

ПОРІВНЯЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ РУНГЕ-КУТТА

У процесі математичного моделювання багатьох процесів приходимо до одноточкових і багатоточкових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних. Один з підходів розв'язування цих задач полягає в їх приведенні до послідовності задач Коші. Тому наявність ефективних методів і програмного забезпечення розв'язання задач Коші є ключем для успішного аналізу моделі в цілому.

У даній роботі проаналізовані шляхи автоматичного керування довжиною кроку для явних і вкладених методів Рунге-Кутта. Як приклад нелінійної системи диференціальних рівнянь 4-го порядку наведена порівняльна характеристика ефективності різних методів.

І. Загальна схема явних методів Рунге-Кутта /РК/. Задача Коші для звичайного /в загальному випадку векторного/ диференціального рівняння i -го порядку полягає в знаходженні функції $y(x) = [y_1(x), \dots, y_n(x)]^T$, яка на заданому проміжку (x_0, x_1) задовольняє рівняння

$$y'(x) = f(x, y), \quad /1/$$

$$f(x, y) = [f_1(x, y), \dots, f_n(x, y)]^T.$$

а в точці x_0 - задану початкову умову

$$y(x_0) = y_0, \quad /2/$$

$$y_0 = [y_{01}, \dots, y_{0n}]^T.$$

Для зручності викладу вважаємо, що $x_0 < x_1$.

У разі використання числових методів розв'язування задачі /1/-/2/ отримуємо послідовність точок $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots$ зі значеннями наближеного розв'язку $y_0, y_1, \dots, y_i, \dots$ в них. Для знаходження розв'язку в точці $x > x_i$ вістаємо задачу Коші, аналогічну /1/-/2/ з початковою умовою в точці x_i :

$$y'(x) = f(x, y), \quad x \in (x_i, x_1); \quad /3/$$

$$y(x_i) = y_i. \quad /4/$$

Згідно зі схемою однокрокових явних методів РК наближений розв'язок задачі /3/-/4/ у точці $x_{i+1} = x_i + h_i$ подаємо у вигляді

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^S \rho_j k_j ; \quad /5/$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) ; \quad /6/$$

$$k_j = f(x_i + \alpha_j h_i, y_i + h_i \sum_{z=1}^{j-1} \beta_{jz} k_z) \quad j = 2, \overline{S},$$

де S – кількість стадій методу РК: $\alpha_j, \rho_j, \beta_{jz}$ ($j, z = 1, \dots, S$) – задані дійсні числа. Залежно від $S, \alpha_j, \rho_j, \beta_{jz}$ вістаємо різні S -стадійні методи РК $[1, 2, 3]$.

2. Точність методу і добір довжини кроку. Метод РК /5/-/6/ має порядок p , якщо різниця err між точним $y(x_{i+1})$ і наближеним розв'язком y_{i+1} задачі /3/-/4/ у точці x_{i+1} /локальна похибка/ оцінюється нерівністю:

$$err = \|y(x_{i+1}) - y_{i+1}\| < C_i h_i^{p+1}, \quad /7/$$

$C_i - const$, яка залежить від властивостей функції f та її похідних на проміжку $[x_i, x_{i+1}]$. Величина $C_i h_i^{p+1}$ характеризує локальну похибку методу РК у точці x_{i+1} на i -му кроці при заданій початковій умові /4/. Глобальну похибку ε в точці x_{i+1} можна оцінити нормою різниці між точним розв'язком y_T вихідної задачі Коші /1/-/2/ і наближеним розв'язком y_{i+1} :

$$\varepsilon = \|y_T(x_{i+1}) - y_{i+1}\|.$$

Дана похибка складається з локальної похибки err і перенесеної похибки у визначенні початкової умови /4/. Оцінка глобальної похибки для методу РК p -го порядку подається у вигляді

$$\|\varepsilon\| \leq C_2 h^p,$$

де $h = \max h_i$, $C_2 - const$, яка залежить від функції f та її частинних похідних на проміжку $[x_0, x_1]$.

Із співвідношення /7/ випливає, що вибором довжини кроку h_i можна досягти того, щоб локальна похибка err на i -му кроці не перевищувала заданої величини ε_{ps} . Очевидно, що крок h_i повинен бути настільки малим, щоб виконувалось співвідношення /7/. Водночас він повинен бути достатньо великим, щоб запобігти зайвим обчисленням.

Опишемо алгоритм керування довжиною кроку. Нехай обраний

S -стадійний метод РК порядку p . Нехай у точці x_i обраний крок величиною h_i . Обчислимо розв'язки $y_{i+1}^{(1)}, y_{i+2}^{(1)}$ у точках.

$x_{i+1} = x_i + h_i$, $x_{i+2} = x_{i+1} + h_i$, з кроком h_i і розв'язок $y_{i+2}^{(2)}$ в точці $x_{i+2} = x_i + 2h_i$ з кроком $2h_i$. Тоді відносна локальна похибка

$erru$ розв'язку в точці x_{i+2} з точністю до $O(h^{p+1})$ визначається співвідношенням

$$erru = \frac{1}{2^{p-1}} \frac{err}{\max\{1, \|y_{i+2}^{(2)}\|, \|y_{i+2}^{(2)}\|\}}.$$

Величина нового кроку h_N записується формулою

$$h_N = h_i \min \left\{ facmax, \max(facmin, fac(\frac{eps}{erru}^{\frac{1}{p+1}})) \right\}. \quad //$$

Константи fac , $facmin$, $facmax$ характеризують ступінь ризику під час вибору нового кроку $[2, 3, 5]$. Рекомендується добирати $fac \in \{0.8, 0.9, 1/0.25^{1/(p+1)}, 1/0.38^{1/(p+1)}\}$, $facmin = 0.1$, $facmax \in [1.5; 5]$.

Якщо $erru \leq eps$, значення $y_{i+1}^{(1)}$, $y_{i+2}^{(1)}$ вважаються задовільними і пошук розв'язку продовжується з нової точки x_{i+2} з новим кроком $h_{i+2} = h_N$.

Якщо $erru > eps$, обидва кроки відкидаються і знову здійснюється пошук розв'язку починаючи з точки x_i з новим кроком $h_i = h_N$. При цьому після відкинутих кроків, добираючи новий крок, приймаємо в $//$ $facmax = 1$.

3. Вкладені методи РК. Дещо інший спосіб обчислення локальної похибки дають так звані вкладені методи РК. Ідея їх полягає в знаходженні таких коефіцієнтів α_j , β_{j2} , ρ_j , $\hat{\rho}_j$, які крім наближеного значення розв'язку y_{i+1} порядку p згідно з $//$ дають інше значення наближеного розв'язку:

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^q \hat{\rho}_j k_j$$

порядку q /як правило $q = p-1$ або $q = p+1$). Вважатимемо, що $p > q$.

Тоді відносна локальна похибка $erru$ у точці x_{i+1} з точністю до $O(h^{p+1})$ виражається співвідношенням

$$erru = \frac{1}{|h^{q-p-1}|} \frac{\|y_{i+1} - \hat{y}_{i+1}\|}{\max\{1, \|y_{i+1}\|, \|\hat{y}_{i+1}\|\}}.$$

Добір нового кроку h_N у точці x_{i+1} здійснюється, як і для явних методів РК, згідно з $//$.

4. Числовий приклад. За допомогою явних і вкладених методів РК, коефіцієнти яких наведені у праці $[3]$, зінтегровані деякі системи лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь.

Наведемо приклад задачі Коші для системи четвертого порядку:

$$\begin{cases} y_1' = 2xy_1y_4, \\ y_2' = 10xy_1^5y_4, \\ y_3' = 2xy_4, \\ y_4' = -2x(y_3 - 4), \end{cases} \quad x \in (0; \pi] \\ y_j(0) = 1, j = \overline{1, 4}.$$

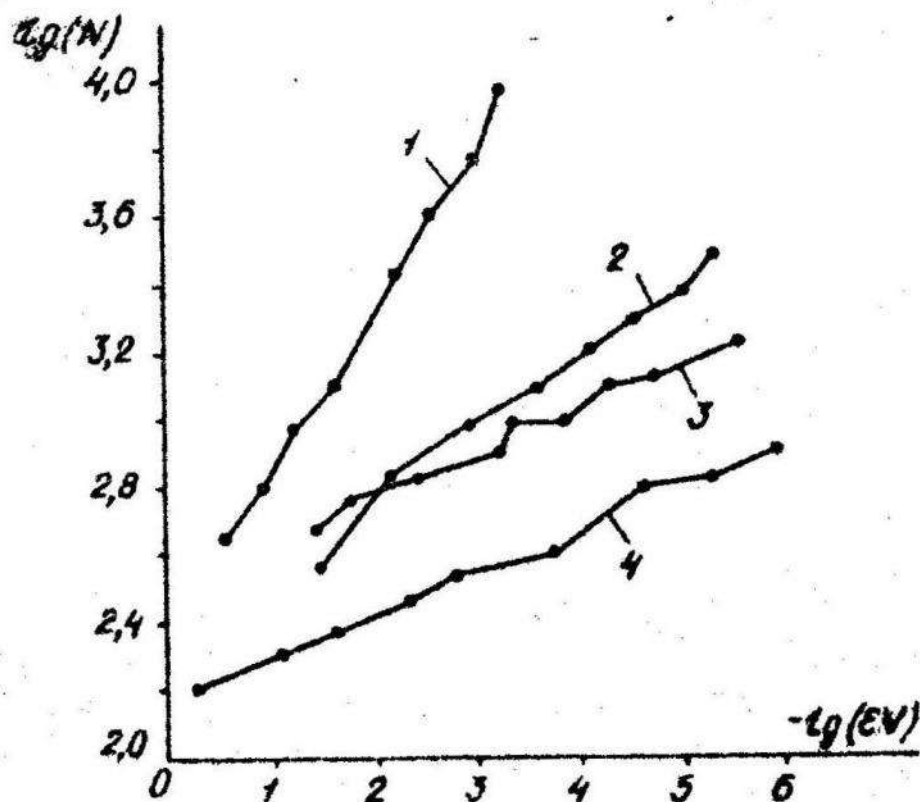
191

Аналітичний розв'язок якої має вигляд

$$y_1 = \exp(\sin(x^2)), \quad y_2 = \exp(5 \sin(x^2)), \\ y_3 = \sin(x^2) + 1, \quad y_4 = \cos(x^2).$$

Ця система розв'язувалась як явними, так і вкритими методами. У серії розрахунків допустима відносна локальна похибка eps змінювалась від 10^{-2} до 10^{-7} /в удосконаленому методі Вундера-Косі до 10^{-6} /. Кожен наступне значення eps в $\sqrt{10}$ разів було менше від попереднього. Фактори ризику f_{ac} , f_{actin} , f_{actax} дорівнювали 0.9, 0.1, 4 відповідно.

На рис. 1 зображена залежність відносної глобальної похибки

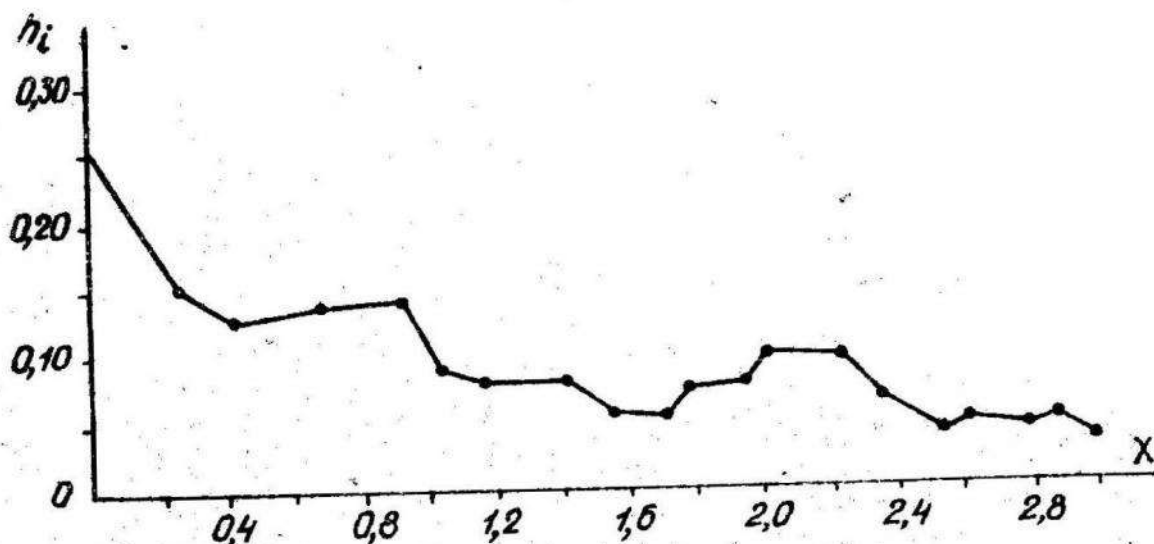


$$\varepsilon U = \max_{x_i} \max_j \frac{|y_i(x_i) - y_{ji}|}{\max\{|1, |y_j(x_i)|\}}$$

наближеного розв'язку на проміжку інтегрування від кількості N обчислень правих частин системи для чотирьох методів: удосконаленого методу Ейлера-Коші / $s = 2, p = 2$ / - лінія 1; класичного методу РК / $s = 4, p = 4$ / - лінія 2; семистадійного методу Бутчера шостого порядку / $s = 7, p = 6$ /; методу Дормана-Прінса / $s = 7, p = 5, q = 4$ / . Перші три методи - явні, останній - вкладений. По осі абсцис зі знаком мінус відкладені десяткові логарифми відносної глобальної похибки εU . По осі ординат - десяткові логарифми кількості обчислень N правих частин.

Результати числових експериментів свідчать, що ефективність методу (кількість обчислень N правих частин системи для досягнення заданої відносної глобальної похибки εU) зростає (N - зменшується) зі збільшенням порядку методу p . Найефективнішим методом для розв'язування задач Коші /1/-/2/ зі середньою точністю $\text{eps} = 10^{-2} - 10^{-7}$ є вкладений метод Дормана-Прінса. Це підтверджує результати числових досліджень [2,4].

На рис. 2 поданий графік довжин кроків h_i уздовж інтервалу інтегрування для задачі Коші /9/, побудованих методом Дормана-Прінса автоматичним вибором кроку при $\text{eps} = 10^{-7}$. Зауважимо, що



відносна глобальна похибка ε_U наближеного розв'язку при цьому становить 1.34×10^{-6} . Для визначення розв'язку здійснені 114 кроків, з них 16 відкинуті. Права частина при цьому обчислювалась 799 разів.

1. Бахвалов Н.С., Ил'ков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., 1987. 2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ванер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990. 3. Шербатий М.Б., Иванків К.С. Методичні вказівки до розробки програмного забезпечення розв'язування задачі Коші однокроковими методами. Львів, 1993. 4. Dormand T.R., Prince P.T. A family of embedded Runge-Kutta formulae // Comput. Appl. Math, 1980, Vol. 6. P.19-26. 5. Shampine L.F., Watts H.A. The art of writing a Runge-Kutta code // Comput. Appl. Math. 1979, Vol. 5. P. 93-121.

Стаття надійшла до редакції 10.03.98

УДК 539.214

Р.І.Кісіль

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗВ'ЯЗНОСТІ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ
В ЗАДАЧАХ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ
ТВЕРДИХ ТІЛ

Розглянемо процеси квазістатичного пружнопластичного деформування тонкостінних тіл. Постановку задачі пластичності здійснимо в рамках класичної моделі Прандтля-Рейса. Функцію навантаження оберемо у формі Мізеса. Для побудови математичної моделі використаємо гіпотезу адитивності деформацій, згідно з якою приріст повних деформацій в тілі може бути поданий у вигляді суми приростів пружних /зворотних/ деформацій $\Delta \varepsilon^e$ та пластичних /залишкових/ деформацій $\Delta \varepsilon^p$.

Вважається, що для тіла виконується лінійний зв'язок між приростом напружень $\Delta \sigma$ і приростом пружних деформацій $\Delta \varepsilon^e$. Для лінеаризації отриманої задачі використовується метод додаткових напружень, який дає змогу звести розв'язування фізично-нелінійної задачі деформування тіла до послідовності лінійних задач. Якщо тіло тонкостінне, доцільно здійснювати редукцію лінійних задач до двовимірних. При цьому використовуємо гіпотези деформування типу Тимошенки.

© Кісіль Р.І., 1995