

де значення $y_0 = y(x_0)$ обираємо попередньо побудований лінеаризований розв'язок у відповідній граничній точці попереднього кроку. Цю ж лінеаризацію можна застосовувати для розв'язування таких інтегро-диференціальних рівнянь Вольтера:

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^x f(x, \xi, y(\xi), y'(\xi), \dots, y^{(n)}(\xi)) d\xi, \quad |x - x_0| \leq h. \quad /10/$$

Для цього припускаємо, що $y_0 = y(x_0) = y(x_0) \neq 0$, а $y_i = y^{(i)}(x_0)$, $i = \overline{1, n}$ можуть бути визначені з рівняння /10/ після диференціювання по x n -разів та приймання $x = x_0$ в отриманих при цьому виразах. Тоді лінеаризований розв'язок /10/ пропонується шукати з рівняння:

$$\tilde{y}(x) = g(x) + \int_{x_0}^x K(x, \xi) \tilde{y}(\xi) d\xi, \quad K(x, \xi) = \frac{f(x, \xi, y_0, y_1, \dots, y_n)}{y_0}. \quad /11/$$

Припускаючи, що $g(x), f(x, \xi, y, y', \dots, y^{(n)})$ неперервно диференційована по x n -разів та задовольняє умову Ліпшица по $y, y', \dots, y^{(n)}$ рівномірно щодо x, ξ , легко отримати оцінки вигляду /5/, /7/, /9/ для різниці між розв'язками рівнянь /10/ та /11/.

І. Б е л я н а Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954. 2. Б о г д а н о в Ю.С., С и - р о и д Д.Б. Дифференциальные уравнения. Минск, 1963.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.95

УДК 517.958:519.6

Н.П.Головач
ЗАСТОСУВАННЯ ПРЯМОГО МЕТОДУ ІГРАНИЧНИХ
ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ
НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

В області $\Omega \in R^2$ із межею Γ розглянемо задачу нестационарної теплопровідності, що описується рівнянням

$$\nabla^2 u(x, t) - \frac{1}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0; \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, \tau] \quad /1/$$

з початковою умовою при $t = 0$ в області $\bar{\Omega}$:

$$u(x, t) = u_0(x), \quad /2/$$

де $u_0(x)$ - задана функція,

© Головач Н.П., 1995

та граничні умови:

для температури при $t > 0$ на ділянці Γ_1 границі Γ :

$$u(x, t) = \bar{u}(x); \quad /3/$$

і теплового потоку при $t > 0$ на ділянці Γ_2 границі Γ :

$$q(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \bar{q}(t). \quad /4/$$

тут риском позначені задані величини.

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

На основі методу зв'язаних нев'язок розв'язання початково-крайової задачі /1/-/4/ зводиться до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, що має вигляд [2]

$$c(\xi)u(\xi, T) + k \int_0^T \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x, T, t) d\Gamma(x) dt = \quad /5/$$

$$= k \int_0^T \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x, T, t) d\Gamma(x) dt + \int_{\Omega} u_0(x) u^*(\xi, x, T, 0) d\Omega(x),$$

де u^* , q^* - відповідно фундаментальний розв'язок і його нормальна похідна:

$$u^*(\xi, x, T, t) = \frac{1}{4\pi k(T-t)} \exp\left\{-\frac{z^2}{4k(T-t)}\right\},$$

$$q^*(\xi, x, T, t) = \frac{d}{8\pi k^2(T-t)} \exp\left\{-\frac{z^2}{4k(T-t)}\right\}.$$

Тут $z^2 = z_i z_i$, $d = z_i n_i(x)$, $z_i = x_i(\xi) - x_i(x)$, $i = 1, 2$, $n_i(x)$ - напрямні косинуси зовнішньої нормалі $n(x)$ до границі Γ ; $c(\xi)$ - кутовий коефіцієнт у граничній точці $\xi = \xi(\xi_1, \xi_2)$, який у випадку гладкої границі дорівнює $1/2$.

Для розв'язання рівняння /5/ використовуємо прямий метод граничних елементів /МГЕ/ [1, 2]. Тобто шукані функції u та q подаємо у вигляді

$$u(x, t) = \varphi(x)^T \psi(t) u^n, \quad /6/$$

$$q(x, t) = \varphi(x)^T \psi(t) q^n,$$

де $\varphi(x)$, $\psi(t)$ - базисні функції відповідно просторових і часової змінної; u^n , q^n - вектори вузлових значень u і q .

Для цього границю Γ розбиваємо на N елементів, в інтервал часу $[0, T]$ - на F проміжків. Область Ω зображаємо у вигляді об'єднання S скінченних елементів. Геометрію граничних елементів моделюємо лінійними відрізками або криволінійними параболою.

Використовуючи метод колокацій та апроксимації /6/, запишемо рівняння /5/ в дискретній формі [2, 4].

для схеми 1:

$$c_i u_F^i + k \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* \psi dt d\Gamma \right) u^n = k \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* \psi dt d\Gamma \right) q^n + \sum_{s=1}^S \int_{\Omega_s} u^* u_0 d\Omega; \quad /7/$$

Для схеми 2:

$$c_i u_F^i + k \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* \psi dt d\Gamma \right) u^n = k \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* \psi dt d\Gamma \right) q^n + \sum_{s=1}^S \int_{\Omega_s} u^* u_{f-1} d\Omega. \quad /8/$$

Чисельне дослідження задачі /1/-/4/ реалізовуємо, користуючись схемою /7/. Такий вибір зумовлений результатами порівняльного аналізу застосування обох схем до розв'язання одновимірної задачі нестационарної теплопровідності [4].

Розглянемо деякі аспекти числового розв'язання двовимірної задачі нестационарної теплопровідності на основі схеми /7/. Далі вважатимемо, що інтерполююча функція по часовій змінній кусково-постійна, тобто $\psi(t) \equiv 1$.

Записуючи рівняння /7/ для всіх вибраних на границі точок, отримуємо систему рівнянь [2]:

$$\sum_{f=1}^F H_{ff} U_F = \sum_{f=1}^F G_{ff} Q_f + B_0 U_0, \quad /9/$$

де елементи матриць H і G визначаються виразами /або їх комбінаціями/:

$$h_{ffij}^m = k \int_{\Gamma_j} \varphi_m \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt d\Gamma, \quad /10/$$

$$g_{ffij}^m = k \int_{\Gamma_j} \varphi_m \int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* dt d\Gamma,$$

де $H_{ffij} = \hat{H}_{ffij} + c_i \delta_{ff} \delta_{ij}$, δ_{ff} , δ_{ij} - символи Кронекера.

Оскільки в коректно поставленій задачі для рівняння /1/ задається тільки половина граничних умов, то систему лінійних алгебраїчних рівнянь /9/ можна використати для отримання значення невідомих функцій u чи q на границі. Система /9/ розв'язується для моменту часу $t = t_F$. Досліджено, що значення матриць U_{ff} та G_{ff} при $f = 1, 2, \dots, F-1$ відомі з попередніх кроків по часу і зберігаються в пам'яті ЕОМ. Тому на кожному

кроці по часу потрібно обчислити лише дві нові матриці /тільки у випадку, коли крок по часу є постійним/.

Інтеграли по часу у виразах /10/ обчислюємо аналітично [4]:

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt = \frac{d}{2\pi k z^2} \{ \exp(-a_{f-1}) - \exp(-a_f) \}; \quad /11/$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* dt = \frac{1}{4\pi k} \{ E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f) \}, \quad /12/$$

де $a_f = \frac{z^2}{4k(t_f - t_f)}$; $E_1(z)$ - інтегрально-показникова функція, яка обчислюється як [5]:

$$E_1(z) = - \int_z^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = -C - \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n(n!)},$$

де C - стала Ейлера, $C = 0,57721566$.

Із виразу a_f випливає, що у формулі /11/ треба прийняти $\exp(-a_f) = 0$, у формулі /12/ - $E_1(a_f) = 0$.

Ще раз зазначимо, що інтегруючи по просторових координатах, інтерполюючи функції φ вибираємо лінійними або квадратичними. Елементи матриць H_{ff} та G_{ff} , що не належать головній діагоналі обчислюємо числовим способом за допомогою звичайних квадратурних формул Гаусса шостого порядку.

Зауважимо, що діагональні коефіцієнти G_{ffii} у системі /9/ містять інтеграли з логарифмічною сингулярністю, які можна обчислити аналітично. Приміром, у випадку лінійних інтерполюючих функцій по просторових координатах маємо

$$G_{ffii} = \frac{l_{i-1}}{8\pi k} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(4\alpha_{i-1})^n}{n(n+1)(2n+1)(n!)} - \frac{1}{2} \{ C + \ln(16\alpha_{i-1}) \} + 3 \right] +$$

$$+ \frac{l_i}{8\pi k} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(4\alpha_i)^n}{n(n+1)(2n+1)(n!)} - \frac{1}{2} \{ C + \ln(16\alpha_i) \} + 3 \right], \quad /13/$$

де l_{i-1} , l_i - довжини двох граничних елементів, що стикаються у вузлі i .

$$\alpha_i = \frac{l_i}{16k\Delta t_f}. \quad /14/$$

Ряд у виразі /13/ збігається швидко при малих значеннях α . Тому вздовж відрізка, що лежить біля точки сингулярності, інтегрування виконуємо аналітично, оскільки в цьому випадку α завжди менше від 1, а по решті частині довжини елемента - з використанням квадратурної формули Гаусса. Довжину L частини граничного елемента, що допускає аналітичне інтегрування, визначимо з умовлення [14] із нерівності

$$L = 2(k\Delta t_f)^{1/2} \leq 1.$$

У випадку квадратичних інтерполюючих функцій по просторових координатах для обчислення інтеграла зі сингулярністю в середньому вузлі граничного елемента маємо

$$G_{FFii} = \frac{l_i}{\pi k} \left(\frac{4}{9} - \frac{5}{24} [c + \ln \alpha_i] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\alpha^n}{n(n+1)(n+3)(n!)} \right);$$

у решті випадків

$$G_{FFii} = \frac{l_{i-1}}{\pi k} \left(\frac{17}{72} - \frac{1}{24} [\ln 4\alpha_{i-1} + c] + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (4\alpha)^n \cdot \frac{(1-2n)}{n(n+1)(2n+1)(2n+3)(n!)} \right) +$$

$$\frac{l_i}{\pi k} \left(\frac{17}{72} - \frac{1}{24} [\ln 4\alpha_i + c] + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (4\alpha)^n \frac{(1-2n)}{n(n+1)(2n+1)(2n+3)(n!)} \right).$$

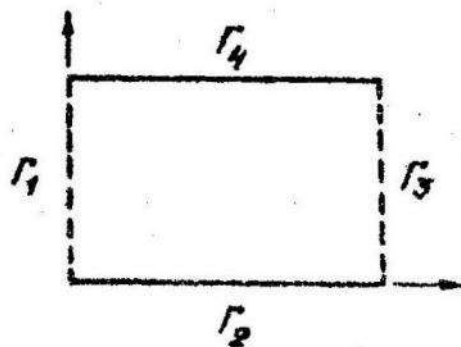
Діагональні елементи матриці H_{FF} у рівнянні /9/ містять сильну сингулярність /порядку $\frac{1}{2}$ / та інтегровані у сенсі головного значення Коші. У випадку лінійних елементів члени H_{FFii} тожовно дорівнюють 0, оскільки z і n ортогональні, тобто $d=0$.

Розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь /9/, отримуємо температуру u і тепловий потік q , для тих вузлів границі, в яких вони були досі невідомі з граничних умов.

При потребі, користуючись рівнянням /5/ у дискретному зображенні, знаходимо значення температури у будь-якій внутрішній точці області Ω .

Запропонований алгоритм реалізований у вигляді комплексу Сі-програм для ПЕОМ типу ІВМ РС/АТ.

Для апробації розробленої методики розглянута задача розподілу температури на границі квадратної області розміром 1×1 м з нульовою початковою температурою і коефіцієнтом теплопровідності $k=1$ Вт/(м°C) із заданими граничними умовами вигляду /див. рисунок/:



при

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_1 & \quad u = 1; \\ x \in \Gamma_3 & \quad u = 0; \\ x \in \Gamma_2 & \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0; \\ x \in \Gamma_4 & \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 1. \end{aligned}$$

У таблиці наведені результати / $u \cdot 100$ / в момент часу $t = 0,15$ с, отримані з кроком $\Delta t = 0,025$ /за допомогою лінійної апроксимації на сітці 10×6 та квадратичної - на сітці 5×3 . Числові результати запропонованої методики порівнювали з результатами обчислень методом скінченних елементів /МСЕ/ [3].

x	y = 0			y = 1		
	МСЕ	МТЕ лінійні	МТЕ квадратич.	МСЕ	МТЕ лінійні	МТЕ квадратич.
		апр.	апр.		апр.	апр.
0,1	866	823/814/	848/838/	1035	996/1001/	1030/1008/
0,2	735	684/676/	697/695/	982	927/933/	967/947/
0,3	606	562/555/	568/570/	900	847/853/	865/856/
0,4	492	448/443/	451/455/	810	756/764/	787/773/
0,5	387	347/343/	347/352/	713	662/671/	675/668/
0,6	292	259/256/	257/252/	611	567/577/	593/579/
0,7	206	183/182/	179/185/	502	468/480/	476/470/
0,8	133	119/119/	112/119/	379	363/376/	382/370/
0,9	063	069/070/	059/069/	234	242/257/	245/238/

П р и м і т к а . У дужках наведені результати досліджень розподілу температури, при отриманні яких не використовувались спеціальні методики виділення сингулярності в діагональних елементах матриць.

Одержані результати свідчать про ефективність запропонованого підходу.

І. Б е н е р д ж и П., Б а т е р ф и л д Р. Методи граничних елементов в прикладних науках. М., 1984. 2. Б р е б - б я К., Т е л л е с Ж., В р о у б е л Д. Методи граничных элементов. М., 1987. 3. В о в к В.Д., В о в к В.Н., Д и я к И.И. и др. Расчет и оптимизация баллонов электронно-лучевых пучков. // Материалы УП Всесоюз. конф. Новосибирск, 1982. С.147-155. 4. Г о л о в а ч Н.П., Д и я к И.И. Чисельне дослідження задачі теплопровідності прямим методом граничних елементів // Вісн. ДУ. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С.46-52. 5. Р ы ж и к И.М., Г р а д а т е й н И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.; Л., 1951.

Стаття надійшла до редакції 23.03.95