1. Андрийчук М.И., Войтович Н.Н., Савенко П.А., Ткачук В.П. Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. К., 1993. 2. Забрейко П.П., Кошелев А.И. и др. Интегральные уравнения. М., 1968. 3. Зелкин Е.Г., Соколов В.Г. Методы синтеза антенн. М., 1980. 4. Ильинский А.С., Бережная И.В. Исследование распределения тока в системе произвольно расположенных вибраторов // Вычисл. методы и программирование. М., 1973. Вып. 20. С.263–269. 5. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М., 1983. 6. Савенко П.О. Про існування розв'язків одного класу нелінійних обернених задач математичної фізики стосовно синтезу випромінюючих систем // Доп. НАН України. № 8. 1994. С. 48–52.

Стаття надійшла до редколегії 03.03.95

УДК 517.958:536.12

Р.В.Гудзь

ВИЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПЛОСКОЇ СТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОЇ ОБЛАСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕПРЯМОГО МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянемо плоску стаціонарну задачу теплопровідності:

$$\operatorname{div}(\Lambda(X)\operatorname{grad}\theta)=0,\quad X\in\Omega; \qquad /1/$$

$$\theta(X)=\theta_0(X),\quad X\in\Gamma, \qquad /2/$$

де коефіцієнт теплопровідності є неперервною функцією просторових координат, постійною скрізь в Ω, за винятком локальної області неоднорідності $\Omega_g\subset\Omega$ [3], тобто

$$\Lambda(X)=1+\Lambda_g(X)\,\chi_g(X).$$

Тут $\chi_g(X)$ – характеристична функція області Ω_g, $\Lambda_g(X)|_{X\in\Gamma_g}=0$, $\Gamma\cap\Gamma_g=\varnothing$, Γ,Γ_g – краї відповідно областей Ω та Ω_g. Запишемо диференціальний оператор рівняння /1/ аналогічно [4] у вигляді суми двох операторів, один з яких ∇^2 описує поведінку температурного поля в однорідному середовищі, а інший $P_g(\,)=\Lambda^{-1}(X)\,\nabla\Lambda_g\nabla(\,)$ враховує додатковий вплив локальної неоднорідності. Внаслідок цього рівняння /1/ набуває вигляду

$$\nabla^2\theta=-P_g\theta\,\chi_g,\quad X\in\Omega. \qquad /3/$$

Апроксимувавши невідомий розв'язок в області Ω_g рядком функцією θ_g і використавши її у правій частині /3/, перейдемо від крайової задачі /3/, /2/ до крайової задачі стосовно θ^*

$$\nabla^2\theta^* = -P_g\theta_g\chi_g\,,\quad X\in\Omega; \qquad /4/$$

$$\theta^* = \theta_0\,,\quad X\in\Gamma. \qquad /5/$$

Застосуємо метод граничних елементів у непрямому формулюванні до розв'язання задачі /4/, /5/. Запишемо розв'язок θ^* аналогічно [1] у вигляді

$$\theta^*(X) = \int_\Gamma \mathcal{E}(X,Y)\varphi(Y)d\Gamma(Y) + \int_{\Omega_g}\mathcal{E}(X,Z)P_g\theta_g(Z)d\Omega(Z) + C, \qquad /6/$$

де $\mathcal{E}(X,Y) = \frac{1}{2\pi}\ln\left[(X_1-Y_1)^2+(X_2-Y_2)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ – фундаментальний розв'язок оператора Лапласа у плоскому випадку; $\varphi(Y)$ – функція інтенсивності фіктивних крайових джерел тепла; C – невідома стала.

Дискретизуємо Γ граничними елементами Γ_k ($k=\overline{1,N}$), моделюючи їхню геометрію за допомогою інтерполюючих функцій Ψ_ℓ. Уздовж кожного з елементів здійснимо апроксимацію невідомої функції за допомогою інтерполяційного полінома [1,2]:

$$\varphi(\eta)\big|_{\Gamma_k} = \vec{\varphi}_k^{\,T}\vec{\psi}(\eta),$$

де $\vec{\varphi}_k$ – вектор невідомих вузлових значень функції φ на k-му елементі; $\vec{\psi}$ – вектор базових інтерполюючих функцій, пов'язаних з локальною системою координат.

Область Ω_g дискретизуємо системою скінченних елементів Ω_{gm} ($m=\overline{1,M}$), зобразивши функцію θ_g на кожному з них інтерполяційним поліномом:

$$\theta_g\big|_{\Omega_{gm}} = \vec{\theta}_{gm}^{\,T}\vec{\xi}(\zeta_1,\zeta_2),$$

де $\vec{\theta}_{gm}$ – вектор невідомих вузлових значень функції θ_g на m-му елементі; $\vec{\xi}$ – вектор базових інтерполюючих функцій.

На основі таких зображень одержимо дискретний аналог формули /6/:

$$\theta^*(X) = \sum_{k=1}^{N}\vec{\varphi}_k^{\,T}\int_{-1}^{1}\mathcal{E}(X,Y^k)\vec{\Psi}\,|G_{\Gamma k}|\,d\eta\, +$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\vec{\theta}_{gm}^{\,T}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathcal{E}(X,Z^m)P_g\vec{\xi}\,|G_{gm}|\,d\zeta_1 d\zeta_2 + C, \qquad /7/$$

де y^k, Z^m – координати вузлів відповідно на елементах Γ_k та

$$\Omega_{gm},\ G_{\Gamma_k}=\left[\left(\frac{dy_1^k}{d\eta}\right)^2+\left(\frac{dy_2^k}{d\eta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$G_{gm}=\frac{\partial Z_1^m}{\partial \zeta_1}\frac{\partial Z_2^m}{\partial \zeta_2}-\frac{\partial Z_2^m}{\partial \zeta_1}\frac{\partial Z_1^m}{\partial \zeta_2}.$$

Уведемо дві функції нев"язок:

$$R_\Gamma(X)=\theta^*(X)-\theta_0(X) \quad \text{на} \quad \bigcup_{k=1}^{N}\Gamma_k,$$

$$R_g(X)=\theta^*(X)-\theta_g(X) \quad \text{на} \quad \bigcup_{m=1}^{M}\Omega_{gm}.$$

Використавши метод колокації по вузлах $X^{0n}\in\bigcup_{k=1}^{N}\Gamma_k\ (n=\overline{1,N_1})$ та $X^{gj}\in\bigcup_{m=1}^{M}\Omega_{gm}\ (j=\overline{1,M_1})$, де N_1, M_1 – загальні кількості вузлів інтерполювання відповідно функції φ по дискретному аналогу Γ та функції θ_g по дискретному аналогу Ω_g, одержимо систему N_1+M_1 лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих вузлових значень функцій φ, θ_g:

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{\varphi}_k^{\,T}\int_{-1}^{1}\mathcal{E}(X^{0n},y^k)\vec{\Psi}\,|G_{\Gamma_k}|\,d\eta+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\vec{\theta}_{gm}^{\,T}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathcal{E}(X^{0n},Z^m)P_g\vec{\xi}\,|G_{gm}|\,d\zeta_1 d\zeta_2+C,\ n=\overline{1,N_1}; \qquad /8/$$

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{\varphi}_k^{\,T}\int_{-1}^{1}\mathcal{E}(X^{gj},y^k)\vec{\Psi}\,|G_{\Gamma_k}|\,d\eta+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\vec{\theta}_{gm}^{\,T}\left\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathcal{E}(X^{gj},Z^m)P_g\vec{\xi}\,|G_{gm}|\,d\zeta_1 d\zeta_2-\vec{\xi}\right\}+C=0,\ j=\overline{1,M_1}. \qquad /9/$$

Доповнимо /8/, /9/ дискретним аналогом

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{\varphi}_k^{\,T}\int_{-1}^{1}\vec{\Psi}\,|G_{\Gamma_k}|\,d\eta+\sum_{m=1}^{M}\vec{\theta}_{gm}^{\,T}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P_g\vec{\xi}\,|G_{gm}|\,d\zeta_1 d\zeta_2=0 \qquad /10/$$

умови [1]

$$\int_\Gamma \varphi(y)\,d\Gamma(y)+\int_{\Omega_g}P_g\,\theta_g(Z)\,d\Omega(Z)=0.$$

Розв"язок системи лінійних алгебричних рівнянь /8/–/10/ містить M_1 вузлових значень шуканого температурного поля в області Ω_g.

У довільній точці X розв"язок вихідної крайової задачі визначається за формулою /6/ з використанням розв"язку системи /8/–/10/.

Наведемо результати числових досліджень, виконаних для

$$\Omega = \{(X_1, X_2):\ X_1^2 + X_2^2 < r_0^2 \quad \text{при } \varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0;$$
$$X_1 < r_0 \cos\varphi_0,\ X_1^2 + X_2^2 < r_0^2 \ \text{при } |\varphi| \le \varphi_0\},$$

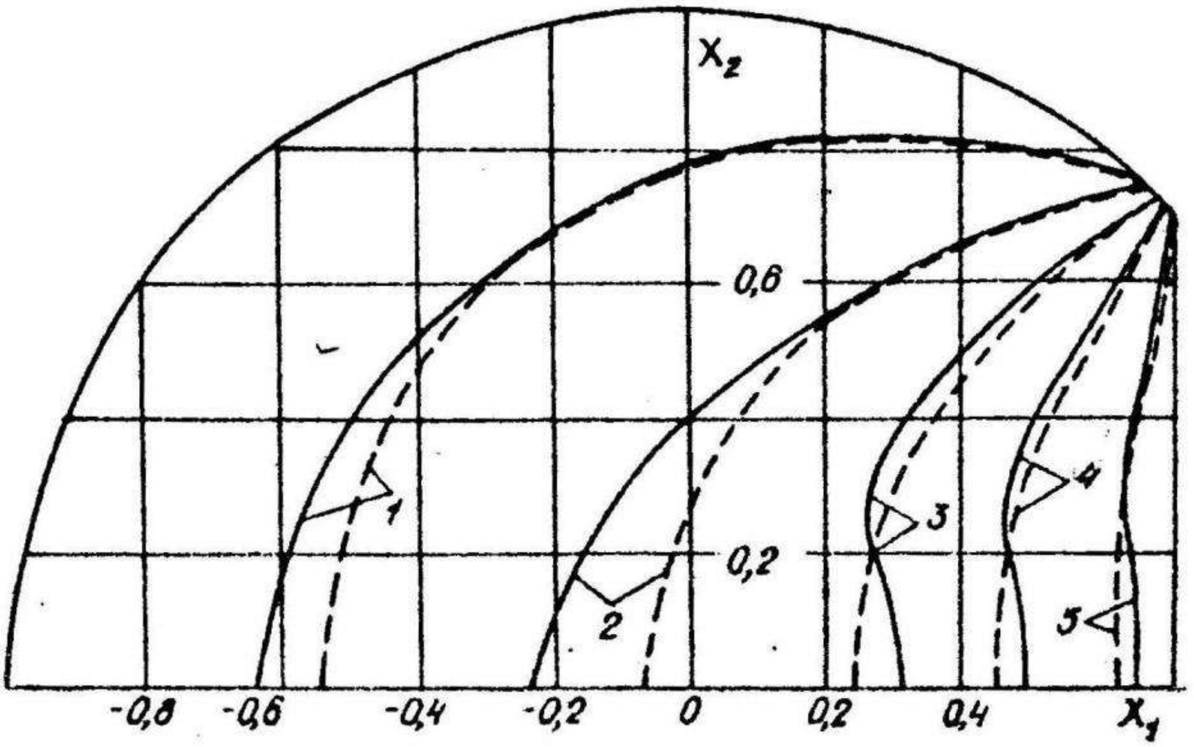
$$\theta_0\Big|_\Gamma = \begin{cases} 1, & 0 \le |\varphi| < \varphi_0; \\ \dfrac{\varphi_0 + \Delta\varphi_0 - |\varphi|}{\Delta\varphi_0}, & \varphi_0 \le |\varphi| < \varphi_0 + \Delta\varphi_0; \\ 0, & \varphi_0 + \Delta\varphi_0 < |\varphi| \le \pi, \end{cases}$$

$$\Lambda(X) = \exp(f_\Lambda(X)\, x_g(X)),$$

де $f_\Lambda(X)$ – неперервна кусково-лінійна функція, $f_\Lambda|_{\Gamma_g} = 0$. $\max\limits_{\Omega_g} f_\Lambda(X) = f_\Lambda(X^g)$, $X^g \in \Omega_g$, Ω_g – многокутник.

Для апроксимації Γ використовували квадратичні граничні елементи, а для Ω_g – квадратичні лагранжеві чотирикутні скінченні елементи. Для числового інтегрування вздовж граничних елементів застосовували формулу Гауса з 8 вузлами, по лагранжевому елементу – двовимірну формулу з 16 вузлами. Для підвищення точності обчислень інтегрування виконували не по $\bigcup\limits_{k=1}^{N} \Gamma_k$, а по зміщеному в напрямі зовнішньої нормалі контуру $\bigcup\limits_{k=1}^{N} \Gamma_k^*$ [4].

Результати обчислень, одержані при $\varphi_0 = \pi/4$; $\Delta\varphi_0 = 0,1$; $r_0 = 1$, подані на рисунку. Ізотермам I–5 відповідають значення $\theta^* = 0,1;\ 0,3;\ 0,5;\ 0,7;\ 0,9$ у випадку однорідного тіла



/штрихові лінії/ та за наявності у тілі області неоднорідності /суцільні лінії/ $\Omega_g = \{(x_1, x_2): -0,1 < x_1 < 0,2;\ |x_2| < \frac{1}{2}x_1 + 0,3\}$, в якій $\max \lambda = \lambda(0,0) = e^4$.

Виявлено, що в разі зростання коефіцієнта теплопровідності в області локальної неоднорідності існує границя функції температурного поля. При цьому спостерігається ефект "плато" у функції розв"язку крайової задачі, який зі зростанням усе більше себе проявляє.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с. 2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с. 3. Гудзь Р.В. Решение задач теплопроводности и термоупругости для локально-неоднородных цилиндрических тел непрямым методом граничных элементов. Львов, 1988. 23 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 844-Ук88. 4. Grits'ro E.G., Zhuravchak L.M. A Numeric-Analytic Method of Solving a Nonlinear Problem of Heat Conduction for a Right Prism // J. of Soviet Mathematics, 1993. Vol.64. N3. P.984-987.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.95