

відносна глобальна похибка ε_U наближеного розв'язку при цьому становить 1.34×10^{-6} . Для визначення розв'язку здійснені 114 кроків, з них 16 відкинуті. Права частина при цьому обчислювалась 799 разів.

1. Бахвалов Н.С., Ил'ков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., 1987. 2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ванер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990. 3. Шербатий М.Б., Иванків К.С. Методичні вказівки до розробки програмного забезпечення розв'язування задачі Коші однокроковими методами. Львів, 1993. 4. Dormand T.R., Prince P.T. A family of embedded Runge-Kutta formulae // Comput. Appl. Math, 1980, Vol. 6. P.19-26. 5. Shampine L.F., Watts H.A. The art of writing a Runge-Kutta code // Comput. Appl. Math. 1979, Vol. 5. P. 93-121.

Стаття надійшла до редакції 10.03.98

УДК 539.214

Р.І.Кісіль

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗВ'ЯЗНОСТІ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ
В ЗАДАЧАХ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ
ТВЕРДИХ ТІЛ

Розглянемо процеси квазістатичного пружнопластичного деформування тонкостінних тіл. Постановку задачі пластичності здійснимо в рамках класичної моделі Прандтля-Рейса. Функцію навантаження оберемо у формі Мізеса. Для побудови математичної моделі використаємо гіпотезу адитивності деформацій, згідно з якою приріст повних деформацій в тілі може бути поданий у вигляді суми приростів пружних /зворотних/ деформацій $\Delta \varepsilon^e$ та пластичних /залишкових/ деформацій $\Delta \varepsilon^p$.

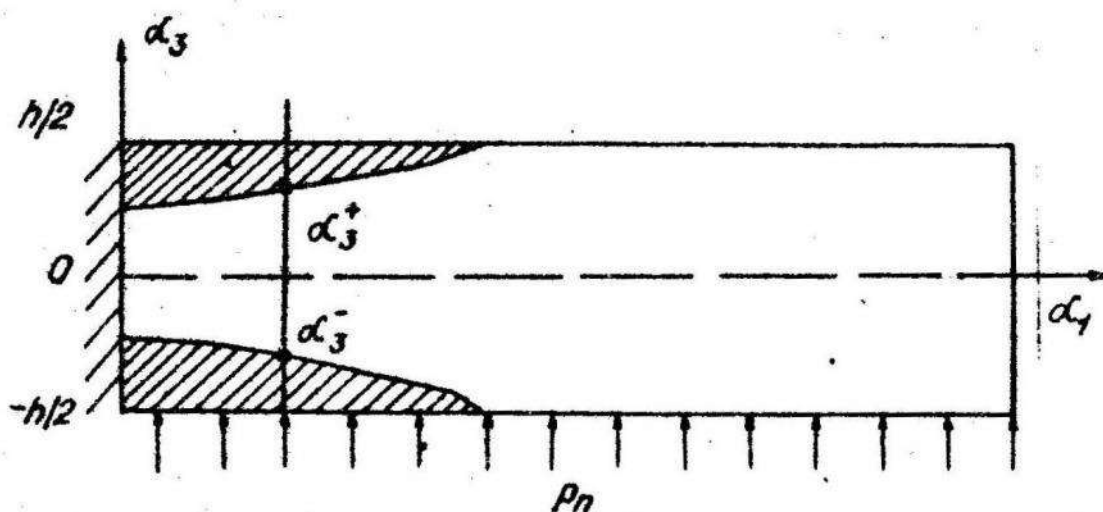
Вважається, що для тіла виконується лінійний зв'язок між приростом напружень $\Delta \sigma$ і приростом пружних деформацій $\Delta \varepsilon^e$. Для лінеаризації отриманої задачі використовується метод додаткових напружень, який дає змогу звести розв'язування фізично-нелінійної задачі деформування тіла до послідовності лінійних задач. Якщо тіло тонкостінне, доцільно здійснювати редукцію лінійних задач до двовимірних. При цьому використовуємо гіпотези деформування типу Тимошенки.

© Кісіль Р.І., 1995

Після розв'язання редукованої задачі ці гіпотези дають змогу відтворювати просторові поля деформацій. Обчислення просторових полів напружень здійснюється в рамках тривимірної теорії пружнопластичного деформування.

Величини напружень і пластичних деформацій обчислюватимемо у певній множині точок з проміжку $[-h/2; h/2]$ де h – товщина тіла. Тоді закон розподілу пластичних деформацій по товщині тіла можна подати у кусково-лінійному вигляді.

Описаний алгоритм використовували для дослідження пружно-пластичного деформування смуги-пластини /див. рисунок 4/.



Край пластини жорстко зашпелений з одного боку і вільний з іншого. Товщина $h = 0,005$ м, довжина $l = 0,1$ м, модуль Юнга $E = 2,1 \times 10^5$ МПа, межа текучості $\sigma_T = 245$ МПа. Розглядали випадок дослідження напружено-деформованого стану пластини з ідеально пластичного матеріалу під дією рівномірного тиску $p_n = 0,305$ МПа.

Для дослідження збіжності ітераційного процесу обирали $n = 2k-1$ – точкове рівномірне розбиття по товщині пластини. У табл. 1 та 2 наведені значення пластичних деформацій та інтенсивності напружень по товщині пластини в точках $\alpha_1 = 0,0$ /випадок 1/ та $\alpha_1 = 0,00625$ /випадок 2/ при $\nu = 0,5$ та $\nu = 0,3$ відповідно. Крім цього, слід зазначити, що при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,5$, $\epsilon_2^p = 0,3$ огляду на симетрію наведені результати лише для $\alpha_3 > 0$.

Аналізуючи величини пластичних деформацій по товщині тіла, можна зауважити, що їх розподіл дещо різниться від лінійного розподілу в зоні виникнення пластичних деформацій при $\nu = 0,3$; при $\nu = 0,5$

Таблица 1

N_z 3/n	$\alpha_3 \times h/2$	$k = 3$		$k = 6$		Гипотеза	
		$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	σ_{int}	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	σ_{int}	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	σ_{int}
1	I	-0.6389	245	-0.5833	245	-0.5602	245
	0.833	-	-	-0.3172	245	-0.2379	245
	0.666	-0.0882	245	-0.0511	245	-0.0357	245
	0.5	-	-	0.0	193.2	0.0	190.1
2	I	-0.2500	245	-0.1817	245	-0.1739	245
	0.833	-	-	0.0	240.8	0.0	239.6
	0.666	0.0	203.6	0.0	192.6	0.0	191.6
	0.5	-	-	0.0	144.6	0.0	143.8

Таблица 2

N_z 3/n	$\alpha_3 \times h/2$	$k = 6$			Гипотеза		
		$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	$\varepsilon_2^p \times 10^{-3}$	σ_{int}	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	$\varepsilon_2^p \times 10^{-3}$	σ_{int}
1	I	-0.8397	0.1170	245	-0.7987	0.1136	245
	0.833	-0.4972	0.0833	245	-0.4626	0.0658	245
	0.666	-0.1538	0.0322	245	-0.1264	0.0180	245
	0.5	0.0	0.0	207.3	0.0	0.0	203.1
2	I	-0.2773	0.0534	245	-0.2693	0.0521	245
	0.833	-0.0279	0.0064	245	-0.0212	0.0042	245
	0.666	0.0	0.0	200.4	0.0	0.0	199.3
	0.5	0.0	0.0	150.4	0.0	0.0	149.7

він лінійний [1,2]. Виходячи з цього, розглядали випадок дослідження пружнопластичного деформування смуги-пластини з гіпотезою наближеного 3-лінійного розподілу пластичних деформацій по товщині тіла:

$$\varepsilon_i^p(\alpha_3) = \begin{cases} -\varepsilon_i^{p-} \frac{\alpha_3 - \alpha_3^-}{h/2 + \alpha_3^-}, & -h/2 \leq \alpha_3 < \alpha_3^-, \\ 0, & \alpha_3^- \leq \alpha_3 \leq \alpha_3^+, \\ \varepsilon_i^{p+} \frac{\alpha_3 - \alpha_3^+}{h/2 - \alpha_3^+}, & \alpha_3^+ < \alpha_3 \leq h/2, \end{cases}$$

де $\varepsilon_i^{p-}, \varepsilon_i^{p+}$, $i = 1, 2$ - значення пластичних деформацій на краях $-h/2$ та $h/2$ відповідно; $\alpha_3^-(\alpha_1)$, $\alpha_3^+(\alpha_1)$ - точки, що розташовані на межі зони виникнення пластичних деформацій по товщині пластини. Такий підхід дає змогу зменшити кількість точок розбиття проміжку $[-h/2; h/2]$ до чотирьох: двох країв і точок α_3^- , α_3^+ , а також дає змогу точніше визначати зону пластичних деформацій. Не шукаючи α_3^- , α_3^+ ми могли лише стверджувати, що у деяких точках розбиття вже не виникають пластичні деформації. Деякою особливістю 3-лінійного підходу є те, що точки α_3^- , α_3^+ не є стаціонарними на відміну від вузлів розбиття, а постійно змінюються зі зростанням області пластичних деформацій углиб. Це вимагає перерахунку на кожній ітерації значень напружень, виходячи з лінійного їх розподілу по товщині тіла у пружній зоні. У табл. 1 та 2 наведені отримані з використанням такої гіпотези величини пластичних деформацій та інтенсивностей напружень на край пластини /у точці $\alpha_3 = h/2$ /, а у внутрішніх точках ці значення обчислені, виходячи з закону розподілу. Отримані значення α_3^+ введені у табл. 3.

Т а б л и ц я 3

№ з/п	γ = 0.5				γ = 0.3	
	k = 3	k = 6	Гіпотеза	Аналіт.	k = 6	Гіпотеза
1	0.001531	0.001585	0.001608	0.001605	0.001478	0.001508
2	0.002004	0.002119	0.002129	0.002129	0.002036	0.002047

Звичайно, використовуючи підхід із розбиттям декількома точками по товщині, ми також можемо уточнити межу зони виникнення пластичних деформацій, знаходячи точки α_3^- , α_3^+ . Отримані відповідні значення наведені в табл. 3, де вміщені також відомі з літератури [1]

значення точок α_3^+ при $\nu = 0,5$. Із наведених результатів бачимо, як розмір зони виникнення пластичних деформацій по товщині тіла впливає на величину σ_{int} в області виникнення лише пружних деформацій.

Відповіді отримані при $\varepsilon = 0,0001$. Така величина забезпечує достатню точність результатів, що впливає з результатів досліджень, наведених у табл. 4. Розглядався випадок $\nu = 0,5$ при застосуванні гіпотези 3-лінійного розподілу.

Т а б л и ц я 4

M_2 з/п	$\varepsilon = 0.01$		$\varepsilon = 0.001$		$\varepsilon = 0.0005$	
	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	$\alpha_3^+ \times 10^{-2}$	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	$\alpha_3^+ \times 10^{-2}$	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	$\alpha_3^+ \times 10^{-2}$
1	-0.4451	0.1735	-0.5327	0.1637	-0.5472	0.1622
2	-0.1710	0.2138	-0.1758	0.2129	-0.1759	0.2129

Таким чином, забезпечення точності результатів при використанні першого підходу вимагає великої кількості точок розбиття по товщині тіла. Особливо густота точок зростає за невеликих пластичних деформацій. Слід також брати до уваги, що тривалість обчислень для досить великої кількості точок розбиття та розмір використовуваної пам'яті комп'ютера є більшими, ніж у разі використання вказаної гіпотези.

1. Качанов Л.М. Механика пластических сред. М., 1948.
2. Мокаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле. К., 1991.
3. Муха І.С. Чисельна схема розв'язування задач нелінійного деформування твердих тіл при наявності початкових переміщень // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1990. Вип. 33. С. 22-26.

Стаття надійшла до редакції 14.03.95