

Тут μ - точне значення максимальної за модулем похибки даної задачі; η - максимальне за модулем значення похибки, яке отримано за допомогою узагальненої обмінної теореми; $\Delta\eta = |\mu - \eta|/\mu$ - відносна похибка величини η .

Одержані результати ілюструють можливість використання узагальненої обмінної теореми.

І. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. К.: Наук. думка, 1980. 351 с. 2. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. К.: Наук. думка, 1989. 271 с.

Стаття надійшла до редакції 06.03.95

УДК 621.396.67.061

П.О.Савенко, Л.М.Паснак

СИНТЕЗ ЛІНІЙНОЇ АНТЕННОЇ ГРАТКИ ЗА ЗАДАНОЮ АМПЛІТУДНОЮ ДІАГРАМОЮ НАПРЯМЛЕНOSTІ З УРАХУВАННЯМ ВЗАЄМНОГО ВПЛИВУ ВІПРОМІНЮВАЧІВ

У роботі побудовані чисельні алгоритми розв'язування нелінійних обернених задач стосовно синтезу випромінювальних систем у строгій електродинамічній постановці. На прикладі лінійної антенної ґратки вібраторів реалізована варіаційна постановка задачі, яка в подальшому зводиться до знаходження розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна. Врахування взаємного впливу випромінювачів ґрунтується на методі наведених ЕРС і зводиться до розв'язування відповідної системи інтегральних рівнянь Фредгольма I-го роду з логарифмічною особливістю в ядрах.

Розглянемо систему лінійних вібраторів у безмежному однорідному ізоτροпному середовищі, яке характеризується хвильовим числом k . Кожен вібратор є тонкостінним циліндром радіуса $a \ll \lambda$ (λ - довжина хвилі). Центри вібраторів лежать на осі OX, а початок системи координат збігається з центром середнього вібратора. Осі вібратора паралельні осі OZ. У середньому перерізі кожного вібратора підключена по колу різниця потенціалів U_n ($n=1, \dots, N$). Відомо [4], що повні струми $I_n(z_n)$, які протікають по n -му вібратору з урахуванням взаємного впливу інших вібраторів, пов'язані з потенціалами, що збуджують їх, системою інтегральних рівнянь Фредгольма I-го роду:

© Савенко П.О., Паснак Л.М., 1995

$$\sum_{m=1}^N \int_{-l}^l I_m(t) K_{nm}(z_n, t) dt = 2\pi i \sqrt{\epsilon/\mu} U_n \sin k |z_n - z'_n| + \\ + C_n^{(1)} \sin k z_n + C_n^{(2)} \cos k z_n \quad (n=1, \dots, N), \quad /I/$$

де

$$K_{nm}(z_m, t) = 2/\pi \int_0^{\pi/2} \frac{e^{ik\sqrt{(z_m-t)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}}}{\sqrt{(z_m-t)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi;$$

$2l$ – довжина вібратора; z_m, t – відповідно точки спостереження та інтегрування на поверхні m -го вібратора;

$$K_{nm}(z_n, t) = \frac{e^{ikR_{nm}(z_n, t)}}{R_{nm}(z_n, t)},$$

$R_{nm}(z_n, t)$ – відстань від точки спостереження z_n на осі n -го вібратора до точки інтегрування t на осі m -го вібратора. Для знаходження констант $C_n^{(1)}$ і $C_n^{(2)}$ система рівнянь /I/ доповнюється додатковими умовами: кульовість струмів на краях вібраторів. Наявність логарифмічної особливості в ядрах $K_{nm}(z_m, t)$ дає змогу перейти від системи /I/ до стійкої системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Якщо на струми $I_n(t)$ накласти умову, що похідні I'_n обмежені: $|I'_n(t)| \leq M = \text{const}$, то цим самим відокремлюється компактний клас розв'язків, де задача коректна [4].

Для розв'язування системи інтегральних рівнянь /I/ застосовується метод Гальоркіна, при цьому струм в n -му вібраторі зображається у вигляді лінійної комбінації просторових гармонік ψ_v :

$$I_n(t) = \sum_{v=1}^M I_{nv} \psi_v(t), \quad /2/$$

які становлять частину деякої системи лінійно-незалежних функцій.

Підставляючи /2/ в /I/ і виконуючи інтегрування лівих і правих частин системи /I/, домножених відповідно на ψ_m , приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку в загальному вигляді можна зобразити як

$$ZI = U. \quad /3/$$

Матриця Z отримала в літературі назву матриці розсіювання, або матриці взаємних опорів [3,5].

Оскільки I належить до компактної множини, то оператор Z^{-1} буде неперервним на множині образів. Згідно з цим шукані струми виражаються через вектор збуджувальних потенціалів U таким чином

$$I = Z^{-1}U. \quad /4/$$

Відомо [3], що діаграма напрямленості /ДН/ випромінювальної системи характеризує залежність електромагнітного поля від кутових координат на сфері достатньо великого радіуса. Для лінійної ґратки із N вібраторів ДН описується формулою

$$f_{\nu}(\nu, \varphi) = A_I = \sin \nu \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M I_{nm} e^{ikx_n \sin \nu \cos \varphi} \int_{-l}^l \psi(z'_m) e^{ikz'_m \cos \nu} dz'_m.$$

Підставляючи /4/ в останню формулу, отримуємо безпосередню залежність ДН ґратки від вектора сторонніх потенціалів U , що подаються на елементи ґратки. В операторному записі ця залежність має вигляд

$$f = AZ^{-1}U.$$

/5/

Формула /5/ дає змогу отримати розв'язок прямої задачі електродинаміки в дальній зоні ґратки, тобто на її основі можна обчислити вектори E і H електромагнітного поля при $R \rightarrow \infty$. У подальшому ДН ґратки, яка обчислюється за /5/, використовуватимемо при постановці і розв'язуванні оберненої задачі.

Задачу синтезу антенної ґратки за заданою амплітудною діаграмою напрямленості сформулюємо як задачу знаходження такого вектора потенціалів збудження U , щоб створена ним ДН за своєю амплітудою якнайменше різнилась від заданої амплітудної ДН. Як критерій оптимізації використовуватимемо функціонал

$$\sigma = \|F - \|AZ^{-1}U\|^2 + \alpha \|A^{-1}U\|^2,$$

в якому перший доданок є середньоквадратичним відхиленням модулів заданої $|F|$ і синтезованої $|f|$ діаграм, а другий – накладає обмеження на норму струмів збудження. Константа α відіграє роль параметра регуляризації. Її можна інтерпретувати також як ваговий множник, що регулює співвідношення між першим і другим доданками функціонала.

Для знаходження оптимальних розв'язків поставленої задачі використовуємо необхідну умову мінімуму: нульовість його першої похідної Гато. У результаті отримуємо нелінійне операторне рівняння стосовно I :

$$I = -\frac{1}{\alpha} A^* A I + \frac{1}{\alpha} A^* (F \exp(i \arg A I)),$$

/6/

де A^* – спряжений до A оператор. Якщо впливати на обидві сторони рівності /6/ оператором A і брати до уваги /5/, то приходимо до нелінійного операторного рівняння щодо оптимальної ДН:

$$f = -\frac{1}{\alpha} AA^* f + \frac{1}{\alpha} AA^* (F \exp(i \arg f)). \quad /7/$$

На основі розв'язків цього рівняння оптимальні розподіли струмів на вібраторах обчислюються за формулою

$$I = \frac{1}{\alpha} A^* (F \exp(i \arg f) - f).$$

У свою чергу оптимальний розподіл збуджувальних потенціалів у гратці отримуємо простим перемноженням матриці розсіювання Z на I , тобто за формулою /3/.

Рівняння синтезу /6/, /7/ є відповідно нелінійним матричним та інтегральним рівняннями типу Гаммерштейна. Звичайно, вони мають не єдиний розв'язок /1/. Існування точок мінімуму функціонала і відповідно розв'язків рівнянь /6/, /7/ стверджує така теорема.

Теорема 1. Нехай F - дійсна додатна функція, визначена на заданій області Ω , а оператор AZ^{-1} діє з комплексного простору R_n у комплексний простір H_f і є компактним. Тоді функціонал σ - диференційований у кожній точці простору R_n і в деякій його точці набуває мінімального значення; відповідно рівняння /6/ в просторі H_f і рівняння /7/ в просторі H_f мають принаймні по одному розв'язку.

Для доведення теореми аналогічно [6] необхідно показати виконання таких умов [2]:

$\lim_{\|U\| \rightarrow \infty} \sigma(U) = \infty$, і що $\sigma_1(U) = \|F - |f|\|^2$ - слабо неперервний функціонал.

Безпосереднє знаходження розв'язків здійснюється шляхом чисельного розв'язування рівнянь /6/ або /7/. Наведемо алгоритм розв'язування рівняння /7/. Для цього до /7/ застосуємо неявну схему методу послідовних наближень [1], тобто схему напівообертання. У правій частині досліджуваного рівняння явно виілений лінійний член стосовно шуканої функції. Перенесення його в ліву частину рівняння з наступним обертанням лінійного оператора приводить до такого ітераційного процесу:

$$\alpha f_{m+1} = (E + \frac{1}{\alpha} AA^*)^{-1} AA^* (F \exp(i \arg f_m)), \quad /8/$$

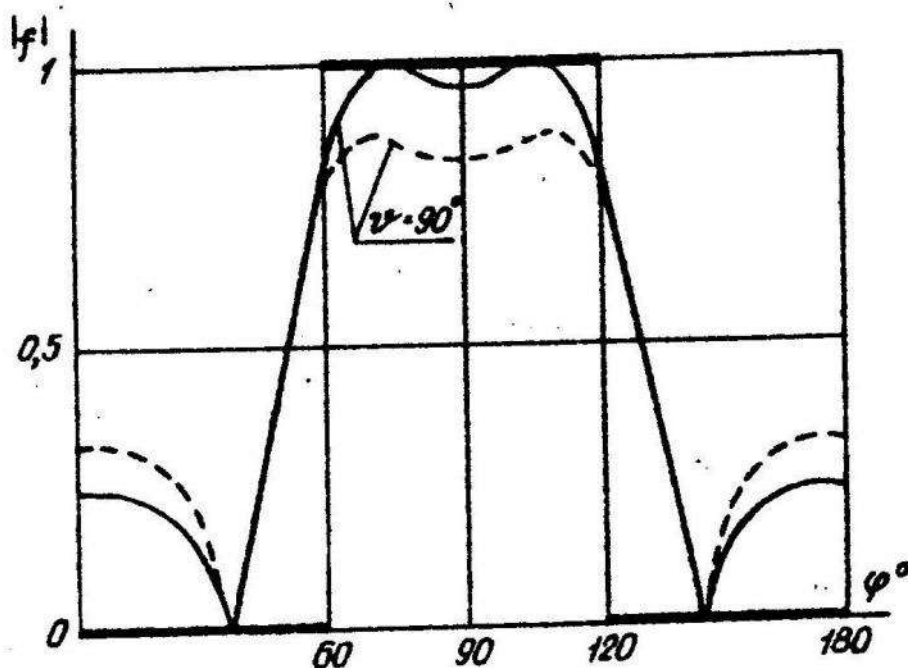
де $m = 0, 1, 2, \dots$ - номер ітерації. Як свідчать чисельні експерименти й аналітичні дослідження, швидкість та область збіжності цього процесу відповідно більша і ширша порівняно з явною ітераційною схемою

$$\alpha f_{m+1} = -AA^* f_m + AA^* (F \exp(i \arg f_m)).$$

Збіжність ітераційного процесу /8/ ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 2. Нехай нелінійний оператор $Bf = \frac{1}{\alpha} AA^* (F \exp(i \arg f))$ диференційований за Фреше на деякій опуклій області $S_{r_0} = \{f: \|f - f_0\| \leq r_0\}$, де $S_{r_0} \in H_f$, $0 < r_0 < \infty$. Тоді, якщо існує обернений оператор $(E + \frac{1}{\alpha} AA^*)^{-1}$ і $\sup_{f \in S_{r_0}} \|B'f\| < \frac{1}{\|(E + \frac{1}{\alpha} AA^*)^{-1}\|}$, то $\frac{1}{\alpha} (E + \frac{1}{\alpha} AA^*)^{-1} AA^* (F \exp(i \arg f))$ — стискальний на S_{r_0} оператор. Функцію f_0 можна розглядати, зокрема, як початкове наближення.

Наведемо приклад синтезу лінійної еквідистантної ґратки при $N=7$. Задана ДН $F(\nu, \varphi) = 1$, якщо $\nu \in [75^\circ, 105^\circ]$, $\varphi \in [60^\circ, 120^\circ]$ і тотожно дорівнює нулю за межами цієї області. Як базисні функції обрано $\psi_m(t) = \cos(\pi/2 m t)$. На рисунку зображена задана амплітуда ДН /тонка лінія/. Штриховою лінією зображено амплітуду ДН, яка створюється тим же розподілом напруг U_m , що й оптимальна ДН, але при цьому не враховується взаємний вплив вібраторів. Із наведених графіків бачимо, що точніша математична модель ґратки, тобто врахування взаємного впливу лише в першому наближенні, дає змогу краще апроксимувати синтезовану ДН до заданої.



Наприкінці зауважимо, що рівняння синтезу /6/, /7/ виведені без урахування конкретного типу випромінювачів та мають загальний характер. Тому наведений алгоритм розв'язування оберненої задачі може бути застосований до широкого класу випромінювальних систем.

І. Андрійчук М.И., Войтович Н.Н., Савенко П.А., Ткачук В.П. Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. К., 1993. 2. Зяб-реко П.П., Кошелев А.Н. и др. Интегральные уравнения. М., 1968. 3. Зябко Е.Г., Соколов В.Г. Методы синтеза антенн. М., 1980. 4. Мельниченко А.С., Бережная И.В. Исследование распределения тока в системе произвольно расположенных вибраторов // Вып. 20. С. 263-269. 5. Марков Г.Т., Чаплин А.Е. Возбуждение электромагнитных волн. М., 1983. 6. Савенко М.О. Про існування розв'язків одного класу нелінійних обернених задач математичної фізики стосовно синтезу випромінюючих систем // Докл. НАН України. 1994. С. 48-52.

Стаття надійшла до редакції 03.03.95

УДК 517.958:536.12

Р.В.Гуззь

ВИЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПЛОСКОЇ
СТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
ДЛЯ ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОЇ ОБЛАСТІ
З ВИКОРИСТАННЯМ НЕПРЯМОГО МЕТОДУ
ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянемо плоску стаціонарну задачу теплопровідності:

$$\operatorname{div}(\Lambda(X) \operatorname{grad} \theta) = 0, \quad X \in \Omega; \quad /1/$$

$$\theta(X) = \theta_0(X), \quad X \in \Gamma, \quad /2/$$

де коефіцієнт теплопровідності є неперервною функцією просторових координат, постійною окрізь Ω , за винятком локальної області неоднорідності $\Omega_d \subset \Omega$ [3], тобто

$$\Lambda(X) = 1 + \Lambda_d(X) \chi_d(X).$$

Тут $\chi_d(X)$ - характеристична функція області Ω_d , $\Lambda_d(X)|_{X \in \Gamma} = 0$, $\Gamma \cap \Gamma_d = \emptyset$, Γ, Γ_d - краї відносно областей Ω та Ω_d .

Запишемо диференціальний оператор рівняння /1/ аналогічно [4] у вигляді суми двох операторів, один з яких ∇^2 описує поведінку температурного поля в однорідному середовищі, а інший $P_d(\cdot) = -\Lambda^{-1}(X) \nabla \Lambda_d(X)$ враховує додатковий вплив локальної неоднорідності. Вислідом цього рівняння /1/ набуде вигляду

$$\nabla^2 \theta = -P_d \theta \chi_d, \quad X \in \Omega. \quad /3/$$