УДК 539.377

Б.В.Ковальчук, О.І.Гой

УЗАГАЛЬНЕННЯ ФОРМУЛИ ГРІНА В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ТЕРМОПРУЖНОСТІ, ЩО ВРАХОВУЄ ОРТОТРОПІЮ ЧАСУ РЕЛАКСАЦІЇ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ

Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω, обмежену поверхнею S, у природному стані має сталу температуру t_0. Унаслідок дії масових сил або джерел тепла в тілі виникають переміщення u_i і приріст температури $\theta = t - t_0$. Зміна температури спричинює виникнення деформацій e_{ij} та напружень σ_{ij}, які є функціями координат x_i і часу τ.

У праці [3] одержані основні інтегро-диференціальні рівняння узагальненої термопружності анізотропних тіл на основі узагальненого закону теплопровідності:

$$\left(1+\tau_p \frac{\partial}{\partial\tau}\right) q_p = -\lambda_{pj}^t t_{,j} \qquad (p,j=1,2,3\,), \qquad /1/$$

де τ_p – час релаксації теплового потоку у напрямі осі x_p; λ_{pj}^t – коефіцієнти теплопровідності; q_p – компоненти вектора теплового потоку; t – температурне поле.

У даній роботі для такої релаксаційної моделі /1/ ми виводимо формули, які дають змогу визначати переміщення і зміну температури всередині тіла Ω, якщо вони задані на його поверхні S. Одержані результати узагальнюють формулу Гріна на динамічні задачі узагальненої термопружності з урахуванням ортотропії часу релаксації теплового потоку.

Для випадку, коли час релаксації теплового потоку однаковий для всіх напрямів, відповідні результати наведені в монографії [4].

Для знаходження переміщень і температури всередині тіла вважаємо, що в початковий момент часу внутрішні джерела тепла W_t відсутні, а швидкість нагрівання $\dot t|_{\tau=0} = 0$ і швидкість переміщення $\dot u|_{\tau=0} = 0$. Визначаємо спочатку переміщення $u_i(x,\tau), x\in\Omega, \tau>0$. Для цього прикладаємо в точці $\xi\in\Omega$ силу $X_i' = \delta(x-\xi)\,\delta_+(\tau)\,\delta_{ij}$, спрямовану по осі x_γ, і припускаємо, що джерела тепла відсутні, тобто $W_t' = 0$.

Виникаючі в тілі Ω переміщення і приріст температури позначаємо відповідно $u_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)$, $v^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)$ і визначаємо із взаємозв"язаної системи рівнянь [1, 3]:

$$C_{ijkl}\,u_{k,l_j}(x,\xi,\tau)+\delta(x-\xi)\delta_+(\tau)\delta_{ij}=\rho\ddot{u}_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)+\beta_{ij}v_{,j}^{(\gamma)}(x,\xi,\tau),$$

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_l}\int_0^\tau v_{,ij}^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_l}\right)d\zeta= \tag{2}$$

$$=\frac{t_0}{2}\beta_{ij}(\dot{u}_{i,j}^{(\gamma)}+\dot{u}_{j,i}^{(\gamma)})+c_\ell\,\dot{v}^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)$$

за однорідних початкових умов:

$$u_i^{(\gamma)}(x,\xi,0)=0,\quad \dot{u}_i^{(\gamma)}(x,\xi,0)=0,$$

$$v^{(\gamma)}(x,\xi,0)=0,\quad x,\xi\in\Omega \tag{3}$$

і крайових умов:

$$u_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)=0,\ v^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)=0,\ \xi\in\dot{\Omega},\ x\in S. \tag{4}$$

Тут $\delta(\eta)=\dfrac{dS(\eta)}{d\eta}$, $\delta_+(\tau)=\dfrac{dS_+(\tau)}{d\tau}$, де $S(\eta)$, $S_+(\tau)$ – симетрична і асиметрична одиничні функції; δ_{ij} – символ Кронеккера; C_{ijkl} – декартові компоненти сталого тензора пружної жорсткості; $\beta_{ij}=\alpha_{kl}^t C_{ijkl}$, α_{ij}^t – температурні коефіцієнти лінійного розширення і зсуву; C_ℓ – об"ємна теплоємність; ρ – густина.

Підставляючи $x_i'=\delta(x-\xi)\delta_+(\tau)\delta_{ij}$, $W_t'=0$, $u_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)$, $v^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)$ у перетворене за Лапласом рівняння взаємності [2] і застосовуючи обернене перетворення Лапласа, одержуємо

$$\begin{aligned}\dot{u}_\gamma(\xi,\tau)=&\int_0^\tau d\tau_0\int_\Omega x_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial u_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}d\Omega-\\ &-\frac{1}{t_0}\int_0^\tau d\tau_0\int_\Omega v^{(\gamma)}(x,\xi,\tau-\tau_0)W_t(x,\tau_0)d\Omega-\\ &-\int_0^\tau d\tau_0\int_S u_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial p_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}dS+\\ &+\frac{1}{t_0}\int_0^\tau d\tau_0\int_S\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_l}h(x,\tau_0)\psi_i(x,\xi,\tau-\tau_0)n_j dS.\end{aligned} \tag{5}$$

Тут введені позначення

$$\psi_i(x,\xi,\tau) = \int_0^\tau v_{,i}^{(\gamma)}(x,\xi,\zeta)\, e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}}\, d\zeta$$

і $p_i^{(\gamma)} = \sigma_{ij}^{(\gamma)} n_j$, де $\sigma_{ij}^{(\gamma)}$ – напруження на поверхні S, викликані силою $x_i' = \delta(x-\xi)\,\delta_+(\tau)\,\delta_{ij}$, а n_j – напрямні косинуси нормалі до цієї поверхні.

Для визначення температури всередині тіла Ω допускаємо, що масові сили відсутні, тобто $x_i'' = 0$. Обираємо тепер джерело тепла у вигляді $W_t'' = \delta(x-\xi)\,\delta_+(\tau)$, яке діє в точці $\xi \in \Omega$.

Виникаючі при цьому переміщення і приріст температури позначаємо відповідно $\tilde{u}_i(x,\xi,\tau)$, $\tilde{\vartheta}(x,\xi,\tau)$ і знаходимо їх зі системи рівнянь [1, 3]:

$$c_{ijkl}\,\tilde{u}_{k,lj}(x,\xi,\tau) = \rho\ddot{\tilde{u}}_i(x,\xi,\tau) + \beta_{ij}\,\tilde{\vartheta}_{,j}(x,\xi,\tau),$$

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\int_0^\tau \tilde{\vartheta}_{,ij}(x,\xi,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta = \qquad /6/$$

$$= \frac{t_0}{2}\beta_{ij}\left(\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}\right) + c_\ell\,\dot{\tilde{\vartheta}} - \delta(x-\xi)\,\delta_+(\tau)$$

за початкових умов:

$$\tilde{u}_i(x,\xi,0) = 0, \quad \dot{\tilde{u}}_i(x,\xi,0) = 0,$$

$$\tilde{\vartheta}(x,\xi,0) = 0, \quad \dot{\tilde{\vartheta}}(x,\xi,0) = 0, \quad x,\xi \in \Omega$$

і крайових умов:

$$\tilde{u}_i(x,\xi,\tau) = 0, \quad \tilde{\vartheta}(x,\xi,\tau) = 0, \quad x \in S,\ \xi \in \Omega.$$

Підставляючи тепер $x_i'' = 0$, $W_t'' = \delta(x,\xi)\,\delta_+(\tau)$, $\tilde{u}_i(x,\xi,\tau)$, $\tilde{\vartheta}(x,\xi,\tau)$ у перетворене за Лапласом рівняння взаємності [2], після застосування оберненого перетворення Лапласа знаходимо

$$t(\xi,\tau) = \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega \tilde{\vartheta}(x,\xi,\tau-\tau_0)\, W_t(x,x_0)\, d\Omega -$$

$$-t_0\int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega X_i(x,\tau-\tau_0)\, \frac{\partial \tilde{u}_i(x,\xi,\tau_0)}{\partial \tau_0}\, d\Omega +$$

$$+t_0\int_0^\tau d\tau_0 \int_S u_i(x,\tau-\tau_0)\, \frac{\partial P_i^{(w)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial \tau_0}\, dS + \qquad /7/$$

$$+\int_0^\tau d\tau_0 \int_S \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\, h(x,\tau-\tau_0)\, \tilde{\psi}_i(x,\xi,\tau)\, n_j\, dS,$$

де позначено

$$\tilde{\psi}_i(x,\xi,\tau)=\int_0^{\tau}\tilde{\upsilon}_{,i}(x,\xi,\zeta)\,e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}}\,d\zeta,$$

$p_i^{(w)}=\sigma_{ij}^{(w)}n_j$, причому $\sigma_{ij}^{(w)}$ - напруження в точці $x\in S$, спричинені джерелом тепла $W_t''=\delta(x-\xi)\delta_+(\tau)$.

Формули /5/, /7/ є узагальненими формулами Гріна в узагальненій термопружності анізотропного тіла, яка враховує ортотропію часу релаксації теплового потоку.

1. Ковальчук Б.В., Гой О.І. Узагальнене енергетичне рівняння і теорема єдиності розв"язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1994. Вип. 40. 2. Ковальчук Б.В., Гой О.І. Узагальнене варіаційне рівняння і теорема взаємності розв"язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1994. Вип. 41. 3. Коляно Ю.М., Ковальчук Б.В., Гой О.И. Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела, учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1988. № 9. 4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.95