УДК 518:517.948

П.С.Сеньо

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Нехай потрібно знайти таку функцію $g(x)$, при якій функціонал

$$J = \int_a^b G(x,g,z)\,dx \qquad /1/$$

набуває мінімального значення, де

$$z(x) = \int_c^x g(\tau)\,d\tau, \qquad /2/$$

$$g(a) = g_0, \quad z(b) = z_0; \qquad /3/$$

причому для відомих функцій $\bar{t}_i(x,g,z)\ (i=\overline{1,m})$ потрібно одночасно знайти таке найменше b, при якому додатково

$$\bar{t}_i(x,g,z) \le K_i\ (i=\overline{1,m}) \qquad /4/$$

для всіх $x \in [a,b]$.

Умови вигляду /2/ часто трапляються в багатьох задачах науки і техніки. Формально задачу /1/–/3/ можна розглядати як найпростішу задачу варіаційного числення для двох невідомих функцій $y(x), z(x)$, які, однак, є залежними /співвідношення /2//; невідомі також $y(b)$ та $z(a)$. В умові /2/ верхня межа інтеграла змінна, тому її не можна розглядати як додаткову умову у вигляді рівності та застосовувати відповідно метод множників Лагранжа [2]. Наявність умови /4/ ще більше ускладнює задачу.

Нехай $\bar{G}(x)$ – первісна функції $g(x)$. Тоді $y'(x) = \bar{G}'(x) = g(x)$, і тому задача /1/–/3/ з врахуванням заміни

$$y(x) = \int_c^x g(\tau)\,d\tau \qquad /5/$$

еквівалентна такій задачі варіаційного числення: потрібно знайти функцію $y(x)$, при якій функціонал

$$J = \int_a^b F(x,y,y')\,dx \qquad /6/$$

набуває мінімального значення, якщо

$$y'(a) = g_0, \quad y(b) = z_0. \qquad /7/$$

Тут $\mathcal{F}(x,y,y') \equiv G(x,g,z)$, де $y(x)=z(x)$, $y'(x)=g(x)$.
Для знаходження $y(x)$ необхідно розв"язати диференціальне рівняння Ейлера [2]:

$$\mathcal{F}'_y - \mathcal{F}''_{y'x} - \mathcal{F}''_{y'y}\cdot y' - \mathcal{F}''_{y'y'}\cdot y'' = 0 . \qquad /8/$$

Постійні інтегрування визначаємо з умов /7/.

Далі розглядаємо J та y як функції верхньої межі b , тобто

$$J = J(b),\ y = y(x,b).$$

Функція $J = J(b)$ не є монотонною. Після підстановки y та y' в нерівності

$$t_i(x,y,y') \leqslant K_i \quad (i=\overline{1,m}), \qquad /9/$$

де $t_i(x,y,y') = \bar{t}_i(x,g,z)$ $(i=\overline{1,m})$ /тут $y(x)=z(x)$, $y'(x)=g(x)$/ отримуємо нерівності

$$f_i(x,b) \leqslant K_i \quad (i=\overline{1,m}). \qquad /10/$$

Мінімізуючи функцію $J=J(b)$ по b , отримуємо нульове наближення до розв"язку нерівностей /10/, які потрібно розв"язати щодо b при всіх $x\in[a,b]$. Обидві ці підзадачі можна розв"язати, оцінюючи інтервальні розширення функцій $J(b), f_i(x,b)$, як запропоновано у праці [3]. При $i>1$ часто попередньо необхідно в /10/ здійснити усереднення. Якщо ж задачу /6/-/7/ розв"язуємо прямими методами, то нерівності вигляду /10/ набувають набагато простішого вигляду, але так отримуємо лише наближений розв"язок.

Як приклад розглянемо контактну задачу з праці [1]. Два півпростори 1 та 2 стискаються розподіленою силою $q(\tau)$, і півпростір 1 ковзає зі швидкістю $V(\tau)$ по півпростору 2. Потрібно знайти закон розподілу стискальної сили, при якому: спрацювання буде мінімальним, температура на межі півпросторів не перевищить заданих критичних значень, процес гальмування відбудеться за найменший час. Нехай T - час, протягом якого рух припиниться. Потрібно знайти таку функцію $q(\tau)$, при якій функціонал

$$J = \int_0^T v(\tau)(K_1 + K_2\cdot t(\tau,q(\tau),v(\tau)))\, q(\tau)\,d\tau \qquad /11/$$

набуває найменшого значення, де

$$v(\tau) = v_0 - \frac{f}{m}\int_0^{\tau} q(x)\,dx, \qquad /12/$$

$$q(0)=0;\ v(T)=0,\qquad /13/$$

$t(\tau,q(\tau),v(\tau))\equiv c_1\cdot v(\tau)\cdot q(\tau)\,u(\tau)$, $u(\tau)$ - відома функція; c_1, k_1, k_2, f, m, v_0 - відомі константи [1]; обмеження на критичну температуру:

$$t_i(\tau,q(\tau),v(\tau))\le \bar{K}_i\ (i=1,2). \qquad /14/$$

Нехай $y(x)=\int_0^x q(\theta)d\theta$. Тоді $y'(x)=q(x)$. Функціонал /6/ запишемо як

$$J=\int_0^{T^1}\left(v_0-\frac{f}{m}y(x)\right)\left(k_1+k_2\cdot c_1 y'(x)\left(v_0-\frac{f}{m}y(x)\right)u(x)\right)y'(x)dx.$$

Рівняння Ейлера /8/ набирає вигляду

$$0=(a_1y^2-a_2y+a_3)'\cdot y'\cdot u'(\tau)+2(a_1y^2-a_2y+a_3)(y'\cdot u(\tau))', \qquad /15/$$

а з урахуванням механічної суті задачі - такого екзотичного вигляду

$$0=\left(\ln\left(\sqrt{k_2\cdot c_1}\left(\frac{f}{m}y-v_0\right)\right)\right)'\cdot(\ln u(\tau))'+(\ln(y'\cdot u(\tau)))'. \qquad /16/$$

Далі враховуємо обмеження /14/ за описаною вище схемою.

1. Баран В.П., Вардзаль А.Г., Онышкевич В.М. и др. Квазистатическая контактная задача термоупругости для двух полубесконечных тел с учетом теплообразования на границе раздела // Соврем. пробл. теории контакт. взаимодействий. Ереван, 1988. С. 24-27. 2. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1950. 3. Сеньо П.С. Новий підхід до побудови інтервальних методів розв"язування систем нелінійних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. С. 85-91.

Стаття надійшла до редколегії 09.03.95