1. Костив О.В. Разработка и исследование оценочных базисов прикладного сложностного анализа вычислений над деревьями: Автореф. дис...., канд. физ. мат. наук. Львов, 1985. 19? с.
2. Нагао М., Катаяма Т., Уэмура С. Структуры и базы данных. М., Мир, 1986. 198 с.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.95

УДК 519.6

Б.О.Попов, М.Ф.Лемех

УЗАГАЛЬНЕНА ОБМІННА ТЕОРЕМА ДЛЯ НАЙКРАЩОГО ЧЕБИШОВОГО НАБЛИЖЕННЯ

Розглянемо задачу найкращого чебишового наближення функції $f(x)$ з вагою $w(x)$ на проміжку $[\alpha,\beta]$ функцією від многочлена:

$$\Phi_m(x,A)=\varphi(\sum_{j=0}^{m}a_j x^j),\ x\in[\alpha,\beta],\ A=\{a_j\}_{j=0}^{m},$$

У працях [1,2] доведені теорема існування та характеристична теорема. Далі вважатимемо, що функції $f(x)$, $W(x)$ і $\Phi_m(x,A)$ задовольняють умови цих теорем.

Для розв"язання даної задачі застосовуємо метод чебишових ітерацій [1,2] з використанням одного з алгоритмів заміни точок альтернансу [1].

При застосуванні методу чебишових ітерацій до задачі найкращого чебишового наближення функцією від многочлена, виникає необхідність розв"язувати нелінійну систему рівнянь.

У статті запропонована наближена схема розв"язання задачі найкращого чебишового наближення функцією від многочлена - побудована задача найкращого чебишового наближення многочленом, розв"язок якої є асимптотичним до розв"язку задачі найкращого чебишового наближення функцією від многочлена. Показаний зв"язок цієї задачі найкращого чебишового наближення многочленом з обмінними теоремами для найкращого чебишового наближення. Наведені результати розв"язання тестових задач та їх аналіз.

Запишемо систему рівнянь, яка виникає при черговій ітерації для розв"язання задачі найкращого чебишового наближення функцією від многочлена:

$$f(t_i)-\varphi\left(\sum_{j=0}^{m} a_j t_i^j\right)=(-1)^i \mu w(t_i), \quad i=\overline{0,m+1}, \qquad /1/$$

де $\{t_i\}_{i=0}^{m+1}$ – наближення до точок альтернансу; $\{a_j\}_{j=0}^{m}$ – наближення до параметрів наближення; μ – наближення до похибки наближення.

Перепишемо систему /1/ у вигляді

$$\sum_{j=0}^{m} a^j t_i^j=\varphi^{-1}(f(t_i)-(-1)^i \mu w(t_i)), \quad i=\overline{0,m+1}, \qquad /2/$$

де $\varphi^{-1}(u)$ – функція, обернена до $\varphi(x)$: $u=\varphi(x)$, $x=\varphi^{-1}(u)$.

Розвиваючи праву частину /2/ в ряд Тейлора в околі точки $\mu=0$, отримуємо

$$\sum_{j=0}^{m} a_j t_i^j=\varphi^{-1}(f(t_i))-(-1)^i \mu w(t_i)[\varphi^{-1}(f(t_i))]'+\mu^2 M_i, \quad i=\overline{0,m+1},$$

де $\mu^2 M_i$ – залишок ряду Тейлора, починаючи з μ^2. Нехтуючи величинами $\mu^2 M_i$, отримуємо такі співвідношення:

$$\sum_{j=0}^{m} a_j t_i^j+(-1)^i \mu w(t_i)[\varphi^{-1}(f(t_i))]'=\varphi^{-1}(f(t_i)), \quad i=\overline{0,m+1}. \qquad /3/$$

Систему /3/ можна переписати у вигляді

$$\varphi^{-1}(f(t_i))-\sum_{j=0}^{m} a_j t_i^j=(-1)^i \mu w(t_i)[\varphi^{-1}(f(t_i))]', \quad i=\overline{0,m+1}. \qquad /4/$$

Система /4/ - це система, яка виникає при розв"язанні методом чебишових ітерацій задачі найкращого чебишового наближення многочленом на проміжку $[\alpha, \beta]$ функції $\varphi^{-1}(f(x))$ з вагою $w_1(x)=$ $=\mu w(x)[\varphi^{-1}(f(x))]'$.

Зазначимо, що задача наближення $\varphi^{-1}[f(x)]$ з вагою $w_1(x)$ многочленом на проміжку $[\alpha, \beta]$ в умовах теореми існування розв"язку і характеристичної теореми задачі наближення функції $f(x)$ з вагою $w(x)$ функцією від многочлена на проміжку $[\alpha, \beta]$ є коректною.

Введемо позначення:

$$r(x,A)=[f(x)-\varphi(\sum_{j=0}^{m} a^j x_j)]/w(x); \qquad /5/$$

$$\rho(x,A)=[\varphi^{-1}(f(x))-\sum_{j=0}^{m} a_j x^j]/w_1(x), \qquad /6/$$

де $r(x,A)$ – функція похибки задачі наближення $f(x)$ з вагою $w(x)$ виразом $\Phi_m(x,A)$; $\rho(x,A)$ – функція похибки задачі наближення $\varphi^{-1}(f(x))$ з вагою $w_1(x)$ многочленом.

Теорема 1 /узагальнена обмінна теорема/. Нехай на проміжку $[\alpha, \beta]$ існує єдине найкраще чебишове наближення функції $f(x)$ з вагою $W(x)$, $|W(x)| \neq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ виразом

$$\Phi_m(x,A) = \varphi\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x^j\right).$$

Тоді на проміжку $[\alpha, \beta]$ існує єдине найкраще чебишове наближення функції $\varphi^{-1}[f(x)]$ з вагою $W_1(x) = W(x)[\varphi^{-1}(f(x))]'$ многочленом

$$B_m(x,B) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j.$$

Причому наближення функції $f(x)$ з вагою $W(x)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$ виразом $\Phi_m(x,B)$ є асимптотичне до наближення виразом $\Phi_m(x,A)$ у разі збільшення кількості параметрів наближення і, якщо $\mu = \max\limits_{\alpha \le x \le \beta} |z(x,A)|$ – максимальна за модулем похибка наближення функції $f(x)$ з вагою $W(x)$ виразом $\Phi_m(x,A)$; $\eta = \max\limits_{\alpha \le x \le \beta} |\rho(x,B)|$ – максимальна за модулем похибка наближення функції $\varphi^{-1}[f(x)]$ з вагою $W_1(x)$ виразом $B_m(x,B)$, то виконується співвідношення:

$|\mu - \eta| < N\eta^2$, де $N > 0$ – стала. /7/

Доведення. Введемо позначення:

$\tilde{\mu} = \max\limits_{\alpha \le x \le \beta} |z(x,B)|$ – максимальне за модулем значення функції похибки задачі наближення функції $f(x)$ з вагою $W(x)$ виразом $\Phi_m(x,B)$;

$\tilde{\eta} = \max\limits_{\alpha \le x \le \beta} |\rho(x,A)|$ – максимальне за модулум значення функції похибки задачі наближення функції $\varphi^{-1}[f(x)]$ з вагою $W_1(x)$ виразом $B_m(x,A)$.

Для доведення того, що наближення $f(x)$ з вагою $W(x)$ виразом $\Phi_m(x,B)$ є асимптотичне до наближення виразом $\Phi(x,A)$, необхідно показати, що

$$|\tilde{\mu} - \mu| \to 0 \qquad \text{при } m \to \infty.$$

Для функції похибки /5/ маємо:

$$\sum_{j=0}^{m} a_j x^j = \varphi^{-1}(f(x) - z(x,A)\,W(x)). \qquad /8/$$

Розвиваючи праву частину /8/ в ряд Тейлора в околі $z(x,A) = 0$, маємо

$$\sum_{j=0}^{m} a_j x^j = \varphi^{-1}(f(x)) - z(x,A)\,W(x)[\varphi^{-1}(f(x))]' + z^2(x,A)\gamma(x), \qquad /9/$$

де $z^2(x,A)\gamma(x)$ – залишок ряду Тейлора починаючи з $z^2(x,A)$; $\gamma(x)$ – обмежена функція на $[\alpha, \beta]$.

Далі з /9/ отримуємо

$$[\varphi^{-1}(f(x)) - \sum_{j=0}^{m} a_j x^j]/W_1(x) = z(x,A) + z^2(x,A)\gamma_1(x), \qquad /10/$$

де

$$\gamma_1(x) = \gamma(x)/\omega_1(x).$$

Зважаючи на /6/, в /10/ отримуємо

$$\rho(x,A) - z(x,A) = z^2(x,A)\gamma_1(x). \qquad /11/$$

Розглядаючи далі функцію похибки /6/, для задачі наближення $\varphi^{-1}[f(x)]$ з вагою $\omega_1(x)$ многочленом $B_m(x,B)$, маємо

$$\sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \varphi^{-1}(f(x)) - \rho(x,B)\,\omega(x)[\varphi^{-1}(f(x))]'. \qquad /12/$$

Записуємо розвинення функції $\varphi^{-1}[f(x) - \rho(x,B)\omega(x)]$ в ряд Тейлора в околі $\rho(x,B) = 0$:

$$\varphi^{-1}(f(x) - \rho(x,B)\,\omega(x)) = \varphi^{-1}(f(x)) - \rho(x,B)\,\omega(x)[\varphi^{-1}(f(x))]' + \rho^2(x,B)\,\psi(x), \qquad /13/$$

де $\rho^2(x,B)\psi(x)$ – залишок ряду Тейлора починаючи з $\rho^2(x,B)$, функція $\psi(x)$ обмежена на $[\alpha,\beta]$.

До правої частини /12/ додамо і віднімемо величину $\rho^2(x,B)\psi(x)$. Беручи до уваги /13/, отримуємо

$$\sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \varphi^{-1}(f(x) - \rho(x,B)\,\omega(x)) - \rho^2(x,B)\psi(x),$$

$$f(x) - \rho(x,B)\omega(x) = \varphi\Big(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j + \rho^2(x,B)\,\psi(x)\Big). \qquad /14/$$

Праву частину /14/ розвиваємо в ряд Тейлора в околі $\rho(x,B) = 0$:

$$f(x) - \rho(x,B)\,\omega(x) = \varphi\Big(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\Big) + \rho^2(x,B)\,\tilde{\psi}(x), \qquad /15/$$

де $\rho^2(x,B)\tilde{\psi}(x)$ – залишок ряду Тейлора починаючи з другого доданка; $\tilde{\psi}(x)$ – обмежена функція.

З /15/ отримуємо

$$\Big[f(x) - \varphi\Big(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\Big)\Big]/\omega(x) = \rho(x,B) + \rho^2(x,B)\psi_1(x), \qquad /16/$$

де $\psi_1(x) = \tilde{\psi}(x)/\omega(x)$.

Зважаючи на /5/, в /16/ отримуємо

$$z(x,B) - \rho(x,B) = \rho^2(x,B)\psi_1(x). \qquad /17/$$

Використовуючи позначення $\mu, \eta, \tilde{\mu}, \tilde{\eta}$, із рівностей /11/ і /17/ випливають співвідношення:

$$|\tilde{\eta}-\mu| \leq \Gamma\mu^2, \quad \Gamma = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\gamma_1(x)|; \qquad /18/$$

$$|\tilde{\mu}-\eta| \leq \Psi\eta^2, \quad \Psi = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\psi_1(x)|. \qquad /19/$$

Оскільки μ і η - похибки найкращих чебишових наближень відповідних задач, то для них справедливе

$$\mu \leq \tilde{\mu}, \quad \eta \leq \tilde{\eta}. \qquad /20/$$

Додаючи нерівності /18/ і /19/, отримуємо

$$|(\tilde{\mu}-\mu)+(\tilde{\eta}-\eta)| \leq \Gamma\mu^2+\Psi\eta^2. \qquad /21/$$

Оскільки $\mu \to 0, \eta \to 0$ при $m \to \infty$, то з /21/ при $m \to \infty$ отримуємо

$$|(\tilde{\mu}-\mu)+(\tilde{\eta}-\eta)| \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \qquad /22/$$

Оскільки з /20/ випливає, що $(\tilde{\mu}-\mu)$ і $(\tilde{\eta}-\eta)$ мають однакові знаки, то з /22/ випливає

$$\tilde{\mu} \to \mu, \ \tilde{\eta} \to \eta \quad \text{при } m \to \infty. \qquad /23/$$

Отже, наближення функції $f(x)$ виразом $\Phi_m(x,B)$ є асимптотичне до наближення виразом $\Phi_m(x,A)$.

Оцінка /7/ випливає з /19/ і /23/. Теорема доведена.

Таким чином, периметри задачі найкращого чебишового наближення $\varphi^{-1}(f(x))$ з вагою $\omega_1(x)$ многочленом на проміжку $[\alpha, \beta]$ є наближенням до параметрів найкращого чебишового наближення функції $f(x)$ з вагою $\omega(x)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$ функцією від многочлена.

Для найкращих чебишових наближень відомі три обмінні теореми [1]. Сформулюємо одну з них.

Теорема 2. Нехай для функції $y(x)=\ln|f(x)/g(x)|$, де $f(x)$ і $g(x)$ - знакопостійні величини, що не перетворюються в нуль на множині, яка налічує не менш ніж $/m+2/$ точки, існує єдине на цій множині найкраще абсолютне наближення:

$$\beta_0 + \mathcal{X}(x;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m) \equiv \beta_0 + \mathcal{X}(x). \qquad /24/$$

Тоді для функції $f(x)$ на цій множині існує єдине найкраще відносне наближення, яке визначається виразом

$$A g(x) e^{\mathcal{X}(x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)} \equiv A g(x) e^{\mathcal{X}(x)}. \qquad /25/$$

Якщо Δ_0 - абсолютна величина найбільшої похибки найкращого абсолютного наближення виразом /24/ функції $y(x)$, δ_0 - абсолютна величина найбільшої похибки відносного наближення виразом /25/

функції $f(x)$, то між параметрами наближення справедливі співвідношення:

$$\alpha_i = \beta_i \ , \ i=\overline{1,m};$$

$$A = 2e^{\beta_0} sign\,(f(x)/g(x))/[e^{-\Delta_0}+e^{\Delta_0}];$$

$$\delta_0 = [e^{\Delta_0}-e^{-\Delta_0}]/[e^{-\Delta_0}+e^{\Delta_0}] = th\,\Delta_0 \ ,$$

а точки альтернансу збігаються.

Розглянемо задачу, сформульовану в теоремі 2 з погляду узагальненої обмінної теореми. Маємо $w(x)=f(x)$, $g(x)=1$, $w_1(x)=1$, $f(x)>0$. З узагальненої обмінної теореми випливає, що

$$|\Delta_0-\delta_0| \le N\Delta_0^2 .$$

Це ж випливає з теореми 2, бо

$$th\,\Delta_0 = \Delta_0 - \Delta_0^3/3 + o(\Delta_0^5) .$$

Як бачимо, теорема 2 дає змогу точно знайти розв"язок задачі найкращого чебишового наближення функцією від певного виразу, а за допомогою узагальненої обмінної теореми можна знайти наближене значення розв"язку, яке є асимптотичним до точного. Проте узагальнена обмінна теорема стосується загального випадку наближення функцією від многочлена.

<u>Приклад</u>. Знайти найкраще відносне чебишове наближення функції $f(x)=2+\sin(x)$ на проміжку $[-\pi,\pi]$ за допомогою виразу

$$\Phi_m(x,A) = exp(\sum_{j=0}^{m} a_j x^j) .$$

Цю задачу замінюємо задачею найкращого чебишового наближення функції $\ln f(x)$ многочленом з вагою $w_1(x)=f(x)\cdot \ln f(x)]'=1$.

Отримані результати наведені нижче:

m	μ	η	$\Delta\eta$
I	3.9530e-0I	4.I807e-0I	5.75e-02
3	9.2248e-02	9.25IIe-02	2.85e-03
5	4.523686e-02	4.526752e-02	6.77e-04
7	I.456325e-02	I.456428e-02	7.07e-05
9	3.I37I74e-03	3.I37185e-03	3.5Ie-06
II	I.36976Ie-03	I.369762e-03	7.30e-07

Тут μ - точне значення максимальної за модулем похибки даної задачі; η - максимальне за модулем значення похибки, яке отримане за допомогою узагальненої обмінної теореми; $\Delta\eta = |\mu - \eta|/\mu$ - відносна похибка величини η.

Одержані результати ілюструють можливість використання узагальненої обмінної теореми.

1. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. К.: Наук. думка, 1980. 351 с. 2. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. К.: Наук. думка, 1989. 271 с.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.95

УДК 621.396.67.061

П.О.Савенко, Л.М.Паснак

СИНТЕЗ ЛІНІЙНОЇ АНТЕННОЇ ГРАТКИ ЗА ЗАДАНОЮ АМПЛІТУДНОЮ ДІАГРАМОЮ НАПРЯМЛЕНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ВЗАЄМНОГО ВПЛИВУ ВИПРОМІНЮВАЧІВ

У роботі побудовані чисельні алгоритми розв"язування нелінійних обернених задач стосовно синтезу випромінювальних систем у строгій електродинамічній постановці. На прикладі лінійної антенної гратки вібраторів реалізована варіаційна постановка задачі, яка в подальшому зводиться до знаходження розв"язків нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна. Врахування взаємного впливу випромінювачів грунтується на методі наведених ЕРС і зводиться до розв"язування відповідної системи інтегральних рівнянь Фредгольма I-го роду з логарифмічною особливістю в ядрах.

Розглянемо систему лінійних вібраторів у безмежному однорідному ізотропному середовищі, яке характеризується хвильовим числом k. Кожний вібратор є тонкостінним циліндром радіуса $a \ll \lambda$ (λ - довжина хвилі. Центри вібраторів лежать на осі OX, а початок системи координат збігається з центром середнього вібратора. Осі вібратора паралельні осі OZ. У середньому перерізі кожного вібратора підключена по колу різниця потенціалів U_n $(n = 1, \ldots, N)$. Відомо [4], що повні струми $I_n(z_n)$, які протікають по n-му вібратору з урахуванням взаємного впливу інших вібраторів, пов"язані з потенціалами, що збуджують їх, системою інтегральних рівнянь Фредгольма I-го роду: