УДК 518:517.948

Л.Л.Роман

ПРО ОДИН ЧИСЛОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПЕРАТОРНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Для побудови числових методів розв'язування задачі операторного програмування

$$f_0(t, x(t)) \longrightarrow \min ; \qquad /1/$$

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x(t)) ; \qquad /2/$$

$$g(x_0, x_1) = d ; \qquad /3/$$

$$A^- \leq A(t, x(t)) \leq A^+, \quad 0 \leq t \leq 1 , \qquad /4/$$

де $x(t)$, $f_1(t, x(t))$, $g(x_0, x_1)$, $A(t, x(t))$ – вектор-функції розмірністю n; A^-, A^+ – задані вектори; $f_0(t, x(t))$ – задана функція. Від неперервної задачі перейдемо до її дискретного аналога. Для цього розіб'ємо відрізок $[0, 1]$ на $l-1$ інтервал точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = 1$. Зінтегруємо систему /2/ за формулою Ейлера та одержимо

$$\begin{aligned} & x_{i+1} = x_i + \tau_i f_1(x_i, t_i), \\ & x_i = x(t_i), \ \tau_i = t_{i+1} - t_i , \\ & i = 1, \ldots, l-1 . \end{aligned} \qquad /5/$$

Задавши початковий вектор

$$x_0 = x(t_0) = w_0 , \qquad /6/$$

послідовно визначимо компоненти вектора

$$x = [x_0, x_1, \ldots, x_l] = x(w_0)$$

і побудуємо функцію $q(w_0) = g(w_0, x_l(w_0)) - d$. У результаті задача /1/–/4/ зводиться до знаходження розв'язку задачі

$$f_0(T, x(w_0)) \longrightarrow \min , \qquad /7/$$

$$q(w_0) = 0 , \qquad /8/$$

$$\begin{aligned} & h(w_0) \leq 0, \ h = (h^-, h^+), \\ & h^- = A^- - A(T, x(w_0)), \\ & h^+ = A(T, x(w_0)) - A^+ , \\ & T = [t_0, t_1, \ldots, t_l] . \end{aligned} \qquad /9/$$

Побудована задача /7/–/8/ є окремим спеціальним випадком задачі нелінійного програмування. Її розв"язок шукатимемо таким чином: задамо значення w_0, обчислимо $f_0(T, x(w_0))$, $q(w_0)$, $h(w_0)$, побудуємо модифіковану функцію Лагранжа, яку будемо мінімізувати по w_0 одним із методів безумовної мінімізації. Розглянемо застосування методу Ньютона для розв"язування задачі /7/–/9/, побудувавши модифіковану функцію Лагранжа у такий спосіб:

$$R(w_0, u, v) = f_0(T, x(w_0)) + \sum_{i=1}^{n} u_i q_i(w_0) + \sum_{j=1}^{n} v_j^2 h_j(w_0). \qquad /10/$$

Метод Ньютона знаходження $\min R(w_0, u, v)$ по w_0 приводить до розв"язування системи лінійних рівнянь:

$$\frac{d^2R(w_0^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})}{dw_0\, dw_0}(w_0^{(k+1)} - w_0^{(k)}) + \frac{dq(w_0^{(k)})}{dw_0}(u^{(k+1)} - u^{(k)}) +$$

$$+2\sum_{j=1}^{n} v_j^{(k)} \frac{dh_j(w_0^{(k)})}{dw_0}(v_j^{(k+1)} - v_j^{(k)}) = -\frac{dR(w_0^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})}{dw_0},$$

$$\left[\frac{dq(w_0^{(k)})}{dw_0}\right]^T (w_0^{(k+1)} - w_0^{(k)}) = -g(w_0^{(k)}), \qquad /11/$$

$$v_j \left< \frac{dh_j(w_0^{(k)})}{dw}, w_0^{(k+1)} - w_0^{(k)} \right> + h_j(w_0^{(k)})(v_j^{(k+1)} - v_j^{(k)}) = -v_j^{(k)} h_j(w_0^{(k)}),$$

де матриця $\frac{d^2R}{dw_0\, dw_0}$ визначається за рекурентними формулами з праці [2]. Зауважимо, що під час реалізації цього процесу на ЕОМ, зокрема під час розв"язування системи /11/, в кожному конкретному випадку додатково досліджуються умови, коли визначник системи може перетворитися на нуль, виникає проблема збереження матриці других похідних в пам"яті ЕОМ.

Запропонована методика розв"язування задачі /1/–/4/ застосована для розв"язування нелінійних задач пружності. Досліджена задача визначення у циліндричній оболонці з залежними від температури характеристиками матеріалу осесиметричних температурних полів, що забезпечують максимально низький рівень температурних напруг [1]:

$$F(W,T) = \frac{d^2}{dx^2}\left[E(T)\frac{d^2W}{dx^2}\right] + 4P^4 E(T)(W - \varepsilon_T \alpha T) = 0, \qquad /12/$$

$$T = \frac{t}{t_0},\ W = W_1/R,\ E(T) = E(t)/E_n,$$

$$\alpha(T) = \alpha(t)/\alpha_0,\ x = Z/l,$$

$$\varepsilon_T = \alpha_0 t_0,\ P = bl/2R,\ b^4 = 3(1 - V^2)R^2/4h^2,$$

$$T^-(x) < T(x) < T^+(x).$$

Уведенням нових змінних

$$z_1 = W - \varepsilon_{T_0}\alpha T,\ z_2 = \frac{dW}{dx},\ z_3 = \frac{d^2W}{dx^2},\ z_4 = \frac{d}{dx}\left(E\frac{d^2W}{dx^2}\right),$$

$$z_5 = T,\ z_6 = \lambda,\ z_7 = \frac{d\lambda}{dx},\ \ldots,\ z_8 = \frac{d^2\lambda}{dx^2},\ z_9 = \frac{d^3\lambda}{dx^3}$$

задача /I2/ зводиться до задачі вигляду /I/-/4/. Числові дослідження виконані для циліндричної оболонки з параметрами $\rho = 10$ $h/R = 1/20$, $\nu = 0{,}3$, виготовленої з матеріалу IXI8Н9Т. Температурні залежності функцій E і α брали лінійними та квадратичними. Результати обчислень узгоджуються з результатами, що наведені у праці /I/.

I. Б а р т і ш М.Я., Р о м а н Л.Л. Застосування методів типу Ньютона-Канторовича у нелінійних задачах механіки // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. -мех.-мат. I982. Вип.I9. С.58-62. 2. Е в т у ш е н к о Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., I982.

Стаття надійшла до редколегії I4.03.95

УДК 5I7.9

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко,
Н.В.Горбачова

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРА

Нехай функція $f(x,\xi,y)$ неперервна в обмеженій області $\mathcal{D}$, причому по змінній y задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L, $g(x)$ - неперервна функція. Розглянемо таке нелінійне інтегральне рівняння Вольтера:

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} f(x,\xi,y(\xi))d\xi,\quad |x-x_0| \le h, \qquad /I/$$

За зроблених вище припущень воно має єдиний розв"язок, який можна побудувати методом послідовних наближень. Як відомо, успіх цієї процедури багато в чому залежить від вдалого вибору нульового наближення. Далі опишемо метод лінеаризації рівняння /I/ та подамо оцінку близькості лінеаризованого та точного розв"язків.

Позначаємо $y_0 = y(x_0) \equiv g(x_0)$ і припускаємо, що $y_0 \ne 0$ /цього завжди можна досягнути за допомогою заміни $y(x) = u(x) + a$, де $a = const \ne 0$ /. Лінеаризований розв"язок $\tilde{y}(x)$ шукаємо, опираючись на таке лінійне рівняння:

$$\tilde{y}(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} \kappa(x,\xi)\tilde{y}(\xi)d\xi,\quad \kappa(x,\xi) = \frac{f(x,\xi,y_0)}{y_0}, \qquad /2/$$