \to \infty$ виконується

$$a(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j \in Z_+} a_j[x,t;u]\lambda^{-j+s(a)},$$

$$\sigma(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j \in Z_+} \sigma_j[x,t;u]\lambda^{-j+s(\sigma)},$$

де $S(a)$, $s(\sigma) \in Z_+$ – деякі невід"ємні цілі числа; ∂^{-1} – оператор "оберненого" диференціювання; $d/dx \cdot \partial^{-1} = 1$ для всіх $x \in R$.

Щоб знайти явну формулу /3/ у випадку, коли асоційоване зображення типу Лакса [1,2,4] залежить параметрично від спектрального параметра $\tilde{\lambda} \in C$, що задовольняє неізоспектральну умову

$$d\tilde{\lambda}/dt = g(t;\tilde{\lambda}), \quad \tilde{\lambda}|_{t=0} = \lambda(\tau;\lambda) \in C, \qquad /4/$$

для деякої мероморфної функції $g(t;.): C \to C$, $t \in R_+$, потрібно проаналізувати асимптотичні розв"язки рівняння Лакса /2/. Для цього вивчимо докладніше випадок, коли розв"язок $\phi \in T^*(M)$ у /2/ зображений як функціонал $trace$-класу відповідної спектральної задачі типу Лакса в момент $\tau = t \in R_+$ зі спектральним параметром $\tilde{\lambda} \in C$, що задовольняє умову /4/. Тобто еволюція динамічної системи /1/ відбувається в час $\tau \in R$, що визначається умовою

$$du/d\tau = K[x,\tau;u], \qquad /5/$$

$u|_{\tau=0} = \bar{u} \in M$ – деякі дані Коші в М. Це означає, що функціонал

$$\tilde{\Phi}(x,\tau;\tilde{\lambda}) := grad\, Sp\, S(x,\tau;\tilde{\lambda}), \quad \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t;\lambda) \in C, \qquad /6/$$

де $S(x,\tau;\tilde{\lambda})$ – матриця монодромії деякої лінійної спектральної задачі для /I/, повинен задовольняти відповідне рівняння Лакса в точці $u \in M$ стосовно /5/, тобто

$$d\tilde{\phi}/d\tau + K'^{*}[u]\tilde{\phi} = 0 \qquad /7/$$

для всіх $\tau \in R_+$. За наведених вище припущень очевидно, що спектральний параметр $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t;\lambda(\tau;\lambda))$, де

$$d\tilde{\lambda}/dt = g(t;\tilde{\lambda}), \qquad \tilde{\lambda}|_{t=0} = \lambda(\tau;\lambda) \in C, \qquad /8/$$

і дані Коші є відповідними даними для параметра $\lambda(\tau;\lambda) \in C$, тобто є спектральною величиною асоційованої спектральної задачі Лакса в момент $\tau \in R_+$.

Сформулюємо таку лему.

__Лема__. Рівняння Лакса /7/ з параметром $\tau \to t \in R_+$ допускає асимптотичний розв"язок

$$\tilde{\phi}(x,t;\tilde{\lambda}) \simeq (1, \tilde{a}(x,t;\tilde{\lambda}))^{\tau} \exp[\tilde{\omega}(x,t;\tilde{\lambda}) + \partial^{-1}\tilde{\sigma}(x,t;\tilde{\lambda})], \qquad /9/$$

де $\tilde{a}(x,t;\lambda) \in R^{m-1}$, $\tilde{\sigma}(x,t;\tilde{\lambda}) \in R$ – деякі локальні функціонали на M; $\tilde{\omega}(x,t;\tilde{\lambda}) \in R$ – деякі дискретні функції для всіх $x \in R$ $\tau \in R_+$, і якщо при $|\lambda| \to \infty$ випливає $|\tilde{\lambda}| \to \infty$ і $\tau \to t \in R_+$, то справедливі формули

$$\tilde{a}(x,t;\tilde{\lambda}) \simeq \sum_{j \in Z_+} \tilde{a}_j[x,t;u]\tilde{\lambda}^{-j+s(\tilde{a})},$$
$$\tilde{\sigma}(x,t;\tilde{\lambda}) \simeq \sum_{j \in Z_+} \tilde{\sigma}_j[x,t;u]\tilde{\lambda}^{-j+s(\tilde{\sigma})}, \qquad /10/$$

де $s(\tilde{a}), s(\tilde{\sigma}) \in Z_+$ – деякі цілі числа.

__Доведення__. Згідно з теорією асимптотичного розвинення для довільних диференціально-спектральних задач /I/ умова /8/ забезпечує існування зображення /6/, і спектральний параметр $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t;\lambda(\tau;\lambda))$ не залежить ефективно від часу $\tau \to t \in R_+$, коли він задовольняє /8/. Проте випадок, розглянутий вище, є результатом інтегровності за Лаксом динамічної системи /5/. Справді, внаслідок вище згаданої інтегровності /6/ спектральний параметр $\tilde{\lambda} \in C$ задовольняє /8/, і в момент $\tau \to t \in R_+$ дані Коші $\tilde{\lambda}|_{t=0} = \lambda \in C$ не залежать більше від параметра $\tau \in R_+$, що задовольняє умову $\tau \to t \in R_+$, $\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tau} \to 0$. Останнє доводить лему.

Справедлива така теорема.

__Теорема__. Параметрично інтегровна за Лаксом ізоспектральна динамічна система /5/ при $\tau \to t \in R_+$ допускає нескінченну ієрархію, загалом з неоднорідними змінними $x \in R$, $t \in R_+$, законів збереження, які можна подати у точній формі з огляду на асимптотичні розвинення /9/, /10/.

Доведення. Справді внаслідок розвинень /9/, /10/ можна твердити, що функціонал

$$\tilde{\gamma}(t;\lambda(\tau,\lambda)) = \int_R dx\,\tilde{\sigma}(x,\tau;\tilde{\lambda}(\tau;\lambda)) \qquad /11/$$

не залежить від параметра $\tau \in R_+$ тобто

$$d\tilde{\gamma}/d\tau = 0 \qquad /12/$$

для всіх $\tau,\ t \in R_+$. Приймаючи, що параметр $\tau \in R_+$ прямує до $t \in R_+$, згідно з /6/ одержуємо, що $\tilde{\phi}(x,\tau;\tilde{\lambda})|_{\tau\to t\in R_+} \to \phi(x,t;\lambda)$ для всіх $x \in R,\ t \in R_+,\ \lambda \in C$. Це означає, що локальний функціонал $\phi(x,t;\lambda) \in T^*(M)$ задовольняє рівняння /1/ в кожній точці $u \in M$. Як очевидний результат, справедливе

$$\tilde{\omega}(x,\tau;\tilde{\lambda})|_{\tau\to t\in R_+} \to \omega(x,t;\lambda)$$

$$\tilde{\sigma}(x,\tau;\tilde{\lambda})|_{\tau\to t\in R_+} \to \sigma(x,t;\lambda)$$

для всіх $\lambda \in C$. Відомо, що функціонал

$$\gamma(\lambda) := \tilde{\gamma}(t;\lambda(\tau;\lambda))|_{\tau\to t\in R_+} = \int_R dx\,\sigma(x,t;\lambda) \in D(M)$$

не залежить від еволюційного параметра $\tau \in R_+$, і згідно з рівнянням /7/ він є законом збереження для нелінійної динамічної системи /1/

$$d\gamma(t;\lambda)/dt = 0 \qquad /13/$$

для всіх $t \in R_+,\ \lambda \in C$. Отже, маємо можливість використовувати рівняння /13/ разом з /8/ для знаходження точної форми асимптотичного розвинення /10/. Для цього підставимо асимптотичне розширення /9/ у визначальне рівняння /7/, враховуючи асимптотичні розвинення /10/ при $\tau \to t \in R_+$. При цьому потрібно взяти до уваги те, що для всіх $\tau \to t \in R_+,\ d\tilde{\lambda}/d\tau \to 0$ і при $|\lambda| \to \infty$ випливає, що $|\tilde{\lambda}| \to \infty$. Розв"язуючи крок за кроком внаслідок рекурентне співвідношення для коефіцієнтів в /10/, одержуємо функціонал $\gamma(\lambda) := \tilde{\gamma}(t;\lambda(\tau;\lambda))|_{\tau\to t\in R_+},\ \lambda \in C$, у формі, придатній для використання рівняння /13/. На наступному кроці потрібно використати диференціальне рівняння /8/ для задоволення критерію рівняння /13/, яке задовольняється початково для всіх $t \in R_+$.

$$\frac{d\gamma(\lambda)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{j\in Z_+}\int_R dx\,\tilde{\sigma}_j(x,t;u)\,\tilde{\lambda}^{-j+s(\theta)} =$$

$$=\sum_{j\in Z_+}\int_R dx\,[((d\tilde\sigma[x,t;u]/dt)\tilde\lambda^{-j+s(\tilde\sigma)}+$$

$$+\tilde\sigma_j[x,\tau;u]\tilde\lambda^{-j+s(\tilde\sigma)-1}(s(\tilde\sigma)-j)d\tilde\lambda/dt]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{j\in Z_+}[d\tilde\sigma/dt+\sum_{k\gg-\infty}(s(\tilde\sigma)-k)\tilde\sigma_k g_{j-k-1}(t)]\,\tilde\lambda^{-j+s(\tilde\sigma)}=0\,, \qquad /14/$$

де за означенням $g(t;\tilde\lambda):=\sum_{k\gg-\infty}g_k(t)\tilde\lambda^{-k}$ для всіх $t\in R_+$, $|\lambda|\to\infty$. Оскільки спектральний параметр $\tilde\lambda=\tilde\lambda(t;\lambda)$ у момент $t=0$ збігається з довільною комплексною величиною $\lambda\in C$, умова $|\lambda|\to\infty$ разом із /14/ у момент $t=0$ дає змогу визначити таке співвідношення:

$$d\tilde\sigma_j/dt+\tilde\sigma_j' K[t;u]+\sum_{k\gg-\infty}(s(\tilde\sigma)-k)\tilde\sigma_k g_{j-k-1}(t)\equiv 0:mod\left(\frac{d}{dx}\right) \qquad /15/$$

для всіх $j\in Z_+$, $x\in R$, $t\in R_+$, $u\in M$.

Розв"язуючи алгебричне співвідношення /15/ для наперед невідомих функцій $g_k(t)$, $k\gg-\infty$, $t\in R_+$, одержуємо породжувальний функціонал $\gamma(\lambda)$, $\lambda\in C$ законів збереження для /1/ у точній формі. Цим завершуємо конструктивну частину доведення теореми, сформульованої вище.

Для практичного використання описаного вище алгоритму потрібно розв"язати диференціальне рівняння /8/ у момент $\tau\to t\in R$ в точній, можливо асимптотичній, формі для дисперсійної функції $\omega(x,t;\lambda)$ і локального узагальненого функціоналу $\sigma(x,t;\lambda)$, виходячи з умови /12/ для всіх $x\in R$, $t\in R_+$, $|\lambda|\to\infty$.

На основі даного повідомлення, використовуючи загальну схему градієнтно-голономного алгоритму, можна знайти в точній формі шукане зображення типу Лакса. У такий спосіб розв"язується досить складна пряма задача теорії інтегровності нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах.

Опираючись на отриманий породжувальний функціонал $\gamma(\lambda)\in D(M)$, $\lambda\in C$ та заданої у вигляді нескінченної ієрархії законів збереження динамічної системи /1/ на многовиді M можна побудувати наближено загальний функціонал Лагранжа $L_N\in D(M)$ вигляду

$$L_N=-\gamma_{N+1}+\sum_{j=0}^{N}c_j\gamma_j\,, \qquad /16/$$

де за означенням $\gamma(\lambda)=\int_R dx\,\sigma(x,t;\lambda)$ і при $|\lambda|\to\infty$

$$\gamma_j = \int_R dx\, \sigma_j[x,t;\lambda],\ j \in Z_+,\ c_j \in R,$$

$j = \overline{0,N}$ -деякі довільні константи; $N \in Z_+$ – довільне невід"ємне ціле число. Якщо диференціальний порядок функціоналу $\gamma_{N+1} \in \in D(M)$ найвищий з порядків функціоналів $\gamma_j \in D(M)$, $j = \overline{0,N}$ і додатково лагранжіан невироджений, тобто $det(Hess\, \gamma_{N+1}) \neq 0$, можна скориставшись вище наведеною схемою, довести, що критичний підмноговид $M_N = \{u \in M : grad\, L_N = 0\}$ є скінченновимірним симплектичним многовидом, вкладеним у стандартний джет-многовид $J^{(\infty)}(R; R^m)$ з канонічною симплектичною структурою, що відповідає векторному полю d/dx, $x \in R$, яке є гамільтоновим потоком на підмноговиді M_N.

I. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н., Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы. К.: Наук. думка, 1987. 296 с. 2. Митропольський Ю.О., Прикарпатський А.К., Філь Б.М. Деякі аспекти градієнтно-голономного алгоритму в теорії інтегрованості нелінійних динамічних систем та проблеми комп"ютерної алгебри // Укр. мат. журн. 1991. Т.43. № I. С.78-91. 3. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 678 с. 4. Прикарпатский А.К., Микитюк И.В. Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. К.: Наук. думка, 1990. 288 с. 5. Прикарпатський А.К., Філь Б.М. Категорія топологічних джет-многовидів та деякі застосування в теорії нелінійних нескінченновимірних динамічних систем // Укр. мат. журн. 1992. Т.44. № 9. С. 1242-1256.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.95