Уведенням нових змінних

$$z_1 = W - \varepsilon_{T_0}\alpha T,\quad z_2 = \frac{dW}{dx},\quad z_3 = \frac{d^2W}{dx^2},\quad z_4 = \frac{d}{dx}\left(E\,\frac{d^2W}{dx^2}\right),$$

$$z_5 = T,\quad z_6 = \lambda,\quad z_7 = \frac{d\lambda}{dx},\ \ldots,\ z_8 = \frac{d^2\lambda}{dx^2},\quad z_9 = \frac{d^3\lambda}{dx^3}$$

задача /I2/ зводиться до задачі вигляду /I/–/4/. Числові дослідження виконані для циліндричної оболонки з параметрами $\rho = 10$ $h/R = 1/20$, $\nu = 0{,}3$, виготовленої з матеріалу IXI8H9T. Температурні залежності функцій E і α брали лінійними та квадратичними. Результати обчислень узгоджуються з результатами, що наведені у праці /I/.

I. Б а р т і ш М.Я., Р о м а н Л.Л. Застосування методів типу Ньютона-Канторовича у нелінійних задачах механіки // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. -мех.-мат. 1982. Вип.I9. С.58–62. 2. Е в т у ш е н к о Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., 1982.

Стаття надійшла до редколегії I4.03.95

УДК 5I7.9

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко,
Н.В.Горбачова

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРА

Нехай функція $f(x,\xi,y)$ неперервна в обмеженій області $\mathcal{D}$, причому по змінній y задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $\mathcal{L}$, $g(x)$ – неперервна функція. Розглянемо таке нелінійне інтегральне рівняння Вольтера:

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} f(x,\xi,y(\xi))\,d\xi\,,\quad |x - x_0| \le h. \qquad /I/$$

За зроблених вище припущень воно має єдиний розв"язок, який можна побудувати методом послідовних наближень. Як відомо, успіх цієї процедури багато в чому залежить від вдалого вибору нульового наближення. Далі опишемо метод лінеаризації рівняння /I/ та подамо оцінку близькості лінеаризованого та точного розв"язків.

Позначаємо $y_0 = y(x_0) \equiv g(x_0)$ і припускаємо, що $y_0 \ne 0$ /цього завжди можна досягнути за допомогою заміни $y(x) = u(x) + a$, де $a = const \ne 0$ /. Лінеаризований розв"язок $\tilde{y}(x)$ шукаємо, опираючись на таке лінійне рівняння:

$$\tilde{y}(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} \kappa(x,\xi)\tilde{y}(\xi)\,d\xi\,,\quad \kappa(x,\xi) = \frac{f(x,\xi,y_0)}{y_0}, \qquad /2/$$

Для оцінки близькості розв"язків рівнянь уводимо позначення: $z(x)=y(x)-\tilde{y}(x)$. Тоді з /I/ та /2/ маємо для $z(x)$:

$$z(x)=\int_{x_0}^{x}[f(x,\xi,y(\xi))-K(x,\xi)\tilde{y}(\xi)]d\xi. \qquad /3/$$

Оскільки

$$|f(x,\xi,y(\xi))-K(x,\xi)\tilde{y}(\xi)|\leq \mathcal{L}|y(\xi)-\tilde{y}(\xi)|+(\mathcal{L}+K)|\tilde{y}(\xi)-y_0|, \qquad /4/$$

$$K=\max_{\mathcal{D}}\left|\frac{f(x,\xi,y_0)}{y_0}\right|.$$

тому в /3/ маємо

$$|z(x)|\leq \varphi(x)+\mathcal{L}\left|\int_{x_0}^{x}|z(\xi)|d\xi\right|,$$

де введені позначення:

$$\varphi(x)=(\mathcal{L}+K)\left|\int_{x_0}^{x}|\tilde{y}(\xi)-y_0|\,d\xi\right|.$$

Опираючись на відому нерівність Белмана-Гронуолла [I], остаточно отримуємо

$$|z(x)|\leq\varphi(x)+\mathcal{L}\left|\int_{x_0}^{x}\varphi(\xi)\exp[\mathcal{L}(x-\xi)]\,d\xi\right|; \qquad /5/$$

$$\int_{x_0}^{x}|z(\xi)|\,d\xi\leq\int_{x_0}^{x}\varphi(\xi)\exp[\mathcal{L}(x-\xi)]\,d\xi. \qquad /6/$$

Формула /5/ дає поточкову оцінку близькості розв"язків рівнянь /I/ та /2/, що має практичне застосування для контролю процедури наближення шуканого розв"язку.

З /3/-/4/ випливає також така оцінка близькості розв"язків рівнянь /I/ та /2/:

$$\|z(x)\|_\alpha\leq\frac{\mathcal{L}+K}{\alpha-\mathcal{L}}\|\tilde{y}(x)-y_0\|_\alpha , \qquad /7/$$

де

$$\|z(x)\|_\alpha=\max_{|x-x_0|\leq h}\left\{|z(x)\exp[-\alpha(x-x_0)]\right\}, \qquad /8/$$

Сталу α у /7/-/8/ вибираємо з умови $\alpha>\mathcal{L}$; $\mathcal{L}$ та K визначені раніше.

Відповідна оцінка у рівномірній нормі набирає вигляду

$$\|z(x)\|_C\leq\frac{h[\mathcal{L}+K]}{1-h\mathcal{L}}\|\tilde{y}(x)-y_0\|_C , \qquad /9/$$

де $2h$ – довжина проміжку зміни незалежної x визначається з умови $h<\frac{1}{\mathcal{L}}$.

Запропоновану лінеаризацію можна модифікувати покроковим методом, коли на кожному наступному кроці зміни x за початкове значення $y_0 = y(x_0)$ обираємо попередньо побудований лінеаризований розв"язок у відповідній граничній точці попереднього кроку. Цю ж лінеаризацію можна застосувати для розв"язування таких інтегро-диференціальних рівнянь Вольтера:

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} f(x,\xi,y(\xi),y'(\xi),\dots,y^{(n)}(\xi))\,d\xi\,, \quad |x-x_0| \le h. \qquad /10/$$

Для цього припускаємо, що $y_0 = y(x_0) = y(x_0) \neq 0$, а $y_i = y^{(i)}(x_0)$, $i=\overline{1,n}$ можуть бути визначені з рівняння /10/ після диференціювання по x n-разів та приймання $x = x_0$ в отриманих при цьому виразах. Тоді лінеаризований розв"язок /10/ пропонується шукати з рівняння:

$$\tilde{y}(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,\xi)\tilde{y}(\xi)\,d\xi\,, \quad K(x,\xi) = \frac{f(x,\xi,y_0,y_1,\dots,y_n)}{y_0}. \qquad /11/$$

Припускаючи, що $g(x), f(x,\xi,y,y',\dots,y^{(n)})$ неперервно диференційовані по x n-разів та задовольняє умову Ліпшиця по $y, y', \dots, y^{(n)}$ рівномірно щодо x, ξ, легко отримати оцінки вигляду /5/, /7/, /9/ для різниці між розв"язками рівнянь /10/ та /11/.

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954. 2. Богданов Ю.С., Сыройд Ю.Б. Дифференциальные уравнения. Минск, 19_3.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.95

УДК 517.958:519.6

Н.П.Головач

ЗАСТОСУВАННЯ ПРЯМОГО МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

В області $\Omega \in R^2$ із межею Γ розглянемо задачу нестаціонарної теплопровідності, що описується рівнянням

$$\nabla^2 u(x,t) - \frac{1}{k}\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0; \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T] \qquad /1/$$

з початковою умовою при $t = 0$ в області $\bar{\Omega}$:

$$u(x,t) = u_0(x), \qquad /2/$$

де $u_0(x)$ – задана функція,