УДК 534.111

А.Ф.Барвінський, І.М.Дудзяний, Х.Т.Дрогомирецька

ВЛАСНІ СУТТЄВО НЕЛІНІЙНІ ПОЗДОВЖНІ КОЛИВАННЯ СТЕРЖНЯ

Зіставлення лінійної залежності між напруженнями та деформаціями з реальною поведінкою матеріалу механічних систем під час коливань показує, що ця залежність властива для малих деформацій. Розглядаючи великі деформації /для деяких матеріалів таке співвідношення справедливе також за малих деформацій/ спостерігається значне відхилення від лінійної залежності. У зв"язку з цим для точнішого опису кривої залежності між напруженнями та деформаціями можна застосувати степеневий закон типу

$$\sigma = E_n(\varepsilon_n)^{n+1}, \qquad /1/$$

де σ – напруження; ε_n – деформація; E_n, n – сталі, що визначаються експериментально.

Розглянемо, наприклад, задачу про коливання стержня довжини l сталого поперечного перерізу F_0. Сумістимо вісь OX з поздовжньою віссю стержня та позначимо через $u(x,t)$ зміщення поперечного перерізу в напрямі осі OX у точці з абсцисою x у момент часу t. Вважатимемо, що стержень виготовлений з ідеально пружного матеріалу, який підлягає суттєво нелінійному закону пружності /1/ та врахуємо зовнішнє згасання, пропорційне першій степені швидкості.

Диференціальне рівняння, що описує цей коливний процес, запишемо

$$(n+1)E_n\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha_0\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad /2/$$

де ρ – маса одиниці довжини стержня; α_0 – коефіцієнт, який характеризує зовнішнє згасання.

Вважаючи, що кінці стержня вільні, розглядаємо крайові умови:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=l} = 0.$$

Побудуємо в першому наближенні асимптотичний розв"язок сформульованої крайової задачі.

Виходячи з асимптотичних методів нелінійної механіки /1/, перше наближення одночастотного розв"язку рівняння /2/ подаємо у вигляді

$$u_k(x,t) = u_0(x,t) + \varepsilon u_{1k}(x,a,\varphi_k) + \varepsilon^2 \ldots$$

де $u_0(x,t)$ – розв"язок незбуреного $\left(2\alpha_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \right)$ рівняння /2/, який виражається формулою

$$u_0(x,t) = a\,X(x)\,T(\varphi),$$

в якій

$$X(x) = ca\left[1, \frac{1}{n+1}, \Pi k \frac{x}{l}\right], \quad T(\varphi) = ca\left[n+1, 1, \varphi\right],$$

$$\Pi = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}{\Gamma\left(1/2 + \frac{n+1}{n+2}\right)},$$

де ca – позначення $Ateb$ – функції [3]; амплітуда a і повна фаза φ визначаються диференціальними рівняннями

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \nu(a),$$

де

$$\nu(a) = \left[\alpha_0 a^n \left(\Pi \frac{k}{l}\right)^{n+2}\right]^{1/2} \quad (k = 1, 2 \ldots).$$

Отже, в незбуреній системі можливі незгасаючі одночастотні коливання в k-формах динамічної рівноваги. Розглядаючи збурену крайову задачу, дослідимо коливання, близькі до коливань у k-й формі динамічної рівноваги незбуреної системи.

Перше наближення асимптотичного розв"язку, згідно з [2], записуємо

$$u_1(x,t) = a\; ca\left[1, \frac{1}{n+1}, \Pi k \frac{x}{l}\right] ca\left[n+1, 1, \varphi\right], \qquad /3/$$

в якому амплітуда a та фаза φ пов"язані залежностями

$$\frac{da}{dt} = -\frac{4\delta}{n+4}\,a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \nu(a). \qquad /4/$$

Інтегруючи перше з рівнянь /4/ при початкових значеннях $t = 0$, $a = a_0$, отримуємо

$$a(t) = a_0 e^{-\vartheta t}, \qquad /5/$$

де $\vartheta = \frac{4\delta}{n+4}$.

Розв"язуючи друге диференціальне рівняння системи /4/, знаходимо

$$\varphi(t)=\varphi_0+\frac{2}{n\vartheta}\left[\alpha_0 a_0^n\left(\Pi\frac{k}{l}\right)^{n+2}\right]^{1/2}\left(1-e^{-\frac{\vartheta n t}{2}}\right), \qquad /6/$$

де φ_0 - початкове значення фази.

Таким чином, отримано явні вирази для представлення коливного процесу у першому наближенні.

Вважаючи у /3/ $n=0$, отримуємо перше наближення асимптотичного розв"язку класичної задачі про поздовжні коливання стержня, матеріал якого підлягає лінійному закону пружності:

$$u_1(x,t)=a\cos\pi k\frac{x}{l}\cos\varphi, \qquad /7/$$

$$a=a_0 e^{-\delta t}, \varphi=\varphi_0+\alpha_0\pi\frac{k}{l}t. \qquad /8/$$

Порівняння лінійного /7/-/8/ та нелінійного /4/-/6/ розв"язків показує, що між ними є як кількісні, так і якісні відмінності. Зокрема, слід зауважити, що частота нелінійних поздовжних коливань залежить від початкової амплітуди.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний: 2-е изд. М., 1958. 2. Митропольський Ю.О., Мосеєнков Б.І. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами /Асимптотичні методи/. К., 1961. 3. Сеник П.М., Возний А.М. Про табулювання періодичних Ateb-функцій // ДАН УРСР. 1969. № 12. С. 1089-1092.

Стаття надійшла до редколегії 24.02.95