УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Нелокальні задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних різних типів останнім часом інтенсивно вивчаються. Вони часто виникають у прикладних задачах. З іншого боку, безсумнівною є теоретична важливість таких задач.

Природним є вивчення таких задач також для сингулярно збурених рівнянь. При побудові асимптотики розв"язку таких задач плідною є ідея побудови асимптотики розв"язку складної /нелокальної/ сингулярно збуреної на основі асимптотики розв"язку простішої сингулярно збуреної задачі. Для звичайних диференціальних рівнянь ця ідея вперше реалізована у праці [1], для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних – у праці [6] /див. також [3], [8], [9]/.

У даній роботі в області $D=\{(x,t): 0\le x\le l, 0\le t\le T\}$ отримані асимптотичні розвинення розв"язку задачі

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,t)u=f(x,t); \qquad /1/$$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0; \qquad /2/$$

$$u(x,0)+\beta\cdot u(x,T)=0, \qquad /3/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t), f(x,t)$ – достатньо гладкі у D функції;

2/ $a(x,t)>0$ у D, $|\beta|\le 1$.

Перш ніж будувати асимптотику розв"язку задачі /1/–/3/ побудуємо асимптотику розв"язку допоміжної локальної задачі, тобто задачі розв"язку рівняння /1/ з крайовими умовами /2/ і з початковою умовою

$$u(x,0,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i z_i(x) \qquad /4/$$

замість нелокальної умови /3/, де N – деяке натуральне число;

$z_i(x)\ \ (i=\overline{0,N})$ – на даному етапі розв"язання задачі достатньо гладкі функції, такі що $z_i(0)=z_i(l)=0\ \ (i=\overline{0,N})$.

Розвинення розв"язку допоміжної задачі /1/, /2/, /4/ будуватимемо методом примежового шару [1,2]. Зауважимо, що у випадку β = 0 асимптотичне розвинення задачі отримане у праці [4].

Асимптотичне розвинення шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /5/$$

де $\tau=t/\varepsilon$.

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у співвідношення /5/. Їх визначаємо стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $\bar{u}_i(x,t)\ (i=0,\ldots,N)$ є розв"язками крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь / t входить як параметр/:

$$-\frac{\partial^2\bar{u}_i}{\partial x^2}+a(x,t)\bar{u}_i=f_i(x,t); \qquad /6/$$

$$\bar{u}_i(0,t)=0,\ \bar{u}_i(l,t)=0, \qquad /7/$$

де $f_0(x,t)=0,\ \ f_i(x,t)=-\left(\frac{\partial\bar{u}_{i-1}}{\partial t}-\frac{\partial^3\bar{u}_{i-1}}{\partial x^2\partial t}\right)\ (i=1,\ldots,N)$.
Як бачимо, вони визначаються рекурсивно. Існування та єдиність розв"язку задач /6/, /7/ за наших припущень випливає з праці [5].

Функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)\ \ (i=0,\ldots,N)$ в околі $t=0$ є розв"язками змішаних задач

$$\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}-\frac{\partial^3\Pi_i}{\partial x^3\partial\tau}-\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial x^2}+a(x,0)\Pi_i=g_i(x,\tau)\ \ (i=0,\ldots,N); \qquad /8/$$

$$\Pi_i(0,\tau)=0,\ \Pi_i(l,\tau)=0\ \ (i=0,\ldots,N); \qquad /9/$$

$$\Pi_i(x,0)=z_i(x)-\bar{u}_i(x,0)\ \ (i=0,\ldots,N), \qquad /10/$$

де $g_0(x,\tau)=0,\ g_i(x,\tau)\ \ (i=1,\ldots,N)$ легко виписуються явним чином і лінійно залежать від $\Pi_j(x,\tau)\ (j<i)$.

Після того як знайдені функції $\bar{u}_i(x,t)\ (i=0,\ldots,N)$, функції $\Pi_i(x,\tau)\ \ (i=0,\ldots,N)$ знаходимо рекурентно як розв"язки змішаних задач /8/–/10/. У [7] показано, що функції $\Pi_i(x,\tau)\ (i=0,\ldots,N)$ експоненціально спадають при $\tau\to\infty$, тобто є дійсно функціями примежового шару в околі t =0.

Таким чином, формальне асимптотичне розвинення розв"язку допоміжної задачі /I/, /2/, /4/ побудоване. Далі вважаємо $z_i(x)$ $(i=0,\dots,N)$ невідомими, і головна ідея побудови асимптотики розв"язку вихідної задачі /I/-/3/ полягає в тому, що необхідно підібрати функції $z_i(x)$ $(i=0,\dots,N)$ так, щоб формальне асимптотичне розвинення розв"язку допоміжної задачі /I/, /2/, /4/ було одночасно і формальним асимптотичним розвиненням розв"язку вихідної задачі /I/-/3/.

Підстановка асимптотичного розвинення /5/ розв"язку задачі /I/, /2/, /4/ у нелокальну умову /3/ дає співвідношення для визначення $z_i(x)$ $(i=0,\dots,N)$, а саме

$$z_i(x)=-\beta\bar{u}_i(x,T) \quad (i=0,\dots,N). \qquad /II/$$

Підставляючи отримані вирази /II/ у /I0/, маємо початкові умови для визначення функцій $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$ - функцій примежового шару асимптотичного розвинення вихідної задачі /I/-/3/. Розв"язуючи задачі /8/-/I0/ з уже визначеними початковими умовами, отримуємо функції примежового шару $\Pi_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$. Разом з уже визначеними функціями $\bar{u}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ це дає всі функції, що входять в асимптотичне розвинення /5/ задачі /I/-/3/.

Застосування методу інтегралів енергії [4] до задачі знаходження залишкового члена дає оцінку

$$\| R_N(x,t,\varepsilon)\|_{L_2(D)} \leq C\varepsilon^{N+1}, \qquad /I2/$$

де константа C не залежить від ε.

Таким чином, отримана теорема.

<u>Теорема</u>. Нехай у D виконуються умови 1/, 2/. Тоді розв"язок задачі /I/-/3/ допускає асимптотичне зображення /5/, де $\bar{u}_i(x,t)$ /i=0,...,N / - розв"язки задач /6/, /7/; функції примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$ - розв"язки задач /8/, /9/, /I0/, де $z_i(x)$ /i = 0,...,N /, що входить у /I0/ визначається з /II/; залишковий член допускає оцінку /I2/.

I. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т.I2. № 5. С. 3-I22. 3. Дудзяний І.М., Цимбал В.М. Нелокальна задача для деякого сингулярно збуреного рівняння третього порядку. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1994. Вип. 4I. С.10-15. 4. Курант Р. Уравнение с частными производными. М., 1964.

5. Х а р т м а н Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 6. Ц и м б а л В.Н. Некоторые неклассические сингулярно возмущенные задачи // Методы малого параметра и их применение: Тез. лекций и кратких научн. сообщ. Всесоюз. школы-семинара. Минск, 1982. С. 118. 7. Ц и м б а л В.М. Змішана задача для сингулярно збуреного псевдопараболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 40. С.3-5. 8. Ц и м б а л В. Нелокальна задача для деяких сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних // Нові підходи до розв"язання диференц. рівнянь: Тези доп. Всеукр. наук. конф. м. Дрогобич. Дрогобич, 1994. С. 180. 9. Ц и м б а л В.Н. Нелокальная задача для сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений // Нелинейные задачи математической физики и задачи со свободной границей: Тез. 8-й республ. конф., м.Донецьк. Донецк, 1991. С. 121.

Стаття надійшла до редколегії 24.02.95

УДК 681.3.06

М.О.Дзіковська, О.В.Костів

ЗАСТОСУВАННЯ ОБ"ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНОГО ПІДХОДУ ДО ОБРОБКИ ДЕРЕВОВИДНИХ СТРУКТУР ДАНИХ

Дерева належать до найуживаніших абстрактних структур даних, оскільки рекурсивність є природною характеристикою багатьох елементів реального світу. Тому алгоритми опрацювання деревовидних структур викликають зацікавлення як у теоретиків, так і у практиків.

З огляду на широке використання об"єктно-орієнтованого програмування /ООП/, цікавою є задача застосування об"єктно-орієнтованого підходу до роботи з абстрактними структурами даних. Засобами такого стилю програмування можна реалізувати концепцію абстрактних типів даних /АТД/ на базі абстрактних структур даних /АСД/.

Проектування програм за принципом "зверху вниз" передбачає використання різних рівнів деталізації опису алгоритмів. Кожному рівневі відповідає певний набір базових операцій, композиції яких використовуються для зображення алгоритмів на цьому рівні.

Найчастіше розрізняють три рівні опису алгоритмів, які грунтуються на різних формах зображення даних:

1/ рівень абстрактних структур даних; 2/ рівень даних алгоритмічної мови; 3/ рівень реалізації в конкретному комп"ютері.

Для роботи з кореневими впорядкованими навантаженими деревами /далі деревами/ у праці [1] запропонований набір операцій, який містить понад 40 операторів обробки дерев як абстрактних структур даних. Цей набір можна взяти за основу операцій, визначаючи АТД для роботи з деревами.