УДК 519.6:517.925

Г.А.Шинкаренко

ДО ОДНОКРОКОВИХ СХЕМ ІНТЕГРУВАННЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ
І. ПОБУДОВА СХЕМ ТА АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ

За допомогою інтерполяційних поліномів Ерміта можна оперувати вузловими значеннями похідних інтерпольованої функції, що, зокрема, дає змогу задовольняти деякі обмеження диференціального характеру у вузлах розрахункової сітки. Скажімо, якщо йдеться про використання кусково-визначених поліномів Ерміта для апроксимації розв"язків початково-крайових задач, то такими обмеженнями можуть бути змішані крайові умови взаємодії із зовнішнім середовищем, умова нестисливості тощо. У праці автора /2/ кусково-квадратичні апроксимації Ерміта вжиті для задоволення початкової умови на швидкість зміни шуканого розв"язку задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Побудована на цій основі однокрокова рекурентна схема дає змогу виконувати ефективне інтегрування зі змінним кроком.

У даній праці згадана особливість кусково-квадратичних апроксимацій Ерміта використовується для побудови однокрокової схеми початково-крайової задачі з параболічними рівняннями з метою задоволення відповідного еволюційного варіаційного рівняння у стартовому вузлі кожного кроку інтегрування в часі.

1. Постановка задачі.

У даній праці пропонується однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі для такої варіаційної задачі:

$$\begin{cases} \text{задано } u_0 \in V,\ f \in L^2(0,T;H); \\ \text{знайти } u \in L^2(0,T;V) \text{ такий, що} \\ \dfrac{d}{dt} m(u(t),w) + a(u(t),w) = m(f(t),w) \quad t \in (0,T],\ \forall w \in V, \\ m(u(0)-u_0, w) = 0. \end{cases} \qquad /1.1/$$

Тут H і V - гільбертові простори, причому простір V щільно вкладений у простір H. Далі припускатимемо, що симетричні і неперервні

$$\begin{cases} \text{білінійні форми } m(\cdot,\cdot): H \times H \to R \text{ та } a(\cdot,\cdot): V \times V \to R \\ H\text{- та } V\text{- еліптичні відповідно.} \end{cases} \qquad /1.2/$$

Подібні класи варіаційних задач /за менш жорсткої умови на початкове значення u_0/ вивчені у праці [3], звідки й запозичені наведені далі позначення.

Мета цієї праці – використати кусково-квадратичні поліноми Ерміта для побудови уточнених однокрокових схем для задачі /I.I/ і з"ясувати можливість їх ефективного застосування. Зазначимо також, що наведені нижче результати справедливі також для задач Коші зі звичайними диференціальними рівняннями першого порядку.

2. <u>Кусково-квадратичні апроксимації</u>. Проміжок інтегрування /0,T/ розіб"ємо на N рівних /хоча це не обов"язково/ частин $[t_j, t_{j+1}]$, $j=0,\dots,N-1$ і приймемо $\Delta t := t_{j+1}-t_j$.

На кожному з таких проміжків розв"язок $u(t)$ задачі /I.I/ апроксимуватимемо квадратичним поліномом Ерміта:

$$\begin{cases} u(t)\cong u_{\Delta t}(t) := \{1-\xi^2(t)\}u^j+\xi^2(t)u^{j+1}+ \\ \qquad\qquad +\Delta t\,\xi(t)\{1-\xi(t)\}v^j \text{ на } [t_j,t_{j+1}], \\ \xi(t) := \dfrac{1}{\Delta t}(t-t_j). \end{cases} \qquad /2.I/$$

Відповідно до цього для апроксимації функції $f(t)$ скористаємось кусково-лінійним поліномом:

$$f_{\Delta t}(t) := \{1-\xi(t)\}f^j+\xi(t)f^{j+1} \text{ на } [t_j,t_{j+1}], \qquad /2.2/$$

де $f^m := f(t_m)\in H$.

Відзначимо, що приймаючи позначення

$$v^{j+1} := \frac{\partial}{\partial t}u_{\Delta t}(t_{j+1}), \qquad /2.3/$$

приходимо до співвідношень

$$\begin{cases} u_{\Delta t}(t)=u^j+[\Delta t\,\xi(t)]v^j+\frac{1}{2}[\Delta t\,\xi(t)]^2\dot{v}^{j+1/2}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}u_{\Delta t}(t)=v^j+[\Delta t\,\xi(t)]\dot{v}^{j+1/2} \quad \text{на } [t_j,t_{j+1}], \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u_{\Delta t}(t)=\dot{v}^{j+1/2}. \end{cases} \qquad /2.4/$$

Тут і далі використовуються такі позначення:

$$\begin{cases} \omega^{j+1/2} := \frac{1}{2}(\omega^{j+1}+\omega^j), \quad \dot{\omega}^{j+1/2} := \frac{1}{\Delta t}(\omega^{j+1}-\omega^j), \\ \omega^{j+\alpha} := (1-\alpha)\omega^j+\alpha\omega^{j+1}, \quad \alpha\in[0,1]. \end{cases} \qquad /2.5/$$

<u>Зауваження 2.I.</u> Апроксимації вигляду /2.I/ використані [2] для побудови однокрокових схем інтегрування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а також у різних задачах теорії пружності [4].

3. Проекційне рівняння. Оберемо функцію $\eta \in L^2((t_j, t_{j+1}))$ таку, що $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \eta\, dt = 1$. Підставимо апроксимації /2.1/, /2.2/ у рівняння задачі /1.1/ і вимагатимемо, щоб нев"язка такої підстановки була ортогональна до функції $\eta(t)$ у сенсі скалярного добутку із $L^2((t_j, t_{j+1}))$. У результаті прийдемо до такого проекційного рівняння:

$$m(v^j + \Delta t \gamma \dot{v}^{j+1/2}, w) + \Delta t a(\gamma v^j + \tfrac{1}{2}\Delta t \beta \dot{v}^{j+1/2}, w) =$$
$$= m(f^j + \gamma \Delta t \dot{f}^{j+1/2}, w) - a(u^j, w) \quad \forall w \in V,\ j = 0, 1, \dots \qquad /3.1/$$

Тут

$$\gamma := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi \eta\, dt, \quad \beta := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi^2 \eta\, dt. \qquad /3.2/$$

З огляду на позначення /2.5/ рівняння /3.1/ можна подати у вигляді

$$m(v^{j+\gamma}, w) + \Delta t a(\gamma v^{j+\gamma} + \tfrac{1}{2}\Delta t(\beta - 2\gamma^2)\dot{v}^{j+1/2}, w) =$$
$$= \gamma \Delta t m(\dot{f}^{j+1/2}, w) + m(v^j, w) \quad \forall w \in V,\ j = 0, 1, \dots . \qquad /3.3/$$

Зазначимо, що вибір

$$\beta := 2\gamma^2 \qquad /3.4/$$

анулює у проекційному рівнянні доданки вищого порядку мализни.

Нарешті, зауважимо, що вибір $\gamma = \beta = 0$ приводить до рівняння

$$m(v^j, w) = m(f^j, w) - f(u^j, w) \quad \forall w \in V, \qquad /3.5/$$

яке описує стан досліджуваної системи у стартовий момент часу $t = t_j$. Тому обчислення слід провадити із значенням параметрів

$$\gamma > 0, \quad \beta > 0. \qquad /3.6/$$

4. Однокрокова рекурентна схема. Здійснений аналіз дає змогу, зокрема, запропонувати наступну схему інтегрування задачі /1.1/:

$$\begin{cases} \text{задана пара } \psi^0 = (u^0, v^0) \in V^2 \text{ і параметри } \Delta t, \gamma > 0; \\ \text{знайти пару } \psi^{j+1} = (u^{j+1}, v^{j+1}) \text{ таку, що} \\ m(v^{j+\gamma}, w) + \gamma \Delta t a(v^{j+\gamma}, w) = m(v^j + \gamma \Delta t \dot{f}^{j+1/2}, w)\ \forall w \in V, \\ u^{j+1} := u^j + \Delta t v^j + \tfrac{1}{2}\gamma^{-1}\Delta t (v^{j+\gamma} - v^j) \qquad j = 0, 1, \dots, \\ m(v^{j+1}, w) = m(f^{j+1}, w) - a(u^{j+1}, w). \end{cases} \qquad /4.1/$$

З огляду на лему Лакса-Мільграма варіаційні рівняння схеми /4.1/ однозначно розв"язуються стосовно $v^{j+\gamma}$ та v^{j+1} відповідно. Більше цього, якщо їх розв"язок відшуковується методом скінченних елементів з діагональною матрицею мас, то за допомогою поданих вище рівнянь можна здійснити досить ефективну чисельну реалізацію схеми /4.1/ [3, с. 52-56].

5. Стійкість рекурентної схеми. Введемо норми

$$|u| := m^{1/2}(u,u), \quad \|u\| := a^{1/2}(u,u) \quad \forall u \in V.$$

Приймаючи в проекційному рівнянні /3.I/ $w = \dot{u}^{j+1/2} = v^{j+1/2}$, одержуємо енергетичне рівняння

$$\frac{1}{2\Delta t}\left\{\|u^{j+1}\|^2 - \|u^j\|^2\right\} + |v^{j+1/2}|^2 + \frac{1}{2}(\gamma - \frac{1}{2})\left\{|v^{j+1}|^2 - |v^j|^2\right\} +$$
$$+\Delta t\left\{(\gamma - \frac{1}{2})\|v^{j+1/2}\|^2 + (\beta - \gamma)\left[\|v^{j+1}\|^2 - \|v^j\|^2\right]\right\} = \qquad /5.I/$$
$$= m(f^{j+\gamma}, v^{j+1/2}) \qquad j = 0,1,\ldots .$$

З огляду на відомі оцінки для правої частини /5.I/ і початкової умови задачі /I.I/ приходимо до нерівності

$$\|u^{m+1}\|^2 + \Delta t\left\{(\gamma - \frac{1}{2})|v^{m+1}|^2 + 2\Delta t(\beta - \gamma)\|v^{m+1}\|^2\right\} +$$
$$+\Delta t\sum_{j=1}^{m}\left\{|v^{j+1/2}|^2 + 2\Delta t(\gamma - \frac{1}{2})\|v^{j+1/2}\|^2\right\} \qquad /5.2/$$
$$\leq \|u^0\|^2 + \Delta t\left\{(\gamma - \frac{1}{2})|v^0|^2 + 2\Delta t(\beta - \frac{1}{2})\|v^0\|^2\right\} + \Delta t\sum_{j=1}^{m}|f^{j+\gamma}| \quad m = 0,1,\ldots .$$

Аналіз апріорної оцінки /5.2/ показує, що однокрокова рекурентна схема

/*i*/ безумовно /щодо вибору кроку Δt/ стійка, якщо її параметри β і γ дібрані так, що

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq \beta \ ; \qquad /5.3/$$

/*ii*/ стійка при $\gamma <$ I/2, якщо її крок Δt обраний з умови

$$\frac{1}{4}\ \frac{1-2\gamma}{a_0(\beta - \gamma)} \leq \Delta t \leq \frac{1}{a_0(1-2\gamma)}, \qquad /5.4/$$

де $a_0 = const > 0$ така, що $\|u\|^2 \geq a_0|u|^2 \quad \forall u \in V$.

6. Альтернативна побудова однокрокової схеми. Запропонована тут схема інтегрування варіаційної задачі /I.I/ використовує лінійну зміну похідної за часом наближеного розв"язку на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$.

Якщо для невідомої $v(t) = \frac{\partial}{\partial t}u(t)$ використати апроксимацію

$$v_{\Delta t}(t) := \left\{1 - \xi(t)\right\}v^j + \xi(t)v^{j+1} \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}] \qquad /6.I/$$

I, скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, прийняти

$$u_{\Delta t}(t) := u^j + \int_{t_j}^{t} v_{\Delta t}(\tau)\,d\tau = \qquad /6.2/$$

$$= u^j + \left\{\Delta t\,\xi(t)\right\} v^j + \frac{1}{2}\left\{\Delta t\,\xi(t)\right\}^2 \dot{v}^{\,j+1/2} \quad \text{на} \quad [\,t_j, t_{j+1}\,],$$

то, як неважко переконатись, знову можна одержати проекційне рівняння /3.I/.

7. Зауваження і висновки. З різними можливостями проекційно-сіткових схем можна ознайомитись у працях [1,3,5]. У цій праці побудована однокрокова схема інтегрування в часі еволюційних варіаційних задач, які виникають у теорії параболічних рівнянь. Запропонована схема грунтується на кусково-квадратичних апроксимаціях Ерміта, що дає змогу враховувати стан системи у стартовий момент часу на кожному кроці інтегрування в часі. У цьому зв"язку перше із рівнянь схеми /4.I/ можна розглядати як прогнозування швидкості зміни розв"язку на проміжку $[\,t_j, t_{j+1}\,]$, а останнє – як корекцію цієї зміни з урахуванням знайденого розв"язку в момент часу t_{j+1}.

Здійснений також енергетичний аналіз схеми, який дав змогу визначити достатні умови її стійкості.

I. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с. 2. Шинкаренко Г.А. Про одну модифікацію схеми Ньюмарка // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. С. 46-52. 3. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв"язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991. 88 с. 4. Шинкаренко Г.А. Чисельне моделювання динаміки взаємодії фізико-механічних полів: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. К., 1993. 34 с. 5. Hughes T.J.R. The finite element method: Linear static and dynamic finite element analisis // Englwood Chiffs. New Jersey: Prentice Hall. 1987. 803 p.

Стаття надійшла до редколегії 03.03.95