

ISSN 0201-758X

ISSN 0320-6372

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

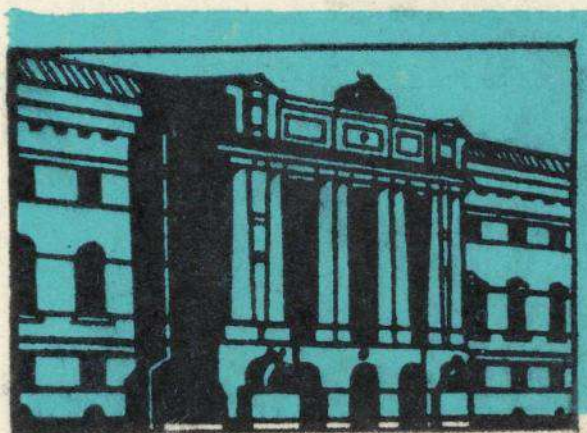
ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

42

1995



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

ВИПУСК 42

ЗАДАЧІ
ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ
МАТЕМАТИКИ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО «СВІТ»
1995

УДК 518

У Віснику вміщено статті з математичного моделювання, чисельних методів розв'язування рівнянь математичної фізики і задач оптимізації.

Для наукових працівників, викладачів і студентів старших курсів.

Бібліограф. у кінці статей.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. Я.Г.Саву-
ха /відп. ред./, канд. фіз.-мат. наук, доц. Ю.М.Щербина
/відп. секр./, канд. фіз.-мат. наук, проф. М.Я.Бартіш,
д-р фіз.-мат. наук, проф. М.М.Войтович, д-р фіз.-мат.
наук, проф. Г.Г.Цегелик, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Г.А.Шинкаренко

Відповідальний за випуск доц. Ю.М.Щербина

Адреса редакції:

290000 Львів, вул. Університетська, 1.

Університет, кафедра теорії оптимальних процесів.

Тел.: 79-47-91.

В 160241000-062
225-95

Самовиб

© Львівський державний
університет, 1995

Я.Г.Савула

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛОПЕРЕНОСЕННЯ ЧЕРЕЗ ТРИВИМІРНЕ ТІЛО
З ТОНКИМ ПЛОСКИМ ПОКРИТТЯМ

Проблему побудови математичних моделей теплоперенесення через тіла з тонкими покриттями розглядали багато авторів [2, 4, 6, 8]. У працях [2, 4, 8] теплопровідність тонкого покриття моделювалась шляхом запису спеціальних граничних умов. У праці [6] математична модель тіла з тонким покриттям описувалась неklasичною початково-крайовою задачею, яка складається зі системи диференціальних рівнянь, що містять диференціальні оператори за просторовими змінними різної вимірності [9]. У даній статті підхід, що запропонований у праці [6], розвинений на випадок тривимірного тіла з тонким плоским покриттям.

1. Теплопровідність тонкого електричного шару. Нехай плоский шар займає область

$$\Omega^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega; -\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2}\}.$$

Процес перенесення тепла описуємо в Ω^* диференціальним рівнянням [1, 3]

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} + c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = q, \quad /1.1/$$

де $T = T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau)$ - функція температури; λ - коефіцієнт теплопровідності; c - питома теплоємність; ρ - густина; q - інтенсивність густини внутрішніх джерел теплоти /за індексами, що повторюються, відбувається підсумовування/.

Ураховуючи малийну товщини h , подаємо температуру T в області Ω у вигляді

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau) = t(\alpha_1, \alpha_2, \tau) + \frac{2\alpha_3}{h} t_1(\alpha_1, \alpha_2, \tau) \quad /1.2$$

Підставляючи /1.2/ в /1.1/ та ортогоналізуючи нев'язку до 1 та α_3 в сенсі інтеграла за змінною α_3 на проміжку $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, отримуємо

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial \alpha_i} + x_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = h q_0 - q^+ - q^-,$$

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \lambda_0 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_i} + 12 \frac{\lambda_0}{h^2} t_1 + x_0 \frac{\partial t_1}{\partial \tau} = h q_1 - 3(q^+ - q^-). \quad /1.3/$$

Тут враховано, що

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha_3} = q^+ \text{ при } \alpha_3 = \frac{h}{2}; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha_3} = q^- \text{ при } \alpha_3 = -\frac{h}{2};$$

$$q_0 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} q d\alpha_3; \quad q_1 = \frac{6}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} q \alpha_3 d\alpha_3;$$

$$\lambda_0 = h\lambda; \quad x_0 = h c p.$$

Вважаємо, що на бічній циліндричній поверхні шару Ω задана крайова умова третього роду:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} = \alpha(T - T_c), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma, \quad -\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2}. \quad /1.4/$$

Тут Γ - границя області Ω ; ν - зовнішня нормаль до границі Γ ; α - коефіцієнт теплообміну; T_c - температура зовнішнього середовища.

Для отримання крайових умов на функції t, t_1 використовуємо знову процедуру усереднення за товщиною шару. Підставляємо для цього /1.2/ в /1.4/ і записуємо умови ортогональності нев'язки до 1 та α_3 . Отримуємо

$$-\lambda_0 \frac{\partial t}{\partial \nu} = \alpha_0(t - t^c) \quad \text{на } \Gamma, \quad /1.5/$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial t_1}{\partial \nu} = \alpha_0(t_1 - t_1^c)$$

де

$$\alpha_0 = \alpha h; \quad t^c = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T_c d\alpha_3; \quad t_1^c = \frac{6}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} T_c \alpha_3 d\alpha_3.$$

Аналогічно до цього отримуємо також початкові мови на функції t, t_1 . Вони мають вигляд

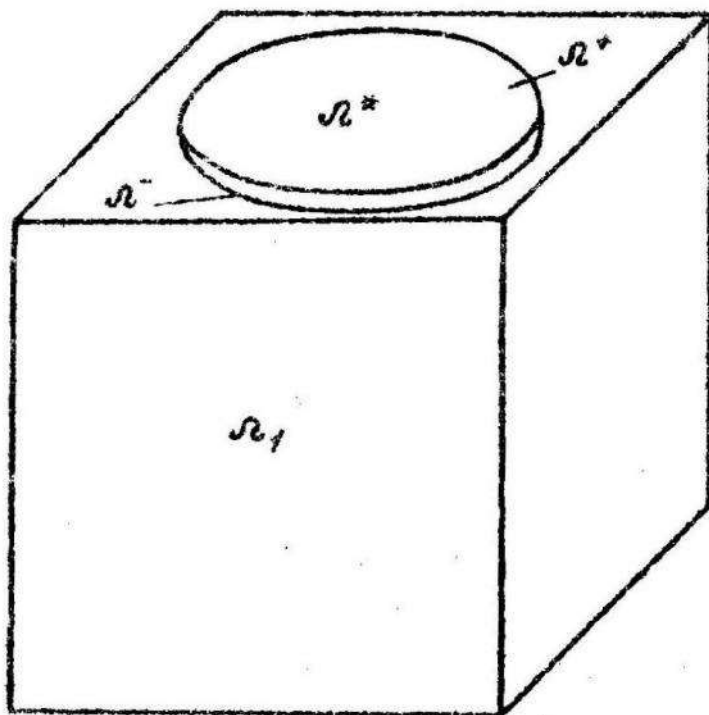
$$t = t^0, \quad t_1 = t_1^0 \quad \text{при } \tau = 0. \quad /1.6/$$

Тут

$$t^0 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T_0 d\alpha_3; \quad t_1^0 = \frac{6}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} T_0 \alpha_3 d\alpha_3;$$

T_0 - розподіл температури в початковий момент часу $\tau = 0$.

2. Теплопровідність тіла в тонкому покритті. Сформулюємо постановку задачі теплопровідності для неоднорідного тіла, яке складається з масивної частини, що займає область Ω_1 , і тонкого покриття, яке займає область Ω_2^* /див. рисунок/.



Вважаємо, що область Ω_1 віднесена до декартової системи координат x_1, x_2, x_3 , а область Ω_2^* — до декартової системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, причому справедливе співвідношення

$$\Omega_2^* = \left\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega_2; -\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2} \right\}, \quad /1.1/$$

де Ω_2 — деяка двовимірне область в ліпшицевій границі Γ_2 .

Нижня границя області Ω_1 , яка так вважається ліпшицевою, складається з двох частин $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)}$.

Область Ω_2^* обмежена двома ліцевими площинами $\Omega_2^-(\alpha_3 = -\frac{h}{2})$, $\Omega_2^+(\alpha_3 = \frac{h}{2})$ та бічною циліндричною поверхню: $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega_2$, $-\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2}$.

Вважаємо, що частина границі $\Gamma_1^{(2)}$ збігається з площиною Ω_2^- . Для опису процесу теплопередавання у тілі в тонкому покритті використовуємо рівняння теплопровідності /1.1/ в області Ω_1

$$-\frac{\partial T_1}{\partial x_i} \lambda_i \frac{\partial T_1}{\partial x_i} + c_i \rho_i \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = q_i, \quad /2.2/$$

та отримані рівняння /1.3/, що описують теплопровідність тонко-
га шару Ω_2^* :

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial \alpha_i} + \chi_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = h q_0 - q^+ - q^-,$$

$$-\frac{\partial t_1}{\partial \alpha_i} \lambda_0 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_i} + 12 \frac{\lambda_0}{h^2} t_1 + \chi_0 \frac{\partial t_1}{\partial \tau} = h q_1 - 3(q^+ - q^-), \text{ в } \Omega_2. \quad /2.3/$$

Тут T_1 - функція розподілу температури в області Ω_1 ; t , t_1 -
функції, за допомогою яких на основі формули /1.2/ описується
температура в області Ω_2^* .

До рівнянь /2.2/, /2.3/ додаємо такі крайові та початкові
умови:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \nu} = \alpha_1 (T_1 - T_c) \quad \text{на } \Gamma_1^{(1)}; \quad /2.4/$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial t}{\partial \nu} = \alpha_0 (t - t^c) \quad \text{на } \Gamma_2; \quad /2.5/$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial t_1}{\partial \nu} = \alpha_0 (t_1 - t_1^c)$$

$$T_1 = T_0 \quad (T_0 = T_c) \quad \text{при } \tau = 0; \quad /2.6/$$

$$t = t^0, \quad t_1 = t_1^0 \quad \text{при } \tau = 0. \quad /2.7/$$

До цих умов додаємо ще умови нерозривності теплових полів
та потоків на ділянці границі $\Gamma_1^{(2)} = \Omega_2^-$:

$$T_1 = t - t_1; \quad /2.8/$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \nu_1} = q^-, \quad /2.9/$$

де ν_1 - зовнішня нормаль до границі $\Gamma_1^{(2)}$.

Таким чином, математична модель теплопровідності тіла з тон-
ким покриттям складається з рівнянь /2.2/, /2.3/; граничних умов
/2.4/, /2.5/; початкових умов /2.6/, /2.7/ та умов нерозривнос-
ті /2.8/, /2.9/.

Зауважимо, що використаний тут спосіб побудови математич-
ної моделі /6/ забезпечує збереження таких властивостей, як си-
метрія та додатня визначеність оператора, за просторовими змін-
ними, що притаманні оператору класичної задачі теплопровідності
[5]. Справедливими є такі леми.

Лема. Оператор за просторовими змінними задачі /2.2/-/2.9/
у випадку однорідних умов - симетричний.

Доведення стає очевидним, якщо виписати білінійну форму, що відповідає оператору

$$L(T_1, t, t_1; \hat{T}_1, \hat{t}, \hat{t}_1) = \int_{\Omega_1} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial x_i} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \alpha_k} d\Omega_2 + \\ + \int_{\Omega_2} \left(\lambda_0 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \hat{t}_1}{\partial \alpha_k} + \frac{12\lambda_0}{h^2} t_1 \hat{t}_1 \right) d\Omega_2, \quad \ell=1,2,3; \quad k=1,2. \quad /2.10/$$

Теорема. Білінійна форма /2.10/ - коерцитивна на множині функцій

$$V = \{T_1, t, t_1 : T_1 \in W_2^{(1)}(\Omega_1), t, t_1 \in W_2^{(1)}(\Omega_2); T_1 = 0 \text{ на } \Gamma_1^{(1)}; \\ t, t_1 = 0 \text{ на } \Gamma_2, T_1 = t - t_1 \text{ на } \Gamma_1^{(2)}\}.$$

Доведення випливає з нерівностей Фідрікса для випадку двох і трьох змінних [5].

І. Б а л а н с у н М., Р я д н о А.А. Методи теорії теплопроводності: В 2 ч. М., 1982. Ч.1. 2. К и т Г.С., К р и в ц у н М.Г. Плоские задачи теплоупругости для тел с трещинами. К., 1983. 3. Л и х о в А.В. Теория теплопроводности. М., 1967. 4. П і д - с т р и г а ч Я.С. Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН України. 1963. № 7. 5. Р е к т о р и о К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985. 6. С а в у - л а Я.Г., С и п а І.М., С т р у т и н с ь к и й І.В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і вклученнями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип.37. 1992. 8. Ф л е й ш м а н Н.П. Математичні моделі теплового опромінення середовища з тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 39. 1993. 9. Ciarlet P.G. Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures. Paris, 1990.

Стаття надійшла до редакції 08.02.95

Н.П.Флейшман, Ч.Н.Койфман

МЕТОД ДОВІЛЬНИХ КРИВИХ У ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПЛАСТИНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

1. Розглянемо тонку ізотропну пластинку змінної товщини $h(x, y)$, серединна площина якої займає однозв'язну область Ω криволінійного чотирикутника $A_1 A_2 A_3 A_4$ на площині (x, y) . Профіль пластинки симетричний щодо цієї площини. На поверхнях $z = \pm h/2$ відбувається стаціонарний конвективний теплообмін з навколишнім середовищем. По товщині пластинки температура $T(x, y)$ залишається сталою.

За сталих теплофізичних характеристик матеріалу пластинки рівняння теплопровідності має вигляд [3]

$$\Delta T(x, y) + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{2}{h^2} \gamma (T - \theta) + \frac{w}{\lambda} = 0, \quad /1/$$

де θ – температура навколишнього середовища на поверхнях $z = \pm h/2$; $w(x, y)$ – питома інтенсивність внутрішніх джерел тепла; λ – коефіцієнт теплопровідності; Δ – двовимірний оператор Лапласа;

$$\gamma(x, y) = \frac{\alpha h}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2},$$

α – коефіцієнт тепловіддання на поверхнях $z = \pm h/2$.

На границі Γ області Ω маємо крайову умову

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_* (T - \theta_*) = 0, \quad /2/$$

де α_* і θ_* – відомі функції точок контура Γ ; α_* – коефіцієнт тепловіддання; θ_* – температура зовнішнього середовища на Γ ; n – зовнішня нормаль.

Зауважимо, що в частковому випадку $h = \text{const}$ та $\alpha = 0$ крайова задача /1/, /2/ моделює плоску задачу стаціонарної теплопровідності призматичного тіла, поперечний переріз якого має форму Ω .

2. Використаємо взаємно однозначне відображення неканонічної області Ω на одиничний квадрат E площини (ξ^1, ξ^2) за допомогою неперервно диференційовного перетворення координат

$$x = x(\xi^1, \xi^2); y = y(\xi^1, \xi^2); 0 \leq \xi^1, \xi^2 \leq 1 \quad /3/$$

де, наприклад,

$$x = \xi^1 G_1(y_3 - y_3 \xi^2 + y_4 \xi^2) - (\xi^1 - 1) G_0(y_2 - y_2 \xi^2 - y_1 \xi^2),$$

$$y = \xi^2 F_1(x_4 \xi^1 - x_1 \xi^1 + x_1) - (\xi^2 - 1) F_0(x_3 \xi^1 - x_2 \xi^1 + x_2).$$

Тут (x_k, y_k) - декартові координати вершини A_k області Ω ($k = \overline{1, 4}$), оторони якої задаються відповідно рівняннями:

$$x = G_0(y) \text{ на отороні } A_1 A_2; \quad y = F_0(x) \text{ на отороні } A_2 A_3,$$

$$x = G_1(y) \text{ на отороні } A_3 A_4; \quad y = F_1(x) \text{ на отороні } A_4 A_1.$$

Функції $F_i(x)$ та $G_i(y)$ ($i = \overline{1, 0}$) мають задовольняти умо-
ви

$$F_1(x) > F_0(x), \quad G_1(y) > G_0(y).$$

а Якобіан перетворення /3/ не повинен дорівнювати нулю. При цьо-
му в області E координатам $\xi^i = \text{const}$ відповідає система взаєм-
но ортогональних прямих, а в області Ω - деяка сітка неортого-
нальних кривих. Сторонам квадрата $\xi^1 = 0, \xi^2 = 1, \xi^1 = 1, \xi^2 = 0$ відпо-
відать граничні криві $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, A_4 A_1$ області Ω .

Для підставлення /3/ в /1/ виражаємо відповідні похідні
скалярної функції T через її похідні в системі неортогональ-
них криволінійних координат (ξ^1, ξ^2) [2].

Остаточно замість рівняння /1/ одержуємо систему диференціаль-
них рівнянь:

$$g'' \frac{\partial Q}{\partial \xi^1} + 2g^{12} \frac{\partial Q}{\partial \xi^2} + \beta_1 Q + g^{22} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi^2} \right) -$$

$$- \beta_2 \frac{\partial T}{\partial \xi^2} - \frac{2}{h^2} \gamma (T - \theta) + \frac{w}{\lambda} = 0, \quad /4/$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi^1} - Q = 0,$$

де позначено

$$\beta_1 = \frac{1}{2h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} a_{22} - \frac{\partial h}{\partial y} a_{21} \right) - C_1,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} a_{12} - \frac{\partial h}{\partial y} a_{11} \right) - C_2,$$

$$C_k = g'' \Gamma_{11}^k + 2g^{12} \Gamma_{12}^k + g^{22} \Gamma_{22}^k, \quad (k = \overline{1, 2}),$$

$g^{ki} = g^{ik}$ - контраваріантні компоненти метричного тен-
зора; $\Gamma_{ts}^k = \Gamma_{st}^k$ - символи Кристоффеля другого роду, які вира-
жаються через g^{ik} за формулами

$$\Gamma_{st}^k = \frac{1}{2} g^{kq} \left(\frac{\partial g_{sq}}{\partial \xi^t} + \frac{\partial g_{tq}}{\partial \xi^s} - \frac{\partial g_{st}}{\partial \xi^q} \right),$$

$$(s, t, k, q = \overline{1, 2})$$

$$g_{11} = a_{11}^2 + a_{12}^2; \quad g_{21} = g_{12} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22},$$

$$g_{22} = a_{22}^2 + a_{21}^2; \quad z = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

$$g^{11} = \frac{1}{z^2} g_{22}; \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{1}{z^2} g_{12}; \quad g^{22} = \frac{1}{z^2} g_{11},$$

$$a_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi^1}, \quad a_{12} = \frac{\partial y}{\partial \xi^1}, \quad a_{21} = \frac{\partial x}{\partial \xi^2}, \quad a_{22} = \frac{\partial y}{\partial \xi^2}.$$

Систему /4/, /5/ записуємо лише для точок внутрішніх кривих $\xi^2 = \kappa\delta = \kappa/(N+1) = \text{const}$ ($\kappa = \overline{1, N}$) і заміняємо похідні за ξ^2 їх симетричними скінченно-різницевими аналогами з точністю $O(\delta^2)$.
Остаточно отримуємо рівняння

$$g^{11} \frac{dQ_k}{d\xi^1} + \frac{g^{12}}{\delta} (Q_{k+1} - Q_{k-1}) + \beta_1 Q_k - \frac{\beta_2}{2\delta} (T_{k+1} - T_{k-1}) + \\ + \frac{g^{22}}{\delta^2} (T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1}) - \frac{2\gamma}{h^2} T_k = \frac{2\gamma}{h^2} \theta_k - \frac{w_k}{\lambda}, \quad /5/$$

$$\frac{dT_k}{d\xi^1} - Q_k = 0, \quad /6/$$

де $T_k(\xi^1) = T(\xi^1, \kappa\delta)$; $Q_k(\xi^1) = Q(\xi^1, \kappa\delta)$; $\theta_k(\xi^1) = \theta(\xi^1, \kappa\delta)$;

$w_k(\xi^1) = w(\xi^1, \kappa\delta)$.

Крім цього на краях $\xi^2 = 0$ та $\xi^2 = 1$ області Ω маємо умови /2/, які після перетворення координат набувають вигляду

$$\lambda [v_1(\xi^1) \frac{dT_0}{d\xi^1} + \frac{1}{2\delta} v_2(\xi^1) (4T_1 - T_2 - 3T_0) + \\ + \alpha_{10} (T_0 - \theta_{10})] = 0 \quad \text{при } \xi^2 = 0, \quad /7/$$

$$\lambda [v_1(\xi^1) \frac{dT_{N+1}}{d\xi^1} + \frac{1}{2\delta} v_2(\xi^1) (3T_{N+1} - 4T_N + T_{N-1}) + \\ + \alpha_{11} (T_{N+1} - \theta_{11})] = 0 \quad \text{при } \xi^2 = 1,$$

де

$$v_1 = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial x}{\partial n} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial n} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi^2} \right), \quad v_2 = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial y}{\partial n} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi^1} - \frac{\partial x}{\partial n} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi^1} \right), \quad /8/$$

$$\frac{\partial x}{\partial n} = [1 + (F_j')^2]^{-1/2}, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = (-1)^{j+1} F_j [1 + (F_j')^2]^{-1/2} \quad (j = 0, 1).$$

Диференціюючи крайові умови /7/ по ξ^1 з урахуванням /6/, отримуємо ще два рівняння, які ми запишемо коротко так:

$$\lambda v_1(\xi^1) \frac{dQ_0}{d\xi^1} + M_0(Q_i, T_i) = 0 \quad (i = 0, 1, 2) \quad \text{при } \xi^2 = 0;$$

$$\lambda v_1(\xi^1) \frac{dQ_{N+1}}{d\xi^1} + M_1(Q_i, T_i) = 0 \quad (i = N+1, N, N-1) \quad \text{при } \xi^2 = 1.$$

Тут M_0, M_1 - лінійні функції своїх аргументів.
Рівняння /5/, /6/, /7/, /8/ утворюють замкнену систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку стосовно функцій $Q_k = (Q_k^1), T_k = (T_k^1)$ ($k = \overline{0, N+1}$). Уводимо вектор-функцію

$$\bar{S}(\xi^1) = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_{N+1}, T_0, T_1, \dots, T_{N+1}\}^T.$$

Тоді система /5/-/8/ записується компактно так:

$$A \frac{d\bar{S}}{d\xi^1} + B\bar{S} = \bar{C}. \quad /9/$$

Тут A, B - відомі квадратні матриці: $\bar{C}$ - відомий вектор.

До рівняння /9/ слід додати умови /2/ на краях $\xi^1 = 0$ та $\xi^1 = 1$, які після перетворення координат записуються аналогічно /7/ у вигляді

$$\varphi^T \bar{S}(0) = \bar{\beta}_0, \quad \psi^T \bar{S}(1) = \bar{\beta}_1, \quad /10/$$

де φ^T, ψ^T - відомі прямокутні матриці розмірності $(N+1) \times (2N+2)$, а $\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1$ - відомі вектори.

Методом прогонки, наприклад, двоточкова крайова задача /9/, /10/, зводиться до задачі Коші для рівняння /9/ з початковими умовами

$$\bar{S}(1) = \left[\begin{matrix} \psi^T \\ U^T(1) \end{matrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \chi_*(1) \end{pmatrix},$$

де $\chi_*(\xi^1)$ та $U(\xi^1)$ - вектор та матриця, які визначаються внаслідок розв'язання задачі Коші:

$$\chi'_*(\xi^1) = U^T(\xi^1), \quad U'(\xi^1) - (A^1 B)^T U(\xi^1) = 0, \quad U(0) = \varphi, \quad \chi_*(0) = \bar{\beta}_0.$$

Остаточно визначаються елементи $T_k(\xi^1)$ вектор-функції $\bar{S}$, тобто розподіл шуканої температури $T(\xi^1, \xi^2)$ уздовж дискретних кривих $\xi^2 = \text{const}$ області Ω , які відповідають паралельним прямим одиничного квадрата E .

Примітка. Якщо область Ω двозв'язна з гладкими границями /без кутових точок/, її слід розбити /за допомогою двох перетинів/ на два криволінійних прямокутники, які аналогічно попередньому, відображаються на два квадрати, між якими справедливі умови спряження та періодичності, і метод довільних кривих /ДК/ застосовується практично без істотних змін. Цей метод можна застосовувати також при параметризації двозв'язної області Ω шляхом її відображення на кругове кільце з використанням полярної системи координат [1].

Без принципових змін метод ДК узагальнюється на випадок області Ω складної форми, яку можна розбити на деяку кількість під-

областей, кожна з яких обмежена контуром з чотирма кутовими точками, і між якими виконуються відповідні умови спряження.

І. Г а л и м о в К.З., П а й м у ш и н В.Н. Теория оболочек сложной геометрии. Казань, 1985. 2. Д у р ъ е А.И. Теория упругости. М., 1970. 3. М о т о в и л о в е ц И.А. Теплопроводность пластин тел вращения. К., 1969.

Стаття надійшла до редколегії 04.01.95

УДК 517.958:519.6

І.Є.Бернакевич, Г.А.Шинкаренко

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ОБОЛОНОК З РІДИНОЮ П. ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВІ АПРОКСИМАЦІЇ ТА ЇХНЯ ЗБІЖНІСТЬ

Об'єктом дослідження даної роботи є проекційно-сіткова схема для розв'язування варіаційної задачі [2.5/ [2], яка описує акустичну взаємодію оболонки з рідиною в термінах потенціалу швидкостей рідини $\psi = \psi(z, z, t)$ та вектора пружних зміщень $z = (u(z, t), w(z, t), y(z, t))$ середньої поверхні оболонки.

Праця [2] містить конструктивне доведення коректності варіаційної задачі такої взаємодії за допомогою напівдискретизації Галльорніна. Тут за типових для методу скінченних елементів припущень отримані оцінки швидкості збіжності напівдискретних апроксимацій Галльорніна.

Нарешті, ми досягаємо повної дискретизації задачі за допомогою побудови однокрогової рекурентної схеми і визначаємо умови її стійкості та збіжності.

Для зручності викладу тут продовжується прийнята у праці [2] нумерація параграфів і формул, а також використовуються введені раніше позначення.

5. Оцінка збіжності напівдискретних апроксимацій Галльорніна. Розглянемо дискретизовану по просторових змінних варіаційну задачу акустичної взаємодії оболонки з рідиною:

$$\begin{cases} \text{задано } p_0 = (\varphi_0, s_0) \in Q, q_0 = (\varphi_0, g_0) \in H = H^0 \times X, F \in L^2(0, T; Q'); \\ \text{знайти вектор } p_h = (\varphi_h, s_h) \in L^2(0, T; Q_h) \text{ такий, що} \\ M(p_h''(t), q) + B(p_h'(t), q) + A(p_h(t), q) = \langle F(t), q \rangle, \quad /5.1/ \\ M(p_h'(0) - q_0, q) = 0, A(p_h(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q_h. \end{cases}$$

Оцінки швидкості збіжності похибки напівдискретних апроксимацій

$$e_h(t) = p_h(t) - p(t) \quad /5.2/$$

будуємо за типових для методу скінченних елементів припущень щодо властивостей просторів апроксимацій Q_h :

$$\begin{cases} \text{для кожного } q \in Q \cap W^m, k \geq 0 \\ \text{знайдуться } q_h \in Q_h, C = \text{const} > 0 \text{ такі, що} \\ \|q - q_h\|_m \leq Ch^{k+1-m} \|q\|_{k+1}, 0 \leq m \leq k. \end{cases} \quad /5.3/$$

Тут h - діаметр сітки скінченних елементів; k - максимальний порядок повного полінома, який можна зобразити базисними функціями на кожному скінченному елементі.

$$\begin{cases} W^m = H^m(\Omega) \times H^m((0,L))^3, \\ \|q\|_m = \left\{ \|\varphi\|_{m,\Omega}^2 + \|S\|_{m,(0,L)}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall q = (\varphi, S) \in W^m. \end{cases} \quad /5.4/$$

Для аналізу похибки /5.2/ вважатимемо справедливими припущення теореми із п. 3, і скористаємось оператором ортогонального проектування $\Pi_h: Q \rightarrow Q_h$ щодо скалярного добутку $A(.,.)$, таким, що

$$A(p - \Pi_h p, q) = 0 \quad \forall p \in Q, \quad \forall q \in Q_h. \quad /5.5/$$

Якщо під $p(t)$ розуміти розв'язок варіаційної задачі /2.5/, то наслідком властивостей /5.5/ та /5.3/ отає оцінка

$$\|E_h(t)\|_Q \leq Ch^k \|p(t)\|_{k+1}, \quad /5.6/$$

де

$$E_h(t) = p(t) - \Pi_h p(t). \quad /5.7/$$

Беручи до уваги цей факт, доцільно подати похибку напівдискретизації у вигляді

$$e_h(t) = \epsilon_h(t) - E_h(t), \quad /5.8/$$

де ϵ_h складова

$$\epsilon_h(t) = p_h(t) - \Pi_h p(t) \quad /5.9/$$

вимагає тепер оцінки.

Відзначимо, що складова похибки $\epsilon_h(t)$ задовольняє рівняння

$$\begin{cases} M(\epsilon_h''(t), q) + B(\epsilon_h'(t), q) + A(\epsilon_h(t), q) = M(E_h''(t), q) + B(E_h'(t), q), \\ A(\epsilon_h(0), q) = 0, \\ M(\epsilon_h'(0), q) = M(E_h'(0), q) \quad \forall q \in Q_h. \end{cases} \quad /5.10/$$

Звідси після підставлення $q = \epsilon_h'(t)$ /а це можливо, оскільки $\epsilon_h(t) \in Q_h$ / знаходимо енергетичне рівняння для по-
хилки

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |\epsilon_h'(t)|^2 + \|\epsilon_h(t)\|^2 \} = M(E_h''(t), \epsilon_h'(t)) + B(E_h'(t), \epsilon_h'(t)) /5.11/$$

або

$$\begin{aligned} |\epsilon_h'(t)|^2 + \|\epsilon_h(t)\|^2 &= |\epsilon_h'(0)|^2 + \|\epsilon_h(0)\|^2 + \\ &+ 2 \int_0^t \{ M(E_h''(\tau), \epsilon_h'(\tau)) - B(E_h''(\tau), \epsilon_h(\tau)) \} d\tau + \\ &+ 2(B(E_h'(t), \epsilon_h(t)) - B(E_h'(0), \epsilon_h(0))). \end{aligned} \quad /5.12/$$

Після перетворень з використанням леми Гронвалля [3] та початкових умов, отримуємо оцінку $|\epsilon_h'(t)|^2 + \|\epsilon_h(t)\|^2 \leq$

$$\leq C \{ \|\epsilon_h'(0)\|^2 + \|\epsilon_h(0)\|^2 + \int_0^t (\|E_h''(\tau)\|^2 + \|E_h'(\tau)\|^2) d\tau \}. \quad /5.13/$$

Тут і далі символом C позначаються різні додатні сталі, значення яких не залежить від величин, що нас цікавлять.

Застосовуючи до останньої нерівності оцінки /5.6/, остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} |\epsilon_h'(t)|^2 + \|\epsilon_h(t)\|^2 &\leq \\ &\leq Ch^{2k} \{ \|q_0\|_{k+1}^2 + \|p'(t)\|_{k+1}^2 + \int_0^t \|p''(\tau)\|_{k+1}^2 d\tau \}. \end{aligned} \quad /5.14/$$

Тепер, враховуючи /5.2/, /5.6/ і /5.14/ та застосовуючи нерівність трикутника до /5.7/, доводимо висновок, що справедлива така теорема.

Теорема про збіжність напівдискретних апроксимацій. Нехай $p = (\psi, S)$ - розв'язок задачі /2.5/. Допустимо також, що існує натуральне k , таке, що

$$p_0, S_0 \in W^{k+1},$$

$$p, p' \in L^\infty(0, T; Q \cap W^{k+1}), \quad p'' \in L^2(0, T; Q \cap W^{k+1}).$$

Нехай для кожного $h > 0$ напівдискретні апроксимації Гальоркіна $\{p_h(t)\}_{Q_h}$ визначаються як розв'язки задач /5.1/ у просторах Q_h , що мають властивості щільності /5.3/.

Тоді послідовність напівдискретних апроксимацій $\{p_h(t)\}$ збігається при $h \rightarrow 0$ до розв'язку $p(t)$ варіаційної задачі

/2.5/, і при цьому швидкість збіжності характеризується апіорною оцінкою

$$\|p_h(t) - p(t)\|^2 \leq C h^{2k} \left\{ \|q_0\|_{k+1}^2 + \|p(t)\|_{k+1}^2 + \|p'(t)\|_{k+1}^2 + \int_0^t \|p''(\tau)\|_{k+1}^2 d\tau \right\} / 5.15/$$

з константою $C = \text{const} > 0$, значення якої не залежать від h та p .

Зуваження. Енергетична оцінка похибки напівдискретизації Гальоркіна має важливе практичне значення, оскільки може бути використана для прогнозування похибки дискретизації з параметром h_3 , якщо відомі наближені розв'язки для параметрів h_1 і h_2 .

6. Однокрокова рекурентна схема. Побудова ефективної процедури інтегрування напівдискретизованих задач великою мірою визначає ефективність розв'язування задачі взаємодії загалом.

Далі для інтегрування в часі варіаційної задачі акустичної взаємодії оболонки з рідиною використовується проекційно-сіткова схема, запропонована у праці /5/ для задач взаємодії пружного тіла з рідиною. Досліджуються умови стійкості та оцінки збіжності цієї схеми.

Для інтегрування в часі напівдискретної задачі /5.1/ розіємо проміжок $[0, T]$ на відрізки $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $\Delta t = \tau_{j+1} - \tau_j$, $j=0, 1, \dots, N-1$, $N\Delta t = T$. Тоді, використовуючи ідеї праці /5/ для побудови схеми інтегрування задач взаємодії пружного тіла з рідиною, розглянемо однокрокову схему для задачі /5.1/:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано крок інтегрування } \Delta t > 0, \text{ параметр } \gamma > 0 \\ \text{та пари } p^j = \{\psi^j, s^j\}, q^j = \{\varphi^j, v^j\} \in Q_h = \Phi_h \times Y_h; \\ \text{знайти пари } p^{j+1} = \{\psi^{j+1}, s^{j+1}\}, q^{j+1} = \{\varphi^{j+1}, v^{j+1}\} \in Q_h, \\ \text{такі, що} \\ m(\varphi^{j+1/2}, \xi) + \frac{1}{2} \Delta t \{ \gamma \Delta t a(\varphi^{j+1/2}, \xi) - b(v^{j+1/2}, \xi) \} = \\ = \frac{1}{2} \Delta t \{ \langle l(t_{j+1/2}), \xi \rangle - a(\varphi^j, \xi) \} \quad \forall \xi \in \Phi_h, \quad /6.1/ \\ \kappa(v^{j+1/2}, y) + \frac{1}{2} \Delta t \{ \gamma \Delta t \alpha(v^{j+1/2}, y) + \beta(y, \varphi^{j+1/2}) \} = \\ = \frac{1}{2} \Delta t \{ \langle \lambda(t_{j+1/2}), y \rangle - a(s^j, y) \} \quad \forall y \in Y_h, \\ q^{j+1} = 2q^{j+1/2} - q^j \quad p^{j+1} = p^j + \Delta t q^{j+1/2} \quad j=0, 1, \dots. \\ \text{Тут пари } \{\psi^m, \varphi^m\} \text{ та } \{s^m, v^m\} \text{ шукують значення} \\ \{\psi_h(t_m), \varphi_h'(t_m)\} \text{ та } \{s_h(t_m), s_h'(t_m)\} \text{ відповідно в момент часу} \\ t_m = m\Delta t, \quad m=0, 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Унаслідок леми Лакса-Мільграма система з двох перших рівнянь схеми /6.1/ має єдиний розв'язок $q^{j+1/2} = \{\varphi^{j+1/2}, v^{j+1/2}\}$.

Відзначимо, що однокрокова схема /6.1/ дає змогу точно задовольнити всі початкові умови задачі /6.1/ і виконувати її інтегрування зі змінним кроком Δt . Більше того, вибір у ролі проміжкових невідомих $q^{j+1/2} = \{\varphi^{j+1/2}, v^{j+1/2}\}$ схеми веде до максимального спрощення процесу рекурентного обчислення правих частин повністю дискретизованих рівнянь задачі акустичної взаємодії.

Теорема. Нехай виконані умови теореми п.3 і $\rho_h(t)$ - розв'язок задачі /6.1/, причому $\rho_h^{IV} \in L^2(0, T; Q_h)$.

Припустимо також, що для апроксимації значень $(\rho_h(t_m), \rho_h'(t_m))$ за допомогою схеми /6.1/ визначаються $z^m = (p^m, q^m)$ відповідно, $m = 0, 1, \dots, N, N\Delta t = T$.

Тоді справедливі твердження:

i) При виборі значень параметра

$$\gamma \geq 1/2$$

/6.2/

схема /6.1/ безумовно стійка щодо норми

$$\|z^m\| = \{\|q^m\|_h + \|\rho^m\|_a\}^{1/2}.$$

iii) Якщо виконана умова стійкості /6.2/, то похибка апроксимації $\Delta^m = \{e^m, \epsilon^m\} = \{\rho^m - \rho_h(t_m), q^m - \rho_h'(t_m)\}$ схеми /6.1/ збігається до нуля, і при цьому швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$\|\Delta^m\| + \Delta t^2 \|\epsilon^{j+1/2}\|^2 \leq C \Delta t^2 T \{(\gamma - \frac{1}{2}) + \Delta t^2\}, \quad /6.3/$$

де значення $C = \text{const} > 0$ не залежить від вибору $\Delta t, \gamma$.

Доведення теореми аналогічне наведеному у праці [4] і ґрунтується на енергетичних міркуваннях.

І. Б е р н а к е в и ч Н.Е., Ш е л ь в а х О.П., Ш и н к а р е н к о Г.А. Численное исследование вариационных задач теории балок Тимошенко проекционно-сеточными методами. Львов, 1991. 53 с. Рукопись деп. в УкрНИИДТ. - 814-Укр91. 2. Б е р н а к е в и ч Н.Е., Ш и н к а р е н к о Г.А. Численное моделирование акустической взаимодействия оболочек в рідині. І. Формулювання і розв'язуваність варіаційних задач // Вісн. Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. 1994. Вип. 41. 3. А в д о Г., Д и о н с Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 382 с. 4. Ш и н к а р е н к о Г.А. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьроелектричества. П. Дискретизация и разрешимость нестационарных задач // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30. № 2. С. 317-326. 5. Ш и н к а р е н к о Г.А. Чисельне моделювання динаміки взаємодії фізико-механічних полів: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. Львів, 1993. 36 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.95

Г.Г.Цегелик, Х.С.Кудеравець

АПРОКСИМАЦІЯ ЧАСТКОВИХ СУМ УЗАГАЛЬНЕНИХ
ГАРМОНІЧНИХ РЯДІВ НЕПЕРЕВНИМИ ФУНКЦІЯМИ

У різних розділах прикладної математики та інформатики виникає потреба апроксимації часткових сум розбіжних числових рядів неперервними функціями, аргументами яких є кількість доданків цих сум. Однак така апроксимація можлива лише для окремих числових рядів.

Під час дослідження ефективності і побудови математичних моделей оптимального доступу до інформації файлів баз даних, що становлять інформаційне ядро обчислювальних систем, у випадку, коли ймовірності звертання до записів файла розподілені за законом [1, 2]

$$P_i = \frac{1}{i^s H_n^{(s)}} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad /1/$$

де n — кількість записів файла; P_i — ймовірність звертання до i -го запису, $0 < s < 1$;

$$H_n^{(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}$$

— n -на часткова сума узагальненого гармонічного ряду, постає значення апроксимації часткових сум $H_n^{(s)}$ для $0 < s < 1$ і $H_n^{(s-1)}$ для $0 < s < 1$ неперервними функціями від аргументу n .

Зауважимо, що саме нерівномірний розподіл ймовірностей звертання до записів файла є типовим для багатьох систем обробки інформації і розподіл /1/ — це узагальнений закон розподілу ймовірностей, частковими випадками якого є окремі відомі в літературі розподіли. Наприклад, при $s=0$ розподіл ймовірностей /1/ є рівномірним, при $s=1$ одержуємо закон Зіпфа, при $s=0,8614$ маємо розподіл, який приблизно задовольняє правило "80-20" [3].

Якщо $s=1$, то для апроксимації n -ї часткової суми

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

гармонічного ряду можна використати натуральний логарифм [4]:

$$H_n = \ln n + C + \gamma_n,$$

де $C = 0,577\dots$ - ейлерова стала; γ_n - деяка нескінченно мала величина.

Якщо $0 < s < 1$, то для апроксимації $H_n^{(s)}$ пропонується використувати формулу

$$H_n^{(s)} = \frac{1}{1-s} n^{1-s} - C^{(s)} + \gamma_n^{(s)},$$

де $C^{(s)}$ - деяка константа; $\gamma_n^{(s)}$ - деяка нескінченно мала величина. Значення констант $C^{(s)}$ для $s = 0,1k$ ($k = 1, 2, \dots, 9$) наведені у праці [5].

Якщо $0 < s < 1$, то для апроксимації $H_n^{(s-1)}$ пропонуємо формулу

$$H_n^{(s-1)} = \frac{1}{2-s} n^{2-s} + \alpha^{(s)}(n),$$

де $\alpha^{(s)}(n)$ майже постійна функція. Для знаходження значень функції $\alpha^{(s)}(n)$ ($n = 1, 2, \dots, 100$) при $s = 0,1k$ ($k = 1, 2, \dots, 9$) ми склали таблицю.

Для ознайомлення з характером поведінки функції $\alpha^{(s)}(n)$ наведемо з таблиці значення цієї функції для деяких s і n :

N	C				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
50	16.855608	11.341126	3.333540	5.064058	3.333540
150	45.385693	27.434819	5.919240	9.939240	5.919240
250	71.906104	41.330785	7.700443	13.562904	7.700443
350	97.356769	54.126778	9.148484	16.634134	9.148484
450	122.080462	66.201702	10.400680	19.368529	10.400680
550	146.256262	77.747162	11.519930	21.868195	11.519930
650	169.994075	88.877965	12.541297	24.191437	12.541297
750	193.366076	99.670127	13.486699	26.375413	13.486699
850	216.431597	110.177443	14.370923	28.445590	14.370923
950	239.221772	120.499848	15.204501	30.420363	15.204501

N	C			
	0,6	0,7	0,8	0,9
50	2.146904	1.324621	0.744425	0.322397
150	3.464762	1.954942	1.012671	0.408101
250	4.305459	2.327017	1.159079	0.451318
350	4.960942	2.605215	1.264042	0.481023
450	5.511467	2.832137	1.347188	0.503873
550	5.992592	3.020636	1.416652	0.522537
650	6.423665	3.196605	1.476646	0.538364
750	6.816549	3.349675	1.529657	0.552133
850	7.179120	3.489055	1.577285	0.564340
950	7.516913	3.617386	1.620623	0.575316

1. Цегелик Г.Г. Организация и поиск информации в базах данных. Львов: Вища шк., 1987. 176 с. 2. Цегелик Г.Г. Системы распределенных баз данных. Львов: Свит, 1990. 169 с. 3. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ: В 3 т. М.: Мир, 1978. Т.3. 844 с. 4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Наука, 1970. Т.2. 800 с. 5. Захаревич Л.І., Цегелик Г.Г. Про апроксимацію часткових сум узагальнених гармонічних рядів неперервними функціями // Вісн. Львів. політех. ін-ту. Диференц. рівняння і їх застосування. 1993. № 269. С. 64-66.

Стаття надійшла до редколегії 16.01.95

М.В.Жук

ЗБІЖНІСТЬ ТА ОЦІНКА ШВИДКОСТІ
ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядаємо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv - \frac{\partial p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} + \\ + z(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = f(x, y) \quad /1/$$

за однорідної крайової умови

$$p[u]|_{\Gamma} = [p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cos(\nu, x) + q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cos(\nu, y)]|_{\Gamma} = 0, /2/$$

де Γ - межа області Φ , обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$,
а по y - кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x) < h(x)$; ν -
зовнішня нормаль до Γ .

На функції $p(x, y, s, t, z)$, $q(x, y, s, t, z)$, $r(x, y, s, t, z)$ накладаються
ті ж обмеження, що і в праці [2]. $f(x, y) \in H = Z_2(\Phi)$. Крім цього,
припускається, що при $(x, y) \in \Phi$ і довільних s, t, z
справедлива нерівність

$$\frac{\partial p}{\partial t} \xi_1^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial t} \right) \xi_1 \xi_2 + \frac{\partial q}{\partial z} \xi_2^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t} \right) \xi_1 \xi_0 + \\ + \left(\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \xi_2 \xi_0 + \frac{\partial z}{\partial s} \xi_0^2 \geq M(\xi_1^2 + \xi_2^2) + N \xi_0^2. \quad /3/$$

де ξ_0, ξ_1, ξ_2 - довільні дійсні числа; $M = \text{const} > 0$,
 $N = \text{const} < 0$ [3].

Тоді для довільних u, v, w в $W_2'(\Phi)$ виконуються нерів-
ності

$$A(u, u-v) - A(v, u-v) \geq \mu |u-v|^2, \quad /4/$$

$$A(u, w) - A(u, v) \leq \eta |u-v| |w|, \quad /5/$$

де $\mu = \text{const} > 0$, $\eta = \text{const} > 0$, що визначаються умовами задачі,
 $A(u, v)$ квазібілінійна форма

$$A(u, v) = \iint_D \left[p(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial v}{\partial x} + q(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial v}{\partial y} + r(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) v \right] dx dy,$$

а

$$\|u\| = \left\{ \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 \right] dx dy \right\}^{1/2} \quad /6/$$

норма простору $W_2^1(\Phi)$ [3].

Наближений розв'язок задачі /1/-/2/ шукаємо методом Канторовича у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \varphi_k(x, y), \quad /7/$$

де лінійно незалежні в проміжку $[g(x), h(x)]$ функції $\varphi_k(x, y)$ вибираються таким чином, щоб система функцій $\{y_c(x) \varphi_k(x, y)\} \in W_2^1(\Phi)$ була повною за нормою /6/. Шукані коефіцієнти $c_k(x)$ визначаються зі системи

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (Au_n - f) \varphi_i dy + \varphi_i \sqrt{1+y'^2} p[u_n] \Big|_{y=g(x)} + \varphi_i \sqrt{1+y'^2} p[u_n] \Big|_{y=h(x)} = 0 \quad /8/$$

за умов

$$\int_{g(a)}^{h(a)} p[u_n] \varphi_i \Big|_{x=a} dy = 0, \quad \int_{g(b)}^{h(b)} p[u_n] \varphi_i \Big|_{x=b} dy = 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad /9/$$

Як відомо, для узагальненого розв'язку $u \in W_2^1(\Phi)$ задачі /1/-/2/ виконується тотожність

$$A(u, v) = \iint_D f v dx dy \quad /10/$$

при довільній функції $v \in W_2^1(\Phi)$. Аналогічно для узагальненого розв'язку $u_n(x, y)$ системи /8/-/9/ справедлива тотожність

$$A(u_n, v_n) = \iint_D f v_n dx dy, \quad /11/$$

де $v_n(x, y)$ - довільна функція з $H_n \cap W_2^1(\Phi)$, $H_n \subset H$ - простір функцій вигляду $v_n(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \varphi_k(x, y)$ [4]. Відомо, що умови /4/, /5/ забезпечують існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі /1/-/2/ [1] і системи /7/-/8/ [4].

Покажемо збіжність та визначимо оцінку швидкості збіжності методу Канторовича.

Нехай u, u_n - узагальнені розв'язки відповідно /1/-/2/ і /8/-/9/. Тоді з тотожностей /10/-/11/ для довільного елемента

$\omega_n \in H_n \cap W_2'(\Omega)$ отримуємо

$$A(u, \omega_n) - A(u_n, \omega_n) = 0. \quad /12/$$

З нерівності /4/, беручи до уваги співвідношення /12/ при $\omega_n = u_n - v_n$, де v_n - довільний елемент з $H_n \cap W_2'(\Omega)$, а також лінійність форми $A(u, v)$ за другим аргументом, маємо

$$|u - u_n|^2 \leq \frac{1}{\mu} [A(u, u - u_n) - A(u_n, u - u_n)] = \frac{1}{\mu} [A(u, u - v_n) - A(u_n, u - v_n)].$$

Далі, використовуючи нерівність /5/, з останнього співвідношення отримуємо

$$|u - u_n|^2 \leq \frac{\eta}{\mu} |u - u_n| |u - v_n|.$$

Таким чином

$$|u - u_n| \leq C |u - v_n|, \quad /13/$$

де $C = \frac{\eta}{\mu}$, а елемент $v_n \in H_n \cap W_2'(\Omega)$ вибираємо таким, щоб він реалізував мінімум функціоналу $|u - v_n|$. При цьому внаслідок повноти координатної системи функцій

$$|u - v_n| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ [3]. Отже, справедлива така теорема.

Теорема. За обмежень щодо вихідних задач /1/-/2/, які забезпечують виконання умов /4/, /5/, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою /13/.

Зауважимо, що у випадку задання вихідного рівняння у вигляді

$$Au = - \frac{\partial p(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial q(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} + z(x, y, u) \quad /14/$$

для виконання нерівності /4/ умову /3/ замінюємо умовою еліптичності рівняння /14/ та припущенням, що похідна $\frac{\partial z}{\partial s}$ додатно обмежена.

Повною системою лінійно незалежних функцій у просторі $W_2'(\Omega)$ є система $\{x^l y^k\}$, $l, k = 0, 1, 2, \dots$, тому можемо прийняти

$$\varphi_k(x, y) = y^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При цьому, якщо узагальнений розв'язок задачі /1/-/2/, перші похідні якого неперервні, має сумовані з квадратом в області Ω другі узагальнені похідні, $g''(x), h''(x)$ - неперервні, то використовуючи результати праці [2], отримуємо, що швидкість збіжності методу Канторовича характеризується оцінкою $|u - u_n| = O(\frac{1}{n})$.

Якщо ж, крім цього, $u(x, y) \in W_2^{s+1}(\Omega)$, функції $g^{(s+1)}(x)$, $h^{(s+1)}(x)$ неперервні, то

$$|u - u_n| = O\left(\frac{1}{n^s}\right).$$

І. В а р г а Р. Функціональний аналіз і теорія аппроксимацій в численному аналізі. М., 1974. 2. В л а с о в а З.А. О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Тр. мат. ин-та АН СССР. 1959. Т. 53. С. 34-42. 3. Ж у к М.В. Дослідження швидкості збіжності методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. 1976. Т. 28. № 2. С. 183-193. 4. Ж у к М.В. Розв'язування нелінійного диференціального рівняння методом Канторовича // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 41. С. 52-55.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.95

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ УРАХУВАННЯМ АПРІОРНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКУ

Для аналізу та розв'язування задач математичної фізики широко застосовують метод інтегральних рівнянь /ІР/. Він дає змогу одержувати ефективні розв'язки різного типу крайових задач у суттєво просторовій постановці. Основною перевагою методу ІР є зменшення розмірності задачі на одиницю. Згаданий метод використовують для дослідження дифракції електромагнітних та акустичних хвиль на тонких екранах, електростатичних полів, утворених сукупністю заряджених електродів окладної конфігурації, теплових полів у тілах з тріщинами тощо. Метод ІР полягає у поданні в інтегральній формі розв'язку відповідної крайової задачі. Як наслідок одержують різні за типом та складністю ІР.

Розглянемо в цьому контексті двовимірне ІР першого роду зі слабкою особливістю в ядрі:

$$\int_S Q(P) [dist(P, M)]^{-1} dx dy = F(M). \quad \text{Л/}$$

Тут $P = (x, y)$; $M = (x_0, y_0)$ - точки евклідового простору R^2 , $S = [-1, 1] \times [-1, 1]$; $Q(P)$ - шуканий розв'язок; $F(M)$ - задана

© Гарасим Я.С., Остудін Б.А., 1995

функція, причому $M \in S$, $\text{dist}(P, M) = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$.
За допомогою ІР /1/ описують електростатичне поле, утворене зарядженою пластинкою S , квадратною за формою і розташованою паралельно до площини $Z = 0$ у декартовій системі координат XYZ простору R^3 . Шукана функція $Q(P)$ виражає густину розподілу заряду на поверхні S . Попри зовнішню простоту формулювання, проблеми, які постають під час аналізу рівняння /1/, є типовими для широкого класу ІР, що моделюють різні фізичні процеси та явища в суттєво просторовій постановці на так званих многовидах з межею. З математичних міркувань розв'язки ІР /1/ можна досліджувати в різних функціональних просторах. Однак вибір останнього повинен забезпечувати пов'язку шуканої густини поблизу контуру поверхні S відповідно до описуваного фізичного явища.

Беручи до уваги симетрію розв'язку, ІР /1/ доцільно подати у вигляді

$$\int_{S_{1/4}} Q(P) K(P, M) dx dy = F(M), \quad /2/$$

де $S_{1/4} = [0, 1] \times [0, 1]$, $M \in S_{1/4}$, а $K(P, M) = [\text{dist}(P, M)]^{-1} + [\text{dist}(P_x, M)]^{-1} + [\text{dist}(P_y, M)]^{-1} + [\text{dist}(P_{xy}, M)]^{-1}$, причому $P_x = (-x, y)$, $P_y = (x, -y)$, $P_{xy} = (-x, -y)$. Розв'язок ІР /2/ аналізуємо у так званому модифікованому просторі Гельдера $\tilde{H}_{1/4}$. Функція $Q(P)$ належить до $\tilde{H}_{1/4}$, якщо її можна подати у вигляді $Q(P) = Q^*(P)/\omega(P)$, де $Q^*(P) \in H(S_{1/4})$, а $\omega(P) = \sqrt{(1-x)(1-y)} / [(1-x)^\mu + (1-y)^\mu]$, причому $\mu = 1 - \sqrt{2}/2$. Тут через $H(S_{1/4})$ позначений клас функцій двох змінних, які в $S_{1/4}$ задовольняють умову Гельдера рівномірно по кожній змінній. Обране подання найкраще узгоджується з фізичною картиною поведінки густини $Q(P)$ поблизу вільної межі пластини S та в околі її кутової точки в координатах /1, 1/ [5].

Зауважимо, що ідея методу саморегуляризації [2, 3, 4] полягає в тому, що беручи до уваги характер поведінки шуканого розв'язку, а також спеціальним чином локалізуючи особливість ядра ІР /2/, можна наближено перейти до ІР другого роду, яке досліджується за відомих схем. Для локалізації ядра подаємо його головну частину у вигляді

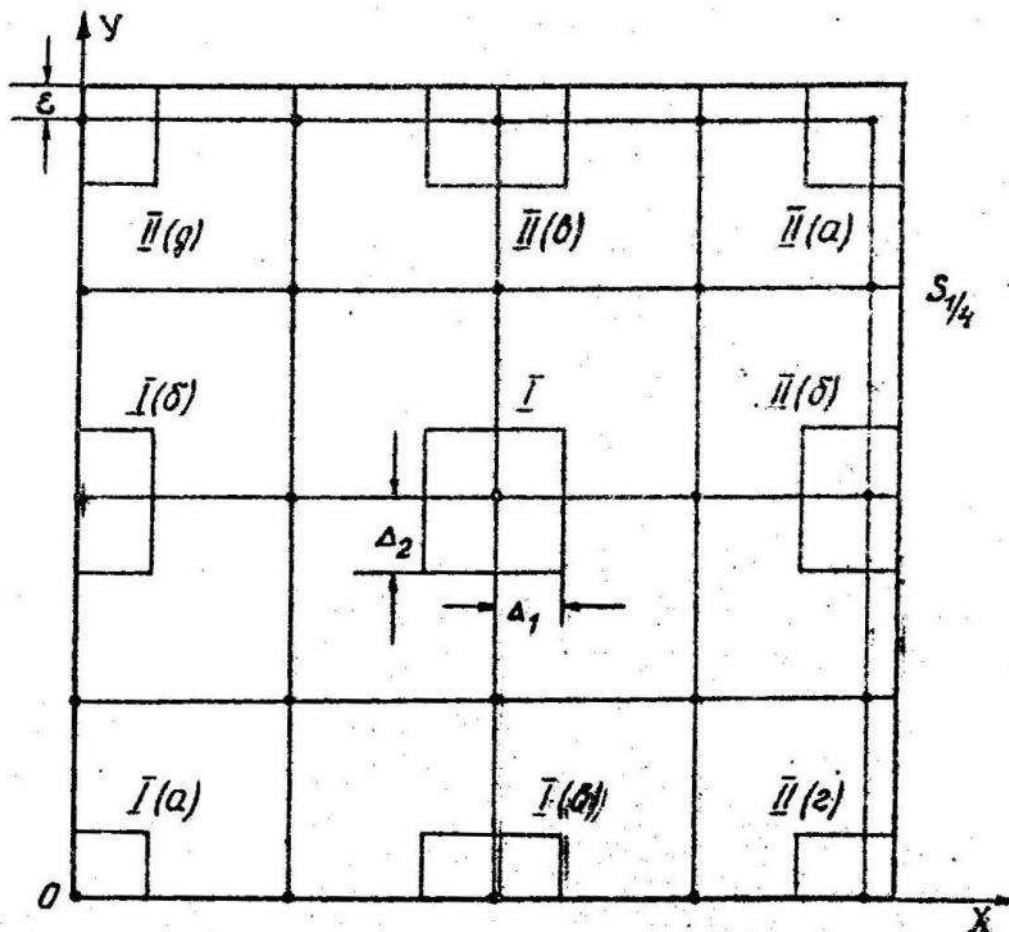
$$[\text{dist}(P, M)]^{-1} = N(P, M) + O(P, M), \quad /3/$$

де

$$N(P, M) = \begin{cases} \frac{(\Delta_1 - |x - x_0|)(\Delta_2 - |y - y_0|)}{\Delta_1 \Delta_2 \text{dist}(P, M)}, & P \in S_0, \\ 0, & P \notin S_0, \end{cases}$$

$$G(P, M) = \begin{cases} \frac{\Delta_2 |x - x_0| + \Delta_1 |y - y_0| - |x - x_0| \cdot |y - y_0|}{\Delta_1 \Delta_2 \text{dist}(P, M)}, & P \in S_0, \\ [\text{dist}(P, M)]^{-1}, & P \notin S_0, \end{cases}$$

$S_0 = [x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1] \times [y_0 - \Delta_2, y_0 + \Delta_2]$; Δ_1, Δ_2 — невід'ємні дійсні достатньо малі параметри, вибір яких узгоджується з кроком сітки розбиття $S_{1/4}$ на елементи /див. рисунок/ у процесі побудови дискретного аналога /2/.



Підставляючи /3/ в /2/, одержуємо

$$\int Q(P) N(P, M) dx dy + \int Q(P) R(P, M) dx dy = F(M),$$

де $R(P, M) = \int_{S_{1/4}} K(P, M) - [\text{dist}(P, M)]^{-1} + G(P, M)$. Припускаючи, що Δ_1 і Δ_2 настільки малі, що функція $Q(P)$ мало змінюється в S_0 , одержуємо наближений аналог IP /2/:

$$Q(M) L(M) + \int_{S_{1/4}} Q(P) R(P, M) dx dy = F(M),$$

/4/

$$L(M) = \frac{\omega(M)}{\Delta_1 \Delta_2} \int_{S_0} \frac{(\Delta_1 - |x - x_0|)(\Delta_2 - |y - y_0|)}{\omega(P) \cdot \text{dist}(P, M)} dx dy, \quad /5/$$

ІР /4/ розв'язується методом колокації з використанням білінійної або біквадратичної апроксимації шуканої густини розподілу заряду $Q(P)$. У процесі розв'язання /4/ постає потреба обчислення з гарантованою точністю невласного інтеграла /5/, підінтегральна функція якого має особливості за рахунок властивості ядра ІР /І/, а також у точках поверхні S , де $\omega(P) = 0$. Оскільки немає універсального способу позбавлення від особливостей у /5/, розглянемо деякі випадки /див. рисунок/, кожен з яких відзначається окремим підходом. Не зменшуючи загальності, зупинимося на двох: І і II/a/. У першому інтеграл /5/ легко перетворити до вигляду

$$L(M) = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \int_{S_0} \frac{B(P, M)}{\omega(P)} dx dy + \int_{S_0} [\text{dist}(P, M)]^{-1} dx dy, \quad /6/$$

де

$$B(P, M) = [(\Delta_1 - |x - x_0|)(\Delta_2 - |y - y_0|)\omega(M) - \Delta_1 \Delta_2 \omega(P)] \cdot [\text{dist}(P, M)]^{-1},$$

причому другий інтеграл беремо аналітично /І/, а для наближеного обчислення першого подвійного інтеграла можна використати одну з відомих кубатурних формул. Річ у тому, що підінтегральна функція в першому інтегралі є неперервною, оскільки

$$\lim_{P \rightarrow M} \frac{B(P, M)}{\omega(P)} = - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\sqrt{2}}.$$

У випадку II/a/ перший інтеграл формули /6/ має вигляд

$$\int_{x_0 - \Delta_1}^{x_0 + \Delta_1} \int_{y_0 - \Delta_2}^{y_0 + \Delta_2} \frac{B(P, M)}{\omega(P)} dx dy.$$

Очевидно, що це невласний інтеграл за рахунок перетворення на нуль функції $\omega(P)$. Тому виконаємо в ньому заміну змінних: $x(u, v) = \varepsilon(1 - u^2)$, $y(u, v) = \varepsilon(1 - v^2)$. У результаті він набуває вигляду

$$A \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B(P^*, M)(u^{2\mu} + v^{2\mu}) du dv,$$

де $P^* = (x, y) = \varepsilon[x(u, v), y(u, v)]$. Для застосування квадратурних формул слід лише звести, що

$$\lim_{P \rightarrow M} B(P^*, M)(u^{2\mu} + v^{2\mu}) = -\varepsilon \cdot \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}.$$

Описаний алгоритм використовують для розв'язування широкого кола крайових задач теорії потенціалу в електронній оптиці. Досвід показує, що попри відносну складність реалізації методу, в окремих випадках складної конфігурації заряджених електродів позитивний результат можна отримати, лише беручи до уваги всі особливості розв'язку.

І. Г а р а с и м Я.С., О с т у д і н Б.А. Дослідження алгоритму обчислення одного класу двовимірних невластних інтегралів //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 33. С. 40-45. 2. Д м и т р и е в В.И., З а х а р о в Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I-го рода //Вычисл. методы и программирование. 1968. Вип. 10. С. 49-54. 3. Л ю д к е в и ч И.В., О с т у д и н Б.А. Численное решение граничных задач теории потенциала в электронной оптике методом саморегуляризации. Львов, 1983. 43 с. Рукопись деп. в УкрНИНТИ, № 1455-Ук-ДБЗ. 4. Т и х о н о в А.Н. Д м и т р и е в В.И. Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы //Вычисл. методы и программирование. 1968. Вип. 10. С.3-8. 5. Hanson R.J., Philips J.L. Numerical solution of two dimensional integral equation using linear elements // SIAM J. Numer. Anal. 1978. Vol.15. No 1. P. 113-121.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.95

УДК 517.947

А.А.Пареймбіда, Р.С.Ханко

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ПОЧАТКОВО - КРАЙОВИХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

Розглядаючи задачі теплопровідності звичайно обмежуються математичною моделлю, що описується параболічним рівнянням у частинних похідних з відповідними початковими та граничними умовами. Іноді [2] потрібно розглядати модель, що враховує скінченну швидкість поширення тепла. Така постановка задачі приводить до розгляду початково - крайових задач для гіперболічного рівняння теплопровідності, яке ще називають телеграфним рівнянням.

Постановка задачі. Нехай в R^3 -задана необмежена область D , така, що доповнення її є обмеженим і однозв'язним, та його границя S належить класу C^2 . Розглянемо початково-крайову задачу для

© Пареймбіда А.А., Ханко Р.С., 1995

телеграфного рівняння

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{в } D \times [0, \infty) \quad /1/$$

($a > 0, b > 0$) з однорідними початковими умовами

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in D \quad /2/$$

і граничною умовою

$$u = F \text{ на } S \times [0, \infty), \quad /3/$$

де F - задана функція, що задовольняє умову узгодженості

$$F(x, 0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in S.$$

Крім цього, вважаємо, що в разі спрямування точки спостереження в нескінченність, функція $u(t, x)$ прямує до нуля.

Для рівняння /1/, з урахуванням умов /2/, потенціал простого шару має вигляд [1]:

$$v(x, t) = \iiint_S \int_0^t \sigma(\tau, y) G\left(t - \tau, \frac{|x - y|}{a}\right) d\tau ds(y), \quad /4/$$

де $\sigma(\tau, y)$ - густина; $G(t, r)$ - фундаментальний розв'язок, що має таке зображення:

$$G(t, r) = \frac{e^{-\alpha t}}{4\pi a} \left\{ \frac{\delta_+(t-r)}{r} + E_+(t-r) \alpha \frac{I_1(\alpha \sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right\}, \quad /5/$$

де $E_+(z)$ - функція Хевісайда; $I_1(z)$ - модифікована функція Бесселя; $\delta_+(z)$ - функція Дірака; $\alpha = a^2/2b$.

Справедливі такі твердження.

Теорема 1. Фундаментальні розв'язки телеграфного рівняння /1/ $G(t, x)$ та рівняння теплопровідності $G_T(t, x)$ зв'язані наступними співвідношеннями:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} G(t, r) = G_T(t, r),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [G(t, r) - G_T(t, r)] = 0.$$

Теорема 2. Потенціал простого шару для телеграфного рівняння, визначений як /4/, є розв'язком задачі /1/-/3/, якщо його густина є розв'язком інтегрального рівняння /1Р/ першого роду:

$$\iiint_S \int_0^t \sigma(\tau, y) G\left(t - \tau, \frac{|x - y|}{a}\right) d\tau ds(y) = F(t, x), \quad x \in S, t > 0. \quad /6/$$

Параметризація 1Р. Нехай поверхня S утворена обертанням деякої кривої навколо осі OZ . Введемо циліндричну систему коор-

динат (r, z, φ) і вважатимемо, що гранична функція не залежить від φ . Тоді розв'язок задачі також не залежить від φ і його можна шукати у верхній півплощині $\varphi = 0$. Нехай

$S = \{P(v) = (r(v), z(v)), v \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}; [r'(v)]^2 + [z'(v)]^2 > 0$.
У такому випадку IP /6/ запишемо у такій параметричній формі:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^t q(\tau, v) H(t - \tau, v, \varphi) d\tau d\varphi dv = g(t, v), \quad /7/$$

де

$$q(\tau, v) := \sigma(\tau, P(v)) |P'(v)| r(v); \quad g(t, v) := F(t, P(v)),$$

$$H(t, v, \varphi) := G\left(t, \frac{R(P(v), P(v), \varphi)}{a}\right);$$

$$R(P(v), P(v), \varphi) := [r^2(v) + r^2(v) - 2r(v)r(v)\cos\varphi + (z(v) - z(v))^2]^{1/2}$$

Дискретизація за часом. Нехай розв'язок вихідної задачі потрібно знайти на проміжку $[0; T]$ ($T > 0$), у моменти часу $t_n = nh_t$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N_t$), де $h_t = T/N_t$. Невідому густину вважатимемо кусково - сталою за часом, тобто

$$\forall \tau \in (t_{i-1}, t_i], \quad q(\tau, v) = q_i(v).$$

Тепер у момент часу t_n , з урахуванням зображення /5/, IP /7/ набуває вигляду

$$\int_0^\pi q_n(v) \int_0^{2\pi} [D_0^{(1)}(v, v, \varphi) + D_0^{(2)}(v, v, \varphi)] d\varphi dv = g_n(v) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi q_k(v) \int_0^{2\pi} [D_{n-k}^{(1)}(v, v, \varphi) + D_{n-k}^{(2)}(v, v, \varphi)] d\varphi dv, \quad n = 1, 2, \dots, N_t, \quad /8/$$

де

$$r(v, v, \varphi) = \frac{R(v, v, \varphi)}{a}.$$

$$D_m^{(1)}(v, v, \varphi) = \frac{1}{4\pi r(v, v, \varphi)} e^{-\alpha r(v, v, \varphi)} E_+^m(r(v, v, \varphi)),$$

/9/

$$E_+^m(t) = \begin{cases} 0, & t \notin (mh_t, (m+1)h_t) \\ 1, & t \in (mh_t, (m+1)h_t) \end{cases}$$

$$D_m^{(2)}(\nu, \nu, \varphi) = E_+((m+1)h_t - r(\nu, \nu, \varphi)) \frac{\alpha}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(mh_t, (m+1)h_t) r_{(\nu, \nu, \varphi)}^{2n} / \text{IO/}$$

Таким чином, після дискретизації за часом гранично - часове ІР /6/ зводиться до послідовності ІР /7/, де функції $D_m^{(1)}$ та $D_m^{(2)}$ задаються співвідношенням /9/ та /10/ відповідно.

Обчислення внутрішніх інтегралів. Наступним кроком буде обчислення інтегралів по φ у /8/. Як бачимо з формули /10/, функції $D_m^{(2)}(\nu, \nu, \varphi)$ не мають ніяких особливостей, і їх інтегрування по φ можна здійснити за допомогою звичайних квадратурних формул, наприклад, Гауса. Функції $D_m^{(1)}(\nu, \nu, \varphi)$ мають особливість, яку потрібно брати до уваги, інтегруючи їх.

Позначимо

$$H_m^{(1)}(\nu, \nu) := \int_0^{2\pi} D_m^{(1)}(\nu, \nu, \varphi) d\varphi.$$

Враховуючи означення функції $E_+^m(z)$ та зображення /9/, $H_m^{(1)}(\varphi, \nu)$, можна записати у вигляді двох доданків, у першому з яких міститься особливість, а другий можна обчислити будь-яким з відомих квадратурних методів. Отже,

$$H_m^{(1)}(\varphi, \nu) = \hat{H}_m^{(1)}(\nu, \nu) + \check{H}_m^{(1)}(\nu, \nu),$$

де

$$\hat{H}_m^{(1)}(\nu, \nu) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(r(\nu) + r(\nu))^2 + (z(\nu) - z(\nu))^2}} (F(\tilde{\psi}_m, k) - F(\tilde{\psi}_{m+1}, k)),$$

$$\check{H}_m^{(1)}(\nu, \nu) = H_m^{(1)}(\nu, \nu) - \hat{H}_m^{(1)}(\nu, \nu);$$

$F(\psi, k)$ - неповний еліптичний інтеграл першого роду [3]. Таким чином, послідовність інтегральних рівнянь /8/ запишемо у формі

$$\int_0^\pi q_n(\nu) p_0(\nu, \nu) d\nu = g_n(\nu) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi q_k(\nu) p_{n-k}(\nu, \nu) d\nu, \quad n=1, 2, \dots, N_t, \quad \text{II/}$$

де

$$p_m(\nu, \nu) = \int_0^{2\pi} D_m^{(2)}(\nu, \nu, \varphi) d\varphi + \check{H}_m^{(1)}(\nu, \nu) + \hat{H}_m^{(1)}(\nu, \nu).$$

Колокація по геометричній координаті. Введемо на відріжку $[0, \pi]$ розбиття $\nu_i = \frac{i\pi}{N_\nu}$, $i = 0, 1, \dots, N_\nu$, і вважатимемо, для простоти викладу, невідомі густини кусково-сталими, тобто

$$\forall \nu \in (\nu_{i-1}, \nu_i], \quad q_n(\nu) = q_{ni}.$$

результаті з послідовності IP /11/ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{N_U} a_{ni} \int_{\bar{v}_{i-1}}^{\bar{v}_i} p_0(v, v) dv = g_n(v) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{N_U} a_{ki} \int_{\bar{v}_{i-1}}^{\bar{v}_i} p_{n-k}(v, v) dv.$$

Задовольняючи виписані апроксимаційні рівняння в точках колокації $\bar{v}_i \in [0, \pi]$, для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ki} отримуємо послідовність систем лінійних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{N_U} a_{nj} A_j^{(0)}(\bar{v}_i) = g_n(\bar{v}_i) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{N_U} a_{kj} A_j^{(n-k)}(\bar{v}_i), \quad /12/$$

де

$$A_j^{(m)}(\bar{v}_i) = \int_{\bar{v}_{j-1}}^{\bar{v}_j} p_m(v, \bar{v}_i) dv. \quad /13/$$

Можна показати, що у коефіцієнтах /13/ присутня логарифмічна особливість при $m = 0$ та $v \rightarrow v$. Її видалення здійснюється методом Канторовича.

Отже, розв'язування вихідної нестационарної задачі /1/-/3/ зведено до розв'язку послідовності систем лінійних рівнянь /12/, матриці яких однакові, а для кожного моменту часу t_n перевизначають лише праву частину.

Остаточно наближений розв'язок вихідної задачі обчислюється за формулою

$$\tilde{u}(x, t_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_U} a_{ki} A_i^{(n-k)}(x).$$

Приклад. Описаний алгоритм реалізований у вигляді програмного комплексу для персонального комп'ютера типу IBM. Розглянемо задачу /1/-/3/ з коефіцієнтами $a = b = 1$ на сфері ($P(v) = \{\sin v, \cos v\}$) з граничною умовою $F(x, t) = F(t) = 3t^2 e^{-6t+2}$.

Вона має такий точний розв'язок:

$$F_a(x, t) = F(t-p) \frac{e^{-p}}{|x|} + 2p \int_p^t F(t-r) \frac{I_1(\frac{1}{2}\sqrt{r^2-p^2})}{\sqrt{r^2-p^2}} e^{-\frac{r}{2}} dr; \quad p = |x| - 1.$$

У таблиці наведені результати порівняння $\tilde{u}(x, t_n)$ з $F_a(x, t_n)$ при $h_r = 0,025$ та $N_v = 64$.

$t \ x$	$(r, z) = /0.8, 0.8/$		$(r, z) = /0.9, 0.9/$	
	$F_a(x, t_n)$	$\tilde{u}(x, t_n)$	$F_a(x, t_n)$	$\tilde{u}(x, t_n)$
0.10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.20	0.057356	0.057843	0.000000	0.000000
0.30	0.190703	0.189958	0.009570	0.009919
0.40	0.266841	0.264665	0.115638	0.114925
0.50	0.277538	0.273871	0.204410	0.201671
0.60	0.248345	0.243271	0.235689	0.230045
0.70	0.203158	0.197206	0.224414	0.215740

І. Н о в и к о в І.А. Трехмерные потенциалы для телеграфного уравнения и их применение к краевым задачам теплопроводности. // Инж.-физ. журн. 1979. Т. 36. № 1. С. 139-146. 2. Подстри-
г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Обобщенная термомеханика. К.: Наук.
думка, 1976. 310 с. 3. С п р а в о ч н и к по специальным функ-
циям /Под ред. Абрамовица М., Стиган М. М.: Наука, 1979. 842 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.95

УДК 519.68

М.С.Лаба, Г.Г.Цегелик

МЕТОД $m+1$ -АРНОГО ПОШУКУ ІНФОРМАЦІЇ В УПОРЯДКОВАНИХ ПОСЛІДОВНИХ ФАЙЛАХ І ЙОГО ЕФЕКТИВНІСТЬ

У даній праці на основі розпаралелювання методу двійкового пошуку інформації в послідовних упорядкованих файлах $/I/$ вводиться поняття методу $m+1$ -арного пошуку, орієнтованого на його використання для пошуку записів у послідовних упорядкованих файлах, що містяться в пам'яті багатопроцесорної ЕОМ, до складу якої входить m процесорів, які працюють паралельно і мають спільне поле пам'яті. За критерій ефективності приймається середня та максимальна кількість паралельних порівнянь, потрібних для пошуку запису у файлі. При цьому припускається, що послідовний файл містить N записів, які пронумеровані послідовними натуральними чис-

© Лаба М.С., Цегелик Г.Г., 1995

лами в порядку їх розміщення у файлі; K_i - значення ключа i -го запису. Для знаходження середньої та максимальної кількості паралельних порівнянь, що потрібні для пошуку запису в файлі, використовують відповідно формули [2]

$$C(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_m(K_i), \quad M(N) = \max_{K_i} t_m(K_i),$$

де $t_m(K_i)$ - кількість паралельних порівнянь, що потрібні для пошуку запису із значенням ключа K_i .

Нехай $j_1, j_2, j_3, \dots, j_m$ - номери записів файлу, які ділять файл на $m+1$ рівних із точністю до одного запису/частин. Першим кроком $m+1$ -арного пошуку є перегляд i -м $i = 1, 2, \dots, m$ / процесором значення ключа запису з номером j_i . Якщо перегляд успішний, то на цьому пошук запису завершується. У разі неуспішного перегляду дальший $m+1$ -арний пошук продовжується в одній із частин файлу, який містить шуканий запис. Добір потрібної частини файлу відбувається за результатами порівняння на першому кроці. Нехай $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ - номери записів файлу, які ділять обрану частину файлу на $m+1$ рівних із точністю до одного запису/частин. Тоді другим кроком $m+1$ -арного пошуку є перегляд i -м $i = 1, 2, \dots, m$ / процесором значення ключа з номером k_i . Якщо перегляд успішний, то на цьому пошук запису завершується. У разі неуспішного перегляду, дальший $m+1$ -арний пошук продовжується в одній із частинок обраної частини файлу, яка містить шуканий запис. І т.д. Через скінченну кількість кроків шуканий запис буде знайдений.

Знайдемо максимальну кількість паралельних порівнянь, що потрібні для пошуку запису у файлі.

Зауважимо, що $m+1$ -арний пошук еквівалентний пошуку за симетричним $m+1$ -арним деревом. Якщо таке дерево має l рівнів, то на k -му $k = 1, 2, \dots, l-1$ рівні міститься $m(m+1)^{k-1}$ вершин, а кількість вершин S на l -му рівні лежить у межах

$$l \leq S \leq m(m+1)^{l-1}.$$

Тому кількість вершин N симетричного $m+1$ -арного дерева, яке має l рівнів, лежить у межах

$$\sum_{i=0}^{l-2} m(m+1)^i < N \leq \sum_{i=0}^{l-1} m(m+1)^i,$$

або

$$(m+1)^{l-1} - 1 < N \leq (m+1)^l - 1.$$

Нехай кількість записів файлу N задовольняє умову

$$(m+1)^{l-1} \leq N < (m+1)^l.$$

Звідси випливає, що максимальна кількість паралельних порівнянь, потрібних для пошуку запису у файлі, лежить у межах

$$\log_{m+1} N < l \leq 1 + \log_{m+1} N.$$

Беручи до уваги, що l - ціле число, одержуємо формулу для максимальної кількості паралельних порівнянь:

$$M(N) = l = 1 + [\log_{m+1} N].$$

Знайдемо середню кількість паралельних порівнянь, що потрібні для пошуку запису у файлі. Одержуємо

$$C(N) = \frac{1}{N} \left(m \sum_{i=1}^{l-1} i(m+1)^{i-1} + l(N - ((m+1)^{l-1} - 1)) \right).$$

Знайдемо спочатку значення виразу $q = m \sum_{i=1}^{l-1} i(m+1)^{i-1}$. Нехай $m+1 = s$, тоді

$$\begin{aligned} q &= (s-1) \sum_{i=1}^{l-1} i s^{i-1} = (s-1)(1 + 2s + 3s^2 + \dots + (l-1)s^{l-2}) = \\ &= s + 2s^2 + 3s^3 + \dots + (l-1)s^{l-1} - 1 - 2s - 3s^2 - \dots - (l-1)s^{l-2} = \\ &= -1 - s - s^2 - \dots - s^{l-2} + (l-1)s^{l-1} = (l-1)s^{l-1} - \frac{1-s^{l-1}}{1-s} = \\ &= \frac{1}{s-1} ((l-1)s^l - ls^{l-1} + 1). \end{aligned}$$

Отже,

$$q = \frac{1}{m} ((l-1)(m+1)^l - l(m+1)^{l-1} + 1).$$

Тому

$$\begin{aligned} C(N) &= \frac{1}{N} \left(\frac{1}{m} ((l-1)(m+1)^l - l(m+1)^{l-1} + 1) + l(N+1) - l(m+1)^{l-1} \right) = \\ &= \frac{1}{mN} ((l-1)(m+1)^l - l(m+1)^{l-1} + 1 + lm(N+1) - lm(m+1)^{l-1}) = \\ &= \frac{1}{mN} ((l-1)(m+1)^l - l(m+1)^l + 1 + lm(N+1)) = \frac{1}{mN} (ml(N+1) + 1 - (m+1)^l). \end{aligned}$$

Отже,

$$C(N) = l - \frac{(m+1)^l - 1}{mN} + \frac{1}{N}.$$

Порівнюючи ефективність /за кількістю порівнянь/ методу двійкового пошуку і методу $/m+1/$ -арного пошуку, доходимо висновку, що розпаралелювання методу двійкового пошуку сприяє підвищенню ефективності приблизно в $\log_2(m+1)$ разів.

1. Цегелик Г.Г. Методы автоматической обработки информации. Львов: Вища шк. 1981. 132 с. 2. Цегелик Г.Г. Организация и поиск информации в базах данных. Львов: Вища шк. 1987. 176 с. 3. Цегелик Г.Г. Методы параллельного поиска информации в базах данных для многопроцессорных ЭВМ // Распараллеливание обработки информации: Газ. докл. 6-й Всесоюз. шк.-семинара, г.Львов, 18-23 мая 1987 г. Львов, 1987. Ч.1. С.205-206.

Стаття надійшла до редколегії 02.03.95

УДК 519.61

М.Я.Бартіш, А.І.Чипурко, С.М.Шахно

ПРО ОДНУ МОДИФИКАЦИЮ МЕТОДУ ГАУСА-НЬЮТОНА

У даній праці запропонована нова модифікація методу Гауса-Ньютона розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати:

$$\text{знайти } \min \frac{1}{2} F(x)^T F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i(x)^2. \quad /1/$$

де $F: R^n \rightarrow R^m$ ($m \geq n$) - функція нев'язки, нелінійна по x ; $f_i(x)$ - i -та компонента функції $F(x)$. Типовий приклад, коли виникає ця задача, - процес добору параметрів функціональної залежності за даними експерименту або статистичної вибірки, а також при розв'язуванні систем нелінійних рівнянь, в яких кількість нелінійних зв'язків перевищує кількість ступенів вільності.

Для розв'язування задачі /1/ використовують метод Ньютона [1]:

$$x_{n+1} = x_n - [J(x_n)^T J(x_n) + S(x_n)]^{-1} J(x_n)^T F(x_n), \quad /2/$$

$$S(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \nabla^2 f_i(x)$$

та Гауса-Ньютона [1].

$$x_{n+1} = x_n - [J(x_n)^T J(x_n)]^{-1} J(x_n)^T F(x_n), \quad /3/$$

де $J(x) = F'(x)$ - матриця Якобі з елементами $J(x)_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$,
($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$),
 $\nabla^2 f_i(x)$ - гесіан функції f_i у точці x , $n = 0, 1, \dots$.

© Бартіш М.Я., Чипурко А.І., Шахно С.М., 1995

Метод /2/ - швидкий локальний метод, оскільки він є локально квадратично збіжним. Однак його рідко застосовують на практиці, бо надто дорого обходяться обчислення $S(x)$. Крім цього, не бажано використовувати інші похідні.

Метод /3/ простіший, але швидкість збіжності його буде квадратичною лише у випадку задач з нульовою нев'язкою $F(x_*) = 0$, де x_* - розв'язок задачі /1/, інакше швидкість збіжності буде лінійною.

Розглянемо метод розв'язання задачі /1/, побудований нами на базі методу зі швидкістю збіжності $1 + \sqrt{2}$ [2]:

$$x_{n+1} = x_n - [J(\theta_n)^T J(\theta_n)]^{-1} J(\theta_n)^T F(x_n),$$

$$\theta_{n+1} = x_{n+1} - \frac{1}{2} [J(\theta_n)^T J(\theta_n)]^{-1} J(\theta_n)^T F(x_{n+1}),$$

$$\theta_0 = x_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad /4/$$

На кожній ітерації методу /4/ слід розв'язувати дві системи лінійних рівнянь з однаковою матрицею $A_n = [J(\theta_n)^T J(\theta_n)]$, яка є симетричною у випадку повного стовпцевого рангу $J(x_n)$ і додатно визначеною. Ефективно розв'язувати ці системи можна за допомогою збуреного розкладу Холевського $A_n + D = LL^T$ де D - невід'ємна діагональна матриця, елементи якої дорівнюють нулю у випадку додатно визначеної матриці A_n . При цьому на кожному кроці здійснюється лише один раз розклад на множники, один раз - прямий хід методу Холевського і двічі - обернений хід. Тобто кількість обчислень на одній ітерації методу /4/ близька до кількості обчислень на одній ітерації методу Гауса-Ньютона /3/.

Реальні швидкісні властивості методу /4/ виявляли за допомогою широкого чисельного експерименту. Для порівняння виконували розрахунки також методами Ньютона /2/, Гауса-Ньютона /3/ та модифікованим методом Гауса-Ньютона [2]:

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n [J(\bar{x}_n)^T J(\bar{x}_n)]^{-1} J(\bar{x}_n)^T F(\bar{x}_n),$$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{2}(x_n + \varphi(x_n)), \quad \varphi(x_n) = x_n - \alpha_n J(x_n)^T F(x_n), \quad /5/$$

де $n = 0, 1, \dots, \alpha_n; \beta_n$ - дійсні числові параметри з інтервалу $[0, 1]$.

Зауважимо, що під час реалізації методів /2/, /3/ /4/, як і в методу /5/, вводили допоміжальний множник β_n . Значення β_n визначали методом золотого перерізу.

У таблиці наведені результати розрахунків /кількість ітерацій для досягнення розв'язку з точністю $\varepsilon = 10^{-8}$ / на тестових задачах [1]. Символ " ∞ " означає, що при заданому початковому наближенні метод є розбіжним.

Приклад	Початкове наближення x^0	Метод Гауса- Ньютона на /2/	Метод Гауса- Ньютона на /3/	Модифікація методу 1+ /4/	Модифікація методу Гауса- Ньютона /5/
1 параметр $y_3 = 8$	3	19	11	7	7
	2	13	8	5	2
	1	7	5	2	5
	0.6	1	2	1	2
I параметр $y_8 = 3$	3		11	8	7
	2	15	8	6	5
	1	9	5	4	4
	0.5	5	2	2	4
I параметр $y_3 = -1$	3		11	8	7
	2	16	8	6	5
	1	11	5	4	4
	0	2	2	2	2
2	/2.1/	8	6	3	5
	/1.2/	8	6	3	4
	/1.1/	6	5	3	3
	/0.5, 0.5/	3	3	2	3
	/-1, -1/	4	6	4	4
	/0.0/		4	3	4
3	/-1.2, 1, -1.2, 1/	15	15	8	7
	/-1.2, -1.2/	13	14	7	11
	/-2.4, -2.4/	26	27	8	28
	/0.0, 0.0/	11	11	7	12
4	/3, -1.0, 1/	16	12	7	11
	/10, 10, 10, 10/	18	14	10	11
	/0, -4, -3, -2/	16	12	7	12
	/2, -2, -1, 0/	16	13	9	12

Приклад 1. Задана система трьох рівнянь з одним невідомим:

$$f_i(x) = e^{t_i} x - y_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$t_1 = 1, y_1 = 2, t_2 = 2, y_2 = 4, t_3 = 3.$$

Значення y_3 і x_0 наведені в таблиці.

Розв'язок задачі: при $y_3 = 8, x_* = 0.69315, F(x_*) = 0;$

при $y_3 = 3, x_* = 0.44005, F(x_*) = 1.6390;$

при $y_3 = -1, x_* = 0.04474, F(x_*) = 6.9765;$

Приклад 2. Задана система чотирьох рівнянь з двома невідомими:

$$f_i(x) = e^{x_i + t_i} x_2 - y_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$t_1 = -2, y_1 = 0.5, t_2 = -1, y_2 = 1, t_3 = 0, y_3 = 2, t_4 = 1, y_4 = 4.$$

Розв'язок задачі: $x_* = (\ln 2, \ln 2).$

Приклад 3. Розширена функція Розенброка:

$$f_{2i-1}(x) = 10(x_{2i} - x_{2i-1}^2),$$

$$f_{2i}(x) = 1 - x_{2i-1}, \quad i = 1, \dots, n/2, n = 4.$$

Розв'язок задачі: $x_* = /1, 1, 1, 1/.$

Приклад 4. Розширена узагальнена функція Пауела:

$$f_{4i-3}(x) = x_{4i-3} + 10 x_{4i-2},$$

$$f_{4i-2}(x) = 5(x_{4i-1} - x_{4i}),$$

$$f_{4i-1}(x) = (x_{4i-2} + 2x_{4i-1})^2,$$

$$f_{4i}(x) = 10(x_{4i-3} - x_{4i})^2, \quad i = 1, \dots, n/4, n = 4.$$

Розв'язок задачі: $x_* = /0, 0, 0, 0/.$

Як показали обчислення, метод /4/ набагато ефективніший від методів /2/, /3/, /5/ у сенсі кількості ітерацій та кількості обчислень на задачах з нульовою та малою нев'язками. Проте, як і методи /3/ та /5/, запропонований метод /4/ може погано збігатися на задачах з великою нев'язкою.

І. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер.А. 1968. №5. С.387-391. 2. Б а р т і ш М.Я., Ш а х н о С.М. Деякі методи розв'язування нелінійної задачі про найменших квадратів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С. 3-7. 3. А з н и с Аж., мл., Ш н а б е л ь Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.95

М.М.Притула, О.М.Духовська

ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ
ІНВЕРСНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ
БУССІНЕСКА

Нехай на нескінченновимірному періодичному функціональному многовиді $M \simeq C_l^{(\infty)}(R; R^4)$, де $R_+ \ni l < \infty$ - період, задана нелінійна інверсна динамічна система Буссінеска:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= q \\ v_t &= p \\ q_t &= u_x + 3u^2 \\ p_t &= u_x \end{aligned} \right\} = K[u, v, q, p], \quad /1/$$

де $K : M \rightarrow T(M)$ - гладке за Фреше поліноміальне векторне поле на многовиді M . Система /1/ опержана в нелінійного рівняння Буссінеска:

$$u_{tt} = (u_{xxx} - 5uu_x)_x$$

вляхом відображення інверсії $R \ni x \rightleftharpoons t \in R$.

Згідно з алгоритмом [1, 2] дослідимо наявність нескінченної ієрархії законів збереження для динамічної системи /1/ на гладкому l -періодичному многовиді M . Для цього розглянемо асимптотичні розв'язки лінійного рівняння Лакса:

$$\varphi_t + K'^* \varphi = 0, \quad /2/$$

де $\varphi \in T^*(M)$, K'^* - похідна Фреше оператора $K : M \rightarrow T(M)$, " $\ast$ " - спряження щодо білінійної форми:

$$(a, b) = \int_{x_0}^{x_0+l} \langle a(x), b(x) \rangle dx,$$

$$\langle a(x), b(x) \rangle = \sum_{j=1}^4 a_j(x) b_j(x), \quad x_0 \in R^1, \quad a, b \in T(M).$$

Оскільки оператор $K'^*[u, v, q, p] : T^*(M) \rightarrow T^*(M)$ має згідно з /1/ вигляд

$$K'^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6u & -\partial \\ 0 & 0 & -\partial & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad /3/$$

то рівняння /1/ допускає вектор-розв'язок $\varphi \in T^*(M)$ у формі

$$\varphi(x,t;\lambda) = (1, b(x,t;\lambda), c(x,t;\lambda), d(x,t;\lambda))^T \exp[\lambda x + \omega(\lambda)t + \sigma^{-1} \sigma(x,t;\lambda)], \quad /4/$$

де $\lambda \in \mathbb{C}^1$ - комплексний параметр; τ - знак транспонування; $\omega(\lambda)$ - "дисперсійна" функція, що враховує явну залежність функції $\varphi \in T^*(M)$ від λ ; $\sigma^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2} \left[\int_{x_0}^x (\cdot) dx - \int_{x_0+t}^{x_0+t+1} (\cdot) dx \right]$ - оператор "оберненого" диференціювання, $\partial \cdot \sigma^{-1} = 1$; причому справедливі асимптотичні розвинення при $|\lambda| \rightarrow \infty$:

$$b(x,t;\lambda) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} b_j[u,v,q,p] \lambda^{-j},$$

$$c(x,t;\lambda) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} c_j[u,v,q,p] \lambda^{-j},$$

$$d(x,t;\lambda) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} d_j[u,v,q,p] \lambda^{-j},$$

$$\sigma(x,t;\lambda) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j[u,v,q,p] \lambda^{-j}. \quad /5/$$

Використовуючи співвідношення Лакса /2/ з урахуванням /4/, знаходимо початкові коефіцієнти b, c, d і величину $\omega(\lambda)$ за умови $u=v=p=q=0$, тобто $(b,c,d)|_{u=v=p=q=0} = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$:

$$\omega(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \exp[\lambda x + \omega(\lambda)t] + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\partial \\ 0 & 0 & -\partial & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \exp[\lambda x + \omega(\lambda)t] = 0. \quad /6/$$

Розв'язуючи /6/, отримуємо

$$\bar{b} = -\omega(\lambda)^2/\lambda, \quad \bar{c} = -1/\omega(\lambda), \quad \bar{d} = \omega(\lambda)/\lambda, \quad \omega(\lambda) = \sqrt{\lambda}.$$

Після редукції $\lambda \rightarrow \lambda^2$ шуканий розв'язок можна записати у вигляді

$$\varphi(x,t;\lambda) = (1, b(x,t;\lambda), c(x,t;\lambda), d(x,t;\lambda))^T \exp[\lambda t + \lambda^2 x + \sigma^{-1} \sigma(x,t;\lambda)]. \quad /7/$$

Підставляючи розв'язок /7/ у рівняння Лакса /2/, за умови /5/ отримуємо систему нескінченних рекурентних співвідношень:

$$\left\{ \begin{aligned} & \delta_{j,-1} + \theta^{-1} \sigma_{j,1} + 6uc_j - d_{j,x} - d_{j+2} - \sum_{k=0}^j d_{j-k} \sigma_k = 0 \\ & b_{j,1} - 6u \sum_{k=0}^j b_{j-k} c_k + \sum_{k=0}^j b_{j-k} d_{k,x} + \sum_{k=0}^{j+2} b_{j+2-k} d_k + \\ & + \sum_{k=0}^j \sum_{s=0}^k b_{j-k} d_{k-s} \sigma_s - c_{j,x} - c_{j+2} - \sum_{k=0}^j c_{j-k} \sigma_k = 0 \\ & c_{j,1} - 6u \sum_{k=0}^j c_{j-k} c_k + \sum_{k=0}^j c_{j-k} d_{k,x} + \sum_{k=0}^{j+2} c_{j+2-k} d_k + \\ & + \sum_{k=0}^j \sum_{s=0}^k c_{j-k} d_{k-s} \sigma_s + \delta_{j,0} = 0 \\ & d_{j,k} - 6u \sum_{k=0}^j d_{j-k} c_k + \sum_{k=0}^j d_{j-k} d_{k,x} + \sum_{k=0}^{j+2} d_{j+2-k} d_k + \\ & + \sum_{k=0}^j \sum_{s=0}^k d_{j-k} d_{k-s} \sigma_s + b_j = 0, \end{aligned} \right. \quad /8/$$

де $j \in \mathbb{Z}_+$. Розв'язуючи послідовність рівнянь у /8/, знаходимо:

$$\begin{aligned} b_0 &= -1, & c_0 &= 0, & d_0 &= 0, \\ & & \sigma_0 &= 0; \\ b_1 &= 0, & c_1 &= -1, & d_1 &= 1, \\ & & \sigma_1 &= 3/2; \\ b_2 &= 3, & c_2 &= 0, & d_2 &= 0, \\ & & \sigma_2 &= 9/4 u_x + 3/4 v_x; \\ b_3 &= 0, & c_3 &= 3/2 u, & d_3 &= -9/2, \\ & & \sigma_3 &= 0; \end{aligned} \quad /9/$$

$$\begin{aligned} b_4 &= -3/2 u_x - 3/2 v_x - 9u^2, & c_4 &= 3/4 q + 3/4 p, & d_4 &= 9/4 q - 3/4 p, \\ \sigma_4 &= -3/4 u_{xx} - 3/4 v_{xx} - 9/16 p^2 + 9/16 q^2 - 63/8 uv_x - 9/8 uv_x - 9/8 u^3; \\ b_5 &= 3/2 q_x + 3/2 p_x - 9/2 up, \\ c_5 &= -3/4 u_x - 3/4 v_x - 9/2 u^2, \\ d_5 &= 9/4 u_x - 3/4 v_x + 9u^2, \end{aligned}$$

$$\sigma_5 = 3/4 p_{xx} + 3/4 q_{xx} - 9/8 u q_x - 9/8 p v_x - 27/8 (up)_x$$

і т.д. З огляду на зображення /7/ отримуємо, що всі функціонали вигляду

$$\gamma_j = \int_{x_0}^{x_0+l} dx \sigma_j[u, v, q, p], \quad /10/$$

$j \in \mathbb{Z}_+$ є для динамічної системи /1/ законами збереження, причому, відповідно до побудови, функціонально незалежними. Обчислимо згідно з /9/, /10/ градієнти

$$\text{grad } \gamma_j = \left(\frac{\delta \gamma_j}{\delta u}, \frac{\delta \gamma_j}{\delta v}, \frac{\delta \gamma_j}{\delta q}, \frac{\delta \gamma_j}{\delta p} \right)^T = \sigma'^* [u, v, q, p] \cdot 1$$

для функціоналів $\gamma_j \in D(M)$, $j \in Z_+$:

$$\begin{aligned} \text{grad } \gamma_0 &= (0, 0, 0, 0)^T, \quad \text{grad } \gamma_1 = (0, 0, 0, 3/2)^T, \\ \text{grad } \gamma_2 &= (0, 0, 0, 0)^T, \quad \text{grad } \gamma_3 = (0, 0, 0, 0)^T, \\ \text{grad } \gamma_4 &= (-9/4 v_x - 27/8 u^2, 0, 9/8 q, -9/8 p)^T \end{aligned}$$

і т.д.

Таким чином, доведено, що для нелінійної інверсної системи Буссінеска /1/ існує нескінченна ієрархія законів збереження, які можна подати у вигляді функціонально незалежних функціоналів $\gamma_j \in D(M)$, $j \in Z_+$.

І. Митропольский В.А., Боголюбов Н.Н., Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы. К., 1987. 296 с. 2. Самойленко В.Г., Притула Н.Н., Суяров У.С. Анализ полной интегрируемости инверсного уравнения Кортевега-де Фриза. К., 1989. 27 с. /Препр. /АН УССР, Ин-т математики; 89.71/.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.95

УДК 517.9

М.М.Притула, А.К.Прикарпатський
СТРУКТУРА СКІНЧЕНОВИМІРНИХ ІНВАРІАНТНИХ
ПІДНОГОВИДІВ ПАРАМЕТРИЧНО ІНТЕГРОВНИХ
НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Нехай на топологічному функціональному джет-многовиді $M \simeq J_{10p}^{(\infty)}(R^n; R^m)$ задана нелінійна динамічна система

$$u_t = K[u],$$

де $K : M \rightarrow T/M$ - гладке за Фреше векторне поле на M , $t \in R_+$ - еволюційний параметр, $m, n \in Z_+$. Якщо векторне поле $K : M \rightarrow T/M$ ознорідне і допускає невироджену імпліцитну структуру $\theta : T^*M \rightarrow T/M$, що задовольняє умову Картана-Нетер [1,3], $L_K \theta = 0$ / L_K - похідна Лі вздовж векторного поля $K : M \rightarrow T/M$ /

© Притула М.М., Прикарпатський А.К., 1995

то динамічна система $u_t = K[u]$ буде гамільтоновою на фазовому просторі M . Нехай тепер $y \in D(M)$ — гладкий на Фреше функціонал на многовиді M . Якщо $\phi = \text{grad } y \in T^*(M)$ задовольняє рівняння типу Лакса $L_K \phi = 0$ або рівносильне йому

$$\phi_t + K'^* \phi = 0, \quad /2/$$

де K'^* — спряження похідної Фреше $K' : T/M \rightarrow T/M$ дозо стандартної білінійної форми на T^*/M х T/M , то функціонал $y \in D(M)$ — закон збереження для динамічної системи /1/.

З рівняння /2/ випливає [1,4] існування спеціального асимптотичного розв'язку:

$$\phi(x, t; \lambda) \approx (1, a(x, t; \lambda))^T \exp[\omega(x, t; \lambda) + \partial^{-1} \sigma(x, t; \lambda)], \quad /3/$$

де $\omega(x, t; \lambda) \in \mathbb{R}^{m-1}$, $\sigma(x, t; \lambda) \in \mathbb{R}$, $\omega(x, t; \lambda)$ — дисперсійна функція; τ — знак транспонування; $m \in \mathbb{Z}_+$; $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексний параметр і при $|\lambda| \rightarrow \infty$ виконується

$$a(x, t; \lambda) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j[x, t; u] \lambda^{-j+s(a)},$$

$$\sigma(x, t; \lambda) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j[x, t; u] \lambda^{-j+s(\sigma)},$$

де $S(a), S(\sigma) \in \mathbb{Z}_+$ — деякі невід'язні цілі числа; ∂^{-1} — оператор "оберненого" диференціювання; $d/dx \cdot \partial^{-1} = 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Щоб знайти явну формулу /3/ у випадку, коли асоційоване зображення типу Лакса [1,2,4] залежить параметрично від спектрального параметра $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$, що задовольняє неізоспектральну умову

$$d\tilde{\lambda}/dt = g(t; \tilde{\lambda}), \quad \tilde{\lambda}|_{t=0} = \lambda(\tau; \lambda) \in \mathbb{C}, \quad /4/$$

для деякої мероморфної функції $g(t; \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}_+$, потрібно проаналізувати асимптотичні розв'язки рівняння Лакса /2/. Для цього вивчимо докладніше випадок, коли розв'язок $\phi \in T^*(M)$ у /2/ зображений як функціонал trace-класу відповідної спектральної задачі типу Лакса в момент $\tau = t \in \mathbb{R}_+$ зі спектральним параметром $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$, що задовольняє умову /4/. Тобто еволюція динамічної системи /1/ відбувається в час $\tau \in \mathbb{R}$, що визначається умовою

$$du/d\tau = K[x, \tau; u], \quad /5/$$

$u|_{\tau=0} = \bar{u} \in M$ — деякі дані Коші в M . Це означає, що функціонал

$$\tilde{\phi}(x, \tau; \tilde{\lambda}) := \text{grad } Sp S(x, \tau; \tilde{\lambda}), \quad \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t; \lambda) \in \mathbb{C}, \quad /6/$$

де $S(x, \tau; \tilde{\lambda})$ - матриця монодромії деякої лінійної спектральної задачі для /1/, повинен задовольняти відповідне рівняння Лакса в точці $u \in M$ стосовно /5/, тобто

$$d\tilde{\phi}/d\tau + K'^*[u]\tilde{\phi} = 0 \quad /7/$$

для всіх $\tau \in R_+$. За неведених вище припущень очевидно, що спектральний параметр $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t; \lambda(\tau; \lambda))$, де

$$d\tilde{\lambda}/dt = g(t; \tilde{\lambda}), \quad \tilde{\lambda}|_{t=0} = \lambda(\tau; \lambda) \in C, \quad /8/$$

і дані Коші є відповідними даними для параметра $\lambda(\tau; \lambda) \in C$, тобто є спектральною величиною асоційованої спектральної задачі Лакса в момент $\tau \in R_+$.

Сформулюємо таку лему.

Лема. Рівняння Лакса /7/ з параметром $\tau \rightarrow t \in R_+$ допускає асимптотичний розв'язок

$$\tilde{\phi}(x, t; \tilde{\lambda}) \approx (1, \tilde{a}(x, t; \tilde{\lambda}))^T \exp[\tilde{\omega}(x, t; \tilde{\lambda}) + \tilde{\sigma}^{-1} \tilde{\sigma}(x, t; \tilde{\lambda})], \quad /9/$$

де $\tilde{a}(x, t; \tilde{\lambda}) \in R^{m-1}$, $\tilde{\sigma}(x, t; \tilde{\lambda}) \in R$ - деякі локальні функціонали на M ; $\tilde{\omega}(x, t; \tilde{\lambda}) \in R$ - деякі дискретні функції для всіх $x \in R$, $\tau \in R_+$, і якщо при $|\lambda| \rightarrow \infty$ впливає $|\tilde{\lambda}| \rightarrow \infty$ і $\tau \rightarrow t \in R_+$, то справедливі формули

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, t; \tilde{\lambda}) &\approx \sum_{j \in Z_+} \tilde{a}_j[x, t; u] \tilde{\lambda}^{-j+s(\tilde{a})}, \\ \tilde{\sigma}(x, t; \tilde{\lambda}) &\approx \sum_{j \in Z_+} \tilde{\sigma}_j[x, t; u] \tilde{\lambda}^{-j+s(\tilde{\sigma})}, \end{aligned} \quad /10/$$

де $s(\tilde{a}), s(\tilde{\sigma}) \in Z_+$ - деякі цілі числа.

Доведення. Згідно з теорією асимптотичного розв'язання для довільних диференціально-спектральних задач /1/ умова /8/ забезпечує існування зображення /6/, і спектральний параметр $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t; \lambda(\tau; \lambda))$ не залежить ефективно від часу $\tau \rightarrow t \in R_+$, коли він задовольняє /8/. Проте випадок, розглянутий вище, є результатом інтегровності за Лаксом динамічної системи /6/. Справді, внаслідок вище згаданої інтегровності /6/ спектральний параметр $\tilde{\lambda} \in C$ задовольняє /8/, і в момент $\tau \rightarrow t \in R_+$ дані Коші $\tilde{\lambda}|_{t=0} = \lambda \in C$ не залежить більше від параметра $\tau \in R_+$, що задовольняє умову $\tau \rightarrow t \in R_+, \frac{d\lambda}{d\tau} \rightarrow 0$. Останнє доводить лему.

Справедлива така теорема.

Теорема. Параметрично інтегровна за Лаксом ізоспектральна динамічна система /5/ при $\tau \rightarrow t \in R_+$ допускає нескінченну ієрархію, загальом є неоднорідним вільним $x \in R, t \in R_+$, законів збереження, які можна подати у точній формі з огляду на асимптотичні розв'язання /9/, /10/.

Доведення. Справді внаслідок розвинень /9/, /10/ можна твердити, що функціонал

$$\tilde{Y}(t; \lambda(\tau, \lambda)) = \int_R dx \tilde{\sigma}(x, \tau; \tilde{\lambda}(\tau; \lambda)) \quad /11/$$

не залежить від параметра $\tau \in R_+$ тобто

$$d\tilde{Y}/d\tau = 0 \quad /12/$$

для всіх $\tau, t \in R_+$. Приймаючи, що параметр $\tau \in R_+$ прямує до $t \in R_+$, згідно з /6/ одержуємо, що $\tilde{\phi}(x, \tau; \tilde{\lambda})|_{\tau \rightarrow t \in R_+} \rightarrow \phi(x, t; \lambda)$ для всіх $x \in R, t \in R_+, \lambda \in C$. Це означає, що локальний функціонал $\phi(x, t; \lambda) \in T^+(M)$ задовольняє рівняння /1/ в кожній точці $u \in M$. Як очевидний результат, справедливо

$$\tilde{\omega}(x, \tau; \tilde{\lambda})|_{\tau \rightarrow t \in R_+} \rightarrow \omega(x, t; \lambda)$$

$$\tilde{\sigma}(x, \tau; \tilde{\lambda})|_{\tau \rightarrow t \in R_+} \rightarrow \sigma(x, t; \lambda)$$

для всіх $\lambda \in C$. Відомо, що функціонал

$$Y(\lambda) := \tilde{Y}(t; \lambda(\tau; \lambda))|_{\tau \rightarrow t \in R_+} = \int_R dx \sigma(x, t; \lambda) \in D(M)$$

не залежить від еволюційного параметра $\tau \in R_+$, і згідно з рівнянням /7/ він є законом збереження для нелінійної динамічної системи /1/

$$dY(t; \lambda)/dt = 0 \quad /13/$$

для всіх $t \in R_+, \lambda \in C$. Отже, маємо можливість використовувати рівняння /13/ разом з /8/ для знаходження точної форми асимптотичного розвинення /10/. Для цього підставимо асимптотичне розширення /9/ у визначальне рівняння /7/, враховуючи асимптотичні розвинення /10/ при $\tau \rightarrow t \in R_+$. При цьому потрібно взяти до уваги те, що для всіх $\tau \rightarrow t \in R_+, d\tilde{\lambda}/d\tau \rightarrow 0$ і при $|\lambda| \rightarrow \infty$ випливає, що $|\tilde{\lambda}| \rightarrow \infty$. Розв'язуючи крок за кроком вислідне рекурентне співвідношення для коефіцієнтів в /10/, одержуємо функціонал $Y(\lambda) := \tilde{Y}(t; \lambda(\tau; \lambda))|_{\tau \rightarrow t \in R_+, \lambda \in C}$ у формі, придатній для використання рівняння /13/. На наступному кроці потрібно використати диференціальне рівняння /8/ для задоволення критерію рівняння /13/, яке задовольняється початково для всіх $t \in R_+$.

$$\frac{dY(\lambda)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{j \in Z_+} \int_R dx \tilde{\sigma}_j(x, t; u) \tilde{\lambda}^{-j+s(\tilde{\sigma})} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \int_R dx [(d\tilde{\sigma}[x, t; u]/dt) \tilde{\lambda}^{-j+s(\tilde{\sigma})} + \\
&+ \tilde{\sigma}_j[x, \tau; u] \tilde{\lambda}^{-j+s(\tilde{\sigma})-1} (s(\tilde{\sigma})-j) d\tilde{\lambda}/dt] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} [d\tilde{\sigma}/dt + \sum_{k \gg -\infty} (s(\tilde{\sigma})-k) \tilde{\sigma}_k g_{j-k-1}(t)] \tilde{\lambda}^{-j+s(\tilde{\sigma})} = 0, \quad /14/
\end{aligned}$$

де за означенням $g(t; \tilde{\lambda}) := \sum_{k \gg -\infty} g_k(t) \tilde{\lambda}^{-k}$ для всіх $t \in R_+$, $|\lambda| \rightarrow \infty$. Оскільки спектральний параметр $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t; \lambda)$ у момент $t=0$ збігається з довільною комплексною величиною $\lambda \in \mathbb{C}$, умова $|\lambda| \rightarrow \infty$ разом із /14/ у момент $t=0$ дає змогу визначити таке співвідношення:

$$d\tilde{\sigma}_j/dt + \tilde{\sigma}'_j K[t; u] + \sum_{k \gg -\infty} (s(\tilde{\sigma})-k) \tilde{\sigma}_k g_{j-k-1}(t) \equiv 0 \pmod{\left(\frac{d}{dx}\right)} \quad /15/$$

для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$, $x \in R$, $t \in R_+$, $u \in M$.

Розв'язуючи алгебричне співвідношення /15/ для наперед невідомих функцій $g_k(t)$, $k \gg -\infty$, $t \in R_+$, одержуємо породжувальний функціонал $\mathcal{Y}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ законів збереження для /1/ у точній формі. Цим завершуємо конструктивну частину доведення теореми, сформульованої вище.

Для практичного використання описаного вище алгоритму потрібно розв'язати диференціальне рівняння /8/ у момент $\tau \rightarrow t \in R$ в точній, можливо асимптотичній, формі для дисперсійної функції $\omega(x, t; \lambda)$ і локального узагальненого функціоналу $\sigma(x, t; \lambda)$, виходячи з умови /12/ для всіх $x \in R$, $t \in R_+$, $|\lambda| \rightarrow \infty$.

На основі даного повідомлення, використовуючи загальну схему градієнтно-голономного алгоритму, можна знайти в точній формі шукане зображення типу Лакса. У такий спосіб розв'язується досить складна пряма задача теорії інтегровності нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах.

Опираючись на отриманий породжувальний функціонал $\mathcal{Y}(\lambda) \in D(M)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ та заданої у вигляді нескінченної ієрархії законів збереження динамічної системи /1/ на многовиді M можна побудувати наближено загальний функціонал Лагранжа $L_N \in D(M)$ вигляду

$$L_N = -\mathcal{Y}_{N+1} + \sum_{j=0}^N c_j \mathcal{Y}_j, \quad /16/$$

де за означенням $\mathcal{Y}(\lambda) = \int_R dx \sigma(x, t; \lambda)$ і при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$y_j = \int_R dx \sigma_j[x, t; \lambda], j \in Z_+, c_j \in R,$$

$j = \overline{0, N}$ - деякі довільні константи; $N \in Z_+$ - довільне невід'ємне ціле число. Якщо диференціальний порядок функціоналу $y_{N+1} \in D(M)$ найвищий з порядків функціоналів $y_j \in D(M)$, $j = \overline{0, N}$ і додатково лагранжіан не вироджений, тобто $\det(\text{Hess } y_{N+1}) \neq 0$, можна скориставшись вище наведеною схемою, довести, що критичний підмноговид $M_N = \{u \in M : \text{grad } L_N = 0\}$ є скінченновимірним симплектичним многовидом, вкладеним у стандартний джет-многовид $J^{(\infty)}(R; R^m)$ з канонічною симплектичною структурою, що відповідає векторному полю d/dx , $x \in R$, яке є гамільтоновим потоком на підмноговиді M_N .

І. Митропольський Д.А., Боголюбів Н.Н., Прикарпатський А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы. К.: Наук. думка, 1987. 296 с. 2. Митропольський Д.О., Прикарпатський А.К., Філь Б.М. Деякі аспекти градієнтно-голомного алгоритму в теорії інтегрованості нелінійних динамічних систем та проблеми комп'ютерної алгебри // Укр. мат. журн. 1991. Т.43. № 1. С.78-91. 3. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 678 с. 4. Прикарпатський А.К., Микити І.В. Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. К.: Наук. думка, 1990. 288 с. 5. Прикарпатський А.К., Філь Б.М. Категорія топологічних джет-многовидів та деякі застосування в теорії нелінійних нескінченновимірних динамічних систем // Укр. мат. журн. 1992. Т.44. № 9. С. 1242-1256.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.95

Г.А.Шинкаренко

ДО ОДНОКРОКОВИХ СХЕМ ІНТЕГРУВАННЯ
ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ
І. ПОБУДОВА СХЕМ ТА АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ

За допомогою інтерполяційних поліномів Ерміта можна оперувати вузловими значеннями похідних інтерпольованої функції, що, зокрема, дає змогу задовольняти деякі обмеження диференціального характеру у вузлах розрахункової сітки. Скажімо, якщо йдеться про використання кусково-визначених поліномів Ерміта для апроксимації розв'язків початково-крайових задач, то такими обмеженнями можуть бути змішані крайові умови взаємодії із зовнішнім середовищем, умова нестисливості тощо. У праці автора [2] кусково-квадратичні апроксимації Ерміта вжиті для задоволення початкової умови на швидкість зміни шуканого розв'язку задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Побудована на цій основі однокрокова рекурентна схема дає змогу виконувати ефективне інтегрування зі змінним кроком.

У даній праці згадана особливість кусково-квадратичних апроксимацій Ерміта використовується для побудови однокрокової схеми початково-крайової задачі з параболічними рівняннями з метою задоволення відповідного еволюційного варіаційного рівняння у стартовому вузлі кожного кроку інтегрування в часі.

1. Постановка задачі.

У даній праці пропонується однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі для такої варіаційної задачі:

$$\begin{cases} \text{задано } u_0 \in V, f \in L^2(0, T; H); \\ \text{знайти } u \in L^2(0, T; V) \text{ такий, що} \\ \frac{d}{dt} m(u(t), \omega) + a(u(t), \omega) = m(f(t), \omega) \quad t \in (0, T], \forall \omega \in V, \text{ /1.1/} \\ m(u(0) - u_0, \omega) = 0. \end{cases}$$

Тут H і V - гільбертові простори, причому простір V щільно вкладений у простір H . Далі припускатиємо, що симетричні і неперервні

$$\begin{cases} \text{білінійні форми } m(.,.): H \times H \rightarrow R \text{ та } a(.,.): V \times V \rightarrow R \\ H \text{ та } V \text{ - еліптичні відповідно.} \end{cases} \quad \text{/1.2/}$$

Подібні класи варіаційних задач /за мент жорсткої умови на початкове значення u_0 / вивчені у праці [3], звідки й запозичені наведені далі позначення.

Мета цієї праці - використати кусково-квадратичні поліноми Ерміта для побудови уточнених однокрокових схем для задачі /I.I/ і з'ясувати можливість їх ефективного застосування. Зазначимо також, що наведені нижче результати справедливі також для задач Коші зі звичайними диференціальними рівняннями першого порядку.

2. Кусково-квадратичні апроксимації. Проміжок інтегрування $[0, T]$ розіб'ємо на N рівних /хоча це не обов'язково/ частин $[t_j, t_{j+1}]$, $j=0, \dots, N-1$ і прийmemo $\Delta t := t_{j+1} - t_j$.

На кожному з таких проміжків розв'язок $u(t)$ задачі /I.I/ апроксимуватимемо квадратичним поліномом Ерміта:

$$\begin{cases} u(t) \approx u_{\Delta t}(t) := \{1 - \xi^2(t)\} u^j + \xi^2(t) u^{j+1} + \\ + \Delta t \xi(t) \{1 - \xi(t)\} v^j \text{ на } [t_j, t_{j+1}], \\ \xi(t) := \frac{1}{\Delta t} (t - t_j). \end{cases} \quad /2.1/$$

Відповідно до цього для апроксимації функції $f(t)$ скористаємось кусково-лінійним поліномом:

$$f_{\Delta t}(t) := \{1 - \xi(t)\} f^j + \xi(t) f^{j+1} \text{ на } [t_j, t_{j+1}], \quad /2.2/$$

де $f^m := f(t_m) \in H$.

Відзначимо, що приймаючи позначення

$$v^{j+1} := \frac{\partial}{\partial t} u_{\Delta t}(t_{j+1}), \quad /2.3/$$

приходимо до співвідношень

$$\begin{cases} u_{\Delta t}(t) = u^j + [\Delta t \xi(t)] v^j + \frac{1}{2} [\Delta t \xi(t)]^2 \dot{v}^{j+1/2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_{\Delta t}(t) = v^j + [\Delta t \xi(t)] \dot{v}^{j+1/2} \text{ на } [t_j, t_{j+1}], \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{\Delta t}(t) = \dot{v}^{j+1/2}. \end{cases} \quad /2.4/$$

Тут і далі використовуються такі позначення:

$$\begin{cases} \omega^{j+1/2} := \frac{1}{2} (\omega^{j+1} + \omega^j), \quad \dot{\omega}^{j+1/2} := \frac{1}{\Delta t} (\omega^{j+1} - \omega^j), \\ \omega^{j+\alpha} := (1-\alpha) \omega^j + \alpha \omega^{j+1}, \quad \alpha \in [0, 1]. \end{cases} \quad /2.5/$$

Зауваження 2.1. Апроксимації вигляду /2.1/ використані [2] для побудови однокрокових схем інтегрування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а також у різних задачах теорії пружності [4].

3. Проекційне рівняння. Оберемо функцію $\eta \in L^2((t_j, t_{j+1}))$ таку, що $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \eta dt = 1$. Підставимо апроксимації /2.1/, /2.2/ у рівняння задачі /1.1/ і вимагатимемо, щоб нев'язка такої підстановки була ортогональна до функції $\eta(t)$ у сенсі скалярного добутку із $L^2((t_j, t_{j+1}))$. У результаті прийдемо до такого проекційного рівняння:

$$\begin{aligned} m(v^j + \Delta t \gamma \dot{v}^{j+1/2}, \omega) + \Delta t a(\gamma v^j + \frac{1}{2} \Delta t \beta \dot{v}^{j+1/2}, \omega) = \\ = m(f^j + \gamma \Delta t \dot{f}^{j+1/2}, \omega) - a(u^j, \omega) \quad \forall \omega \in V, j=0, 1, \dots \end{aligned} \quad /3.1/$$

Тут

$$\gamma := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi \eta dt, \quad \beta := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi^2 \eta dt. \quad /3.2/$$

З огляду на позначення /2.5/ рівняння /3.1/ можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} m(v^{j+\gamma}, \omega) + \Delta t a(\gamma v^{j+\gamma} + \frac{1}{2} \Delta t (\beta - 2\gamma^2) \dot{v}^{j+1/2}, \omega) = \\ = \gamma \Delta t m(\dot{f}^{j+1/2}, \omega) + m(v^j, \omega) \quad \forall \omega \in V, j=0, 1, \dots \end{aligned} \quad /3.3/$$

Зазначимо, що вибір

$$\beta := 2\gamma^2 \quad /3.4/$$

анулює у проекційному рівнянні доданки вищого порядку мализни.

Нарешті, зауважимо, що вибір $\gamma - \beta = 0$ приводить до рівняння

$$m(v^j, \omega) = m(f^j, \omega) - f(u^j, \omega) \quad \forall \omega \in V, \quad /3.5/$$

яке описує стан досліджуваної системи у стартовий момент часу $t = t_j$. Тому обчислення слід провадити із значенням параметрів

$$\gamma > 0, \quad \beta > 0. \quad /3.6/$$

4. Однокрокова рекурентна схема. Здійснений аналіз дає змогу, зокрема, запропонувати наступну схему інтегрування задачі /1.1/:

$$\begin{cases} \text{задана пара } \psi^0 = (u^0, v^0) \in V^2 \text{ і параметри } \Delta t, \gamma > 0; \\ \text{знайти пару } \psi^{j+1} = (u^{j+1}, v^{j+1}) \text{ таку, що} \\ m(v^{j+\gamma}, \omega) + \gamma \Delta t a(v^{j+\gamma}, \omega) = m(v^j + \gamma \Delta t \dot{f}^{j+1/2}, \omega) \quad \forall \omega \in V, \\ u^{j+1} := u^j + \Delta t v^j + \frac{1}{2} \gamma^{-1} \Delta t (v^{j+\gamma} - v^j) \quad j=0, 1, \dots, \\ m(v^{j+1}, \omega) = m(f^{j+1}, \omega) - a(u^{j+1}, \omega). \end{cases} \quad /4.1/$$

З огляду на лему Лакса-Мільграма варіаційні рівняння схеми /4.1/ однозначно розв'язуються стосовно $v^{j+\gamma}$ та v^{j+1} відповідно. Більше цього, якщо їх розв'язок відшуковується методом скінченних елементів з діагональною матрицею мас, то за допомогою поданих вище рівнянь можна здійснити досить ефективну чисельну реалізацію схеми /4.1/ [3, с. 52-56].

5. Стійкість рекурентної схеми. Введемо норми

$$\|u\| := m^{1/2}(u, u), \quad \|u\| := a^{1/2}(u, u) \quad \forall u \in V.$$

Приймаючи в проекційному рівнянні /3.1/ $w = \dot{u}^{j+1/2} = v^{j+1/2}$, оверкуємо енергетичне рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \{ \|u^{j+1}\|^2 - \|u^j\|^2 \} + \|v^{j+1/2}\|^2 + \frac{1}{2}(\gamma - \frac{1}{2}) \{ \|v^{j+1}\|^2 - \|v^j\|^2 \} + \\ & + \Delta t \{ (\gamma - \frac{1}{2}) \|v^{j+1/2}\|^2 + (\beta - \gamma) [\|v^{j+1}\|^2 - \|v^j\|^2] \} = \\ & = m(f^{j+\gamma}, v^{j+1/2}) \quad j=0, 1, \dots \end{aligned} \quad /5.1/$$

З огляду на відомі оцінки для правої частини /5.1/ і початкової умови задачі /1.1/ приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} & \|u^{m+1}\|^2 + \Delta t \{ (\gamma - \frac{1}{2}) \|v^{m+1}\|^2 + 2\Delta t(\beta - \gamma) \|v^{m+1}\|^2 \} + \\ & + \Delta t \sum_{j=1}^m \{ \|v^{j+1/2}\|^2 + 2\Delta t(\gamma - \frac{1}{2}) \|v^{j+1/2}\|^2 \} \\ & \leq \|u^0\|^2 + \Delta t \{ (\gamma - \frac{1}{2}) \|v^0\|^2 + 2\Delta t(\beta - \frac{1}{2}) \|v^0\|^2 \} + \Delta t \sum_{j=1}^m |f^{j+\gamma}|^2 \quad m=0, 1, \dots \end{aligned} \quad /5.2/$$

Аналіз апіорної оцінки /5.2/ показує, що однокрокова рекурентна схема

/i/ безумовно /щодо вибору кроку Δt / стійка, якщо її параметри β і γ дібрані так, що

$$\frac{1}{2} < \gamma < \beta; \quad /5.3/$$

/ii/ стійка при $\gamma < 1/2$, якщо її крок Δt обраний з умови

$$\frac{1}{4} \frac{1-2\gamma}{a_0(\beta-\gamma)} < \Delta t \leq \frac{1}{a_0(1-2\gamma)}, \quad /5.4/$$

де $a_0 = \text{const} > 0$ така, що $\|u\|^2 \geq a_0 \|u\|^2 \quad \forall u \in V$.

6. Альтернативна побудова однокрокової схеми. Запропонована тут схема інтегрування варіаційної задачі /1.1/ використовує лінійну зміну похідної за часом наближеного розв'язку на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$.

Якщо для невідомої $v(t) = \frac{\partial}{\partial t} u(t)$ використати апроксимацію

$$v_{\Delta t}(t) := \{1 - \xi(t)\} v^j + \xi(t) v^{j+1} \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}] \quad /6.1/$$

І, скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, прийняти

$$u_{\Delta t}(t) := u^j + \int_{t_j}^t v_{\Delta t}(\tau) d\tau = \quad /6.2/$$

$$= u^j + \{\Delta t \xi(t)\} v^j + \frac{1}{2} \{\Delta t \xi(t)\}^2 \dot{v}^{j+1/2} \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}],$$

то, як неважко переконатись, знову можна одержати проекційне рівняння /3.1/.

7. Зауваження і висновки. З різними можливостями проекційно-сіткових схем можна ознайомитись у працях [1,3,5]. У цій праці побудована однокрокова схема інтегрування в часі еволюційних варіаційних задач, які виникають у теорії параболічних рівнянь. Запропонована схема ґрунтується на кусково-квадратичних апроксимаціях Ерміта, що дає змогу враховувати стан системи у стартовий момент часу на кожному кроці інтегрування в часі. У цьому зв'язку перше із рівнянь схеми /4.1/ можна розглядати як прогнозування швидкості зміни розв'язку на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$, а останнє – як корекцію цієї зміни з урахуванням знайденого розв'язку в момент часу t_{j+1} .

Здійснений також енергетичний аналіз схеми, який дав змогу визначити достатні умови її стійкості.

І. З е н к е в и ч О., М о р г а н К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с. 2. Ш и н к а р е н к о Г.А. Про одну модифікацію схеми Ньюмарка // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. С. 46-52. 3. Ш и н к а р е н к о Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НК ВУ, 1991. 68 с. 4. Ш и н к а р е н к о Г.А. Чисельне моделювання динаміки взаємодії фізико-механічних полів: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. К., 1993. 34 с. 5. Hughes T.J.R. The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis // Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall. 1967. 803 p.

Стаття надійшла до редколегії 03.03.95

А.Ф.Барвінський, І.М.Дудзяний, Х.Т.Дрогомирецька

ВЛАСНІ СУТТЄВО НЕЛІНІЙНІ
ПРЯДОВАНІ КОЛИВАННЯ СТЕРЖНЯ

Зіставлення лінійної залежності між напруженнями та деформаціями з реальною поведінкою матеріалу механічних систем під час коливань показує, що ця залежність властива для малих деформацій. Розглядаючи великі деформації /для деяких матеріалів таке співвідношення справедливе також за малих деформацій/ спостерігається значне відхилення від лінійної залежності. У зв'язку з цим для точнішого опису кривої залежності між напруженнями та деформаціями можна застосовувати степеневий закон типу

$$\sigma = E_n (\varepsilon_n)^{n+1}, \quad /1/$$

де σ - напруження; ε_n - деформація; E_n, n - сталі, що визначаються експериментально.

Розглянемо, наприклад, задачу про коливання стержня довжини l сталого поперечного перерізу F_0 . Сумістимо вісь Ox з поздовжньою віссю стержня та позначимо через $u(x, t)$ зміщення поперечного перерізу в напрямі осі Ox у точці з абсцисою x у момент часу t . Вважатимемо, що стержень виготовлений з ідеально пружного матеріалу, який підлягає суттєво нелінійному закону пружності /1/ та врахуємо зовнішнє згасання, пропорційне першій степені швидкості.

Диференціальне рівняння, що описує цей колильний процес, запишемо

$$(n+1)E_n \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad /2/$$

де ρ - маса одиниці довжини стержня; α_0 - коефіцієнт, який характеризує зовнішнє згасання.

Вважаючи, що кінці стержня вільні, розглядаємо крайові умови:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=l} = 0.$$

Побудуємо в першому наближенні асимптотичний розв'язок сформульованої крайової задачі.

Виходячи з асимптотичних методів нелінійної механіки /1/, перше наближення одночастотного розв'язку рівняння /2/ подаємо у вигляді

© Барвінський А.Ф., Дудзяний І.М., Дрогомирецька Х.Т., 1995

$$u_k(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon u_{1k}(x, a, \varphi_k) + \varepsilon^2 \dots$$

де $u_0(x, t)$ - розв'язок незбуреного ($2\alpha_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0$) рівняння /2/, який виражається формулою

$$u_0(x, t) = a X(x) T(\varphi),$$

в якій

$$X(x) = ca \left[1, \frac{1}{n+1}, \Pi_k \frac{x}{l} \right], \quad T(\varphi) = ca \left[n+1, 1, \varphi \right],$$

$$\Pi = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(\frac{n+1}{n+2})}{\Gamma(1/2 + \frac{n+1}{n+2})},$$

де ca - позначення $Ate\delta$ - функції [3]; амплітуда a і повна фаза φ визначаються диференціальними рівняннями

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \nu(a),$$

де

$$\nu(a) = \left[\alpha_0 a^n \left(\Pi \frac{k}{l} \right)^{n+2} \right]^{1/2} \quad (k = 1, 2 \dots).$$

Отже, в незбуреній системі можливі незгасаючі одночастотні коливання в k -формах динамічної рівноваги. Розглядаючи збурену крайову задачу, дослідимо коливання, близькі до коливань у k -й формі динамічної рівноваги незбуреної системи.

Перше наближення асимптотичного розв'язку, згідно з [2], запишемо

$$u_1(x, t) = a ca \left[1, \frac{1}{n+1}, \Pi_k \frac{x}{l} \right] ca \left[n+1, 1, \varphi \right], \quad /3/$$

в якому амплітуда a та фаза φ пов'язані залежностями

$$\frac{da}{dt} = -\frac{4\delta}{n+4} a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \nu(a). \quad /4/$$

Інтегруючи перше з рівнянь /4/ при початкових значеннях $t = 0$, $a = a_0$, отримуємо

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t}, \quad /5/$$

$$\text{де } \delta = \frac{4\delta}{n+4}.$$

Розв'язуючи друге диференціальне рівняння системи /4/, знаходимо

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{2}{\pi\delta} \left[\alpha_0 a_0^n \left(\pi \frac{k}{I} \right)^{n+2} \right]^{1/2} (1 - e^{-\frac{\delta \pi t}{2}}), \quad /6/$$

де φ_0 - початкове значення фази.

Таким чином, отримано явні вирази для представлення коливного процесу у першому наближенні.

Вважаючи у /3/ $\pi = 0$, отримуємо перше наближення асимптотичного розв'язку класичної задачі про поздовжні коливання стержня, матеріал якого підлягає лінійному закону пружності:

$$u_1(x, t) = a \cos \pi k \frac{x}{I} \cos \varphi, \quad /7/$$

$$a = a_0 e^{-\delta t}, \quad \varphi = \varphi_0 + \alpha_0 \pi \frac{k}{I} t. \quad /8/$$

Порівняння лінійного /7/-/8/ та нелінійного /4/-/6/ розв'язків показує, що між ними є як кількісні, так і якісні відмінності. Зокрема, слід зауважити, що частота нелінійних поздовжних коливань залежить від початкової амплітуди.

І. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний: 2-е изд. М., 1958. 2. Митропольский Ю.О., Мосеев Б.І. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами /Асимптотичні методи/. К., 1961. 3. Сеник П.М., Возний А.М. Про табулювання періодичних Абет-функцій // ДАН УРСР. 1969. № 12. С. 1089-1092.

Стаття надійшла до редколегії 24.02.95

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО
ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Нелокальні задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних різних типів останнім часом інтенсивно вивчаються. Вони часто виникають у прикладних задачах. З іншого боку, безсумнівною є теоретична важливість таких задач.

Природним є вивчення таких задач також для сингулярно збурених рівнянь. При побудові асимптотики розв'язку таких задач плідною є ідея побудови асимптотики розв'язку складної /нелокальної/ сингулярно збуреної на основі асимптотики розв'язку простішої сингулярно збуреної задачі. Для звичайних диференціальних рівнянь ця ідея вперше реалізована у праці [1], для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних - у праці [6] /див. також [3], [8], [9]/.

У даній роботі в області $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ отримані асимптотичні розвинення розв'язку задачі

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, t)u = f(x, t); \quad /1/$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0; \quad /2/$$

$$u(x, 0) + \beta \cdot u(x, T) = 0, \quad /3/$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x, t), f(x, t)$ - достатньо гладкі у D функції;

2/ $a(x, t) > 0$ у D , $|\beta| \leq 1$.

Перш ніж будувати асимптотику розв'язку задачі /1/-/3/ побудуємо асимптотику розв'язку допоміжної локальної задачі, тобто задачі розв'язку рівняння /1/ з крайовими умовами /2/ і з початковою умовою

$$u(x, 0, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i z_i(x) \quad /4/$$

замість нелокальної умови /3/, де N - деяке натуральне число;

$Z_i(x)$ ($i = \overline{0, N}$) - на даному етапі розв'язання задачі достатньо гладкі функції, такі що $Z_i(0) = Z_i(l) = 0$ ($i = \overline{0, N}$).

Розв'язання розв'язку допоміжної задачі /1/, /2/, /4/ будуватимемо методом примежового шару [1, 2]. Зауважимо, що у випадку $\beta = 0$ асимптотичне розв'язання задачі отримане у праці [4].

Асимптотичне розв'язання шукаємо у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_i(x, \tau) + R_N(x, t, \varepsilon), \quad /5/$$

де $\tau = t/\varepsilon$.

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у співвідношення /5/. Їх визначаємо стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $\bar{u}_i(x, t)$ ($i = 0, \dots, N$) є розв'язками крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь / t входить як параметр/:

$$-\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x^2} + a(x, t) \bar{u}_i = f_i(x, t); \quad /6/$$

$$\bar{u}_i(0, t) = 0, \bar{u}_i(l, t) = 0, \quad /7/$$

$$\text{де } f_0(x, t) = 0, f_i(x, t) = -\left(\frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial t} - \frac{\partial^3 \bar{u}_{i-1}}{\partial x^2 \partial t}\right) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Як бачимо, вони визначаються рекурсивно. Існування та єдиність розв'язку задач /6/, /7/ за наших припущень впливає з праці [5].

Функції примежового шару $\Pi_i(x, \tau)$ ($i = 0, \dots, N$) в околі $t = 0$ є розв'язками змішаних задач

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^3 \Pi_i}{\partial x^2 \partial \tau} - \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2} + a(x, 0) \Pi_i = g_i(x, \tau) \quad (i = 0, \dots, N); \quad /8/$$

$$\Pi_i(0, \tau) = 0, \Pi_i(l, \tau) = 0 \quad (i = 0, \dots, N); \quad /9/$$

$$\Pi_i(x, 0) = Z_i(x) - \bar{u}_i(x, 0) \quad (i = 0, \dots, N), \quad /10/$$

де $g_0(x, \tau) = 0$, $g_i(x, \tau)$ ($i = 1, \dots, N$) легко виписуються явним чином і лінійно залежать від $\Pi_j(x, \tau)$ ($j < i$).

Після того як знайдені функції $\bar{u}_i(x, t)$ ($i = 0, \dots, N$), функції $\Pi_i(x, \tau)$ ($i = 0, \dots, N$) знаходимо рекурентно як розв'язки змішаних задач /8/-/10/. У [7] показано, що функції $\Pi_i(x, \tau)$ ($i = 0, \dots, N$) експоненціально спадають при $\tau \rightarrow \infty$, тобто є дійсно функціями примежового шару в околі $t = 0$.

Таким чином, формальне асимптотичне розв'язку допоміжної задачі /1/, /2/, /4/ побудоване. Далі вважаємо $Z_i(x)$ ($i=0, \dots, N$) невідомими, і головна ідея побудови асимптотики розв'язку вихідної задачі /1/-/3/ полягає в тому, що необхідно підібрати функції $Z_i(x)$ ($i=0, \dots, N$) так, щоб формальне асимптотичне розв'язку допоміжної задачі /1/, /2/, /4/ було одночасно і формальним асимптотичним розв'язком розв'язку вихідної задачі /1/-/3/.

Підстановка асимптотичного розв'язку /5/ розв'язку задачі /1/, /2/, /4/ у нелокальну умову /3/ дає співвідношення для визначення $Z_i(x)$ ($i=0, \dots, N$), а саме

$$Z_i(x) = -\beta \bar{u}_i(x, T) \quad (i=0, \dots, N). \quad /II/$$

Підставляючи отримані вирази /II/ у /10/, маємо початкові умови для визначення функцій $P_i(x, \tau)$ ($i=0, \dots, N$) - функцій примежового шару асимптотичного розв'язку вихідної задачі /1/-/3/. Розв'язуючи задачі /8/-/10/ з уже визначеними початковими умовами, отримуємо функції примежового шару $P_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$). Разом з уже визначеними функціями $\bar{u}_i(x, t)$ ($i=0, \dots, N$) це дає всі функції, що входять в асимптотичне розв'язку /5/ задачі /1/-/3/.

Застосування методу інтегралів енергії [4] до задачі знаходження залишкового члена дає оцінку

$$\|R_N(x, t, \epsilon)\|_{L_2(D)} \leq C \epsilon^{N+1}, \quad /12/$$

де константа C не залежить від ϵ .

Таким чином, отримана теорема.

Теорема. Нехай у D виконуються умови 1/, 2/. Тоді розв'язок задачі /1/-/3/ допускає асимптотичне зображення /5/, де $\bar{u}_i(x, t)$ / $i=0, \dots, N$ / - розв'язки задач /6/, /7/; функції примежового шару $P_i(x, \tau)$ ($i=0, \dots, N$) - розв'язки задач /8/, /9/, /10/, де $Z_i(x)$ / $i=0, \dots, N$ /, що входить у /10/ визначається з /11/; залишковий член допускає оцінку /12/.

1. Васильєва А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. 2. Вишник М.И., ДюстERNИК Д.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т.12. № 5. С. 3-122. 3. Дудзяний Я.І.М., Цимбал В.М. Нелокальна задача для деякого сингулярно збуреного рівняння третього порядку. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1994. Вип. 41. С.10-15. 4. Аурaнт Р. Уравнение с частными производными. М., 1964.

5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 6. Цимбал В.Н. Некоторые неклассические сингулярно возмущенные задачи // Методы малого параметра и их применение: Тез. лекций и кратких научн. сообщ. Всесоюз. школы-семинара. Минск, 1982. С. 118. 7. Цимбал В.М. Змішана задача для сингулярно збуреного псевдопараболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 40. С.3-5. 8. Цимбал В. Нелокальна задача для деяких сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних // Нові підходи до розв'язання диференц. рівнянь: Тези доп. Всеукр. наук. конф. м. Дрогобич, Дрогобич, 1994. С. 180. 9. Цимбал В.Н. Нелокальная задача для сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений // Нелинейные задачи математической физики и задачи со свободной границей: Тез. 8-й республ. конф., м. Донецк. Донецк, 1991. С. 121.

Стаття надійшла до редколегії 24.02.95

УДК 681.3.06

М.О.Дзіковська, О.В.Костів

ЗАСТОСУВАННЯ ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНОГО ПІДХОДУ ДО ОБРОБКИ ДЕРЕВОВИДНИХ СТРУКТУР ДАНИХ

Дерева належать до найуживаніших абстрактних структур даних, оскільки рекурсивність є природною характеристикою багатьох елементів реального світу. Тому алгоритми опрацювання деревовидних структур викликають зацікавлення як у теоретиків, так і у практиків.

З огляду на широке використання об'єктно-орієнтованого програмування /ООП/, цікавою є задача застосування об'єктно-орієнтованого підходу до роботи з абстрактними структурами даних. Засобами такого стилю програмування можна реалізувати концепцію абстрактних типів даних /АТД/ на базі абстрактних структур даних /АСД/.

Проектування програм за принципом "зверху вниз" передбачає використання різних рівнів деталізації опису алгоритмів. Кожному рівневі відповідає певний набір базових операцій, композиції яких використовуються для зображення алгоритмів на цьому рівні.

Найчастіше розрізняють три рівні опису алгоритмів, які ґрунтуються на різних формах зображення даних:

1/ рівень абстрактних структур даних; 2/ рівень даних алгоритмічної мови; 3/ рівень реалізації в конкретному комп'ютері.

Для роботи з кореневими впорядкованими навантаженими деревами /далі деревами/ у праці [1] запропонований набір операцій, який містить понад 40 операторів обробки дерев як абстрактних структур даних. Цей набір можна взяти за основу операцій, визначаючи АТД для роботи з деревами.

Прагматичний метод абстрагування [2] передбачає лише ви-
чення даних та операцій засобами мов програмування. Тому в пропону-
ваній праці описані результати застосування підходу ПП до дерев-
видних структур даних у разі їх відображення у структури даних
Паскаля та реалізації цього підходу засобами ООП.

Дерева можна відображати у послідовні і зв'язані структури
зберігання. У Паскалі послідовні структури зображаються векторами,
зв'язані - списками.

Досліджені два векторні та одне спискове зображення. За вектор-
ні зображення обрані двовуковий запис для дерев довільної струк-
тури і безвуковий польський префіксний запис для бінарних дерев;
за спискове зображення - двозв'язаний список для бінарних дерев.

Для кожного зображення дерева створено відповідний об'єкт:
bintree для двовукового, bintree для безвукового та dintree для
спискового зображення. Усі три об'єкти мають подібну структуру.
Для зображення даних використовується чотири поля, які характеризую-
ть поточний стан дерева: поле зображення дерева tree /типу сим-
вольний масив TreeArr для векторних зображень або типу вказівник
на вузол ptr для спискового зображення/, поле поточної позиції в
дереві pos /типу індексний масив TreeInd або вказівника/, поле
навантаження поточного вузла curnode /символьного типу/, поле
результату suc /логічного типу, що набуває значення true, якщо
остання операція над об'єктом була успішною і false у протилежно-
му випадку/. Крім цього, для векторних зображень введено ще поле
dist з цілочисельним значенням, яке задає відстань між останнім
вузлом піддерева, визначеного деяким вузлом, і правим братом цього
вузла. Ця відстань є постійною для конкретного векторного зображен-
ня. Урахування цього факту через введення додаткового поля дає
змогу уніфікувати деякі операції над деревами.

Для створення екземплярів об'єктного типу потрібні конструктори.
Для векторних зображень створений один конструктор Init(t),
де t - вхідний параметр типу TreeArr. Він заносить значення t
у поле зображення дерева tree та ініціалізує поле dist.

Для спискових зображень розроблені кілька конструкторів:
Create_br(t) / t - вхідний параметр типу bintree / та Create_bint()
/ t - вхідний параметр типу bintree / створюють спискове
зображення з відповідних векторних зображень; Create_search(tr)
/ tr - вхідний параметр типу treeArr створює дерево пошуку за
маскою, сортуєчи навантаження вузлів за їхніми кодами;

Create_dyn(td)(td - вихідний параметр типу ptr) отворює дерево за відповідним списковим зображенням - td.

Усі конструктори ініціюють нові роз та suc, встановлюючи поточний корінь дерева.

До базових операцій над деревами у модулі належить перехід до заданого вузла Gotonode(p) / p - вихідний параметр типу TreeInd для векторних і ptr для спискового зображення/. Ця операція змінює поточний вузол, і всі алгоритми повинні анімувати погляд роз тільки через неї.

Для векторних зображень базовою також є операція пошуку піддерева Searchtree(b,e) / b - вихідний параметр типу treeInd, e - вихідний параметр того ж типу/; b задає корінь піддерева. Результатом операції є вказівник на останній символ піддерева, який заноситься в e. Операція реалізується по-різному для дужкового і бездужкового зображень. Для спискового зображення вона не виокремлюється, бо піддерево у цьому випадку цілком визначається вказівником на його вершину.

Операція руху вниз Down(i) здійснює перехід до i-го сина поточного вузла. Вона також належить до базових, хоча у векторних зображеннях використовує процедуру пошуку піддерева.

Операція руху вгору Up здійснює перехід до батька поточного вузла. Цей метод реалізується по-різному для кожного типу зображення.

Усі інші операції реалізуються через чотири вищезгадані (Gotonode(p), Searchtree(b,e), Down(i), Up).

У моделі також реалізовані деякі основні операції над деревами. Зокрема, це операції руху по дереву, оформлені як процедури переходу до наступного Next та попереднього Pred за обходом вузлів, а також операції пересування до лівого Leftshift та правого Rightshift братів поточного вузла.

Операції перетворення типів - це функції, що характеризують поточний вузол і дерево в цілому. До них належать: функція логічного типу Leaf, яка перевіряє, чи є поточний вузол термінальним /значенням є true, якщо вузол термінальний, і false - у протилежному випадку/; функції цілочисельного типу для обчислення кількості синів поточного вузла Descnum, кількості термінальних Termdescnum і нетермінальних Intermdescnum серед них; функції цілочисельного типу підрахунку кількості лівих Leftbrnum та правих Rightbrnum братів поточного вузла; функція обчислення глибини поточного вузла Depth. Дерево в цілому характеризує функція Degrad логічного

типу для перевірки на виродженість, яка набуває значення true, якщо дерево вироджене, і false - у протилежному випадку, та функція обчислення висоти дерева Height. Реалізована також функція Find(c) /c - вхідний параметр символьного типу/, яка повертає вказівник на перший по обходу вузол з навантаженням c.

Для спискового зображення додатково реалізовані функції Son(s,p) (Leftson(s,p), Rightson(s,p)), які перевіряють, чи є s сином /лівим або правим сином/ вузла p, і повертають значення логічного типу. Параметри s та p повинні бути типу вказівника ptr.

Операції зміни структури дерева - це вставлення піддерева Insert(i,t) та його видалення Delt(i). За операцією Insert(i,t) /i - вхідний параметр цілочисельного типу, t - вхідний параметр типу treeArr для векторних і ptr - для спискових зображень/ вставляється піддерево, що задається параметром t, корінь якого стає i-м сином поточного вузла. За операцією Delt(i) /i - вхідний параметр цілого типу/ відбувається видалення i-го сина поточного вузла. Обидві ці операції майже ідентичні для дужкового і бездужкового зображень, а для врахування відмінностей введені процедури корекції вставлення-видалення, які є внутрішніми і не можуть бути використані з поза меж модуля. Роль цих процедур полягає у вставленні чи стиранні символів, що обмежують піддерево.

Використання засобів ООП дало змогу спростити деякі алгоритми. Завдяки тому що всі операції ведуться тільки з поточним вузлом, а процедура Getnode робить неможливим некоректне переміщення по дереву, вдалося уникнути більшості перевірок на коректність аргументів операцій, які можуть бути досить трудомісткими.

Усі операції були реалізовані через чотири базові. Цей набір операцій відрізняється від того, який пропонується як мінімальний оцінний базис у праці [1]. При розгляді дерев як абстрактних структур даних у базовий набір входять: перехід до заданого вузла, пошук піддерева, рух уверх; перехід до наступного вузла. Проте використання як базової операції руху до наступного вузла виявилось практично незручним, тому за базові були обрані перехід до заданого вузла, пошук піддерева, рух вверх та рух униз по дереву.

Важливим результатом є те, що для дужкового і бездужкового зображень більшість операцій виявилися спільними. Відрізняються лише операції пошуку, руху вверх та деякі частини операцій вставлення-видалення. Решта операцій за рахунок властивостей наслідування й поліморфізму є спільними для обох зображень.

1. К о с т и в О.В. Разработка и исследование оценочных базисов прикладного сложностного анализа вычислений над деревьями: Автореф. дис., канд. физ. мат. наук. Львов, 1985. 197 с.
2. Н а г а о М., К а т а я м а Т., У э м у р а С. Структуры и базы данных. М., Мир, 1986. 198 с.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.95

УДК 519.6

Б.О.Попов, М.Ф.Лемех

УЗАГАЛЬНЕНА ОБ'ЄМІННА ТЕОРЕМА
ДЛЯ НАЙКРАЩОГО ЧЕБИШОВОГО НАБЛИЖЕННЯ

Розглянемо задачу найкращого чебишового наближення функції $f(x)$ з вагов $w(x)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$ функцією від многочлена:

$$\Phi_m(x, A) = \varphi\left(\sum_{j=0}^m a_j x^j\right), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad A = \{a_j\}_{j=0}^m,$$

У працях [1,2] доведені теорема існування та характеристична теорема. Далі зважатимемо, що функції $f(x)$, $w(x)$ і $\Phi_m(x, A)$ задовольняють умови цих теорем.

Для розв'язання даної задачі застосовуємо метод чебишових ітерацій [1,2] з використанням одного з алгоритмів заміни точок альтернансу [1].

При застосуванні методу чебишових ітерацій до задачі найкращого чебишового наближення функцією від многочлена, виникає необхідність розв'язувати нелінійну систему рівнянь.

У статті запропонована наближена схема розв'язання задачі найкращого чебишового наближення функцією від многочлена – побудована задача найкращого чебишового наближення многочленом, розв'язок якої є асимптотичним до розв'язку задачі найкращого чебишового наближення функцією від многочлена. Показаний зв'язок цієї задачі найкращого чебишового наближення многочленом з обмінними теоремами для найкращого чебишового наближення. Наведені результати розв'язання тестових задач та їх аналіз.

Запишемо систему рівнянь, яка виникає при черговій ітерації для розв'язання задачі найкращого чебишового наближення функцією від многочлена:

© Попов Б.О., Лемех М.Ф., 1995

$$f(t_i) - \varphi\left(\sum_{j=0}^m a_j t_i^j\right) = (-1)^i \mu \omega(t_i), \quad i = \overline{0, m+1}, \quad /1/$$

де $\{t_i\}_{i=0}^{m+1}$ - наближення до точок альтернансу; $\{a_j\}_{j=0}^m$ - наближення до параметрів наближення; μ - наближення до похибки наближення.

Перепишемо систему /1/ у вигляді

$$\sum_{j=0}^m a_j t_i^j = \varphi^{-1}\left(f(t_i) - (-1)^i \mu \omega(t_i)\right), \quad i = \overline{0, m+1}, \quad /2/$$

де $\varphi^{-1}(u)$ - функція, обернена до $\varphi(x): u = \varphi(x), x = \varphi^{-1}(u)$.

Розвиваючи праву частину /2/ в ряд Тейлора в околі точки $\mu=0$, отримуємо

$$\sum_{j=0}^m a_j t_i^j = \varphi^{-1}\left(f(t_i) - (-1)^i \mu \omega(t_i)\right) [\varphi^{-1}(f(t_i))] + \mu^2 M_i, \quad i = \overline{0, m+1},$$

де $\mu^2 M_i$ - залишок ряду Тейлора, починаючи з μ^2 . Нехтуючи величинами $\mu^2 M_i$, отримуємо такі співвідношення:

$$\sum_{j=0}^m a_j t_i^j + (-1)^i \mu \omega(t_i) [\varphi^{-1}(f(t_i))] = \varphi^{-1}(f(t_i)), \quad i = \overline{0, m+1}. \quad /3/$$

Систему /3/ можна переписати у вигляді

$$\varphi^{-1}(f(t_i)) - \sum_{j=0}^m a_j t_i^j = (-1)^i \mu \omega(t_i) [\varphi^{-1}(f(t_i))], \quad i = \overline{0, m+1}. \quad /4/$$

Система /4/ - це система, яка виникає при розв'язанні методом чебишових ітерацій задачі найкращого чебишового наближення многочленом на проміжку $[\alpha, \beta]$ функції $\varphi^{-1}(f(x))$ з вагою $\omega_1(x) = \mu \omega(x) [\varphi^{-1}(f(x))]'$.

Зазначимо, що задача наближення $\varphi^{-1}[f(x)]$ з вагою $\omega_1(x)$ многочленом на проміжку $[\alpha, \beta]$ в умовах теореми існування розв'язку і характеристичної теореми задачі наближення функції $f(x)$ з вагою $\omega(x)$ функцією від многочлена на проміжку $[\alpha, \beta]$ є коректною.

Введемо позначення:

$$z(x, A) = [f(x) - \varphi\left(\sum_{j=0}^m a_j x^j\right)] / \omega(x); \quad /5/$$

$$\rho(x, A) = [\varphi^{-1}(f(x)) - \sum_{j=0}^m a_j x^j] / \omega_1(x), \quad /6/$$

де $z(x, A)$ - функція похибки задачі наближення $f(x)$ з вагою $\omega(x)$ виразом $\Phi_m(x, A)$; $\rho(x, A)$ - функція похибки задачі наближення $\varphi^{-1}(f(x))$ з вагою $\omega_1(x)$ многочленом.

Теорема 1 /узагальнена обмінна теорема/. Нехай на проміжку $[\alpha, \beta]$ існує єдине найкраще чебишове наближення функції $f(x)$ з вагою $W(x)$, $W(x) \neq 0, x \in [\alpha, \beta]$ виразом

$$\Phi_m(x, A) = \varphi\left(\sum_{j=0}^m a_j x^j\right).$$

Тоді на проміжку $[\alpha, \beta]$ існує єдине найкраще чебишове наближення функції $\varphi^{-1}[f(x)]$ з вагою $W_1(x) = W(x)[\varphi^{-1}(f(x))]'$ многочленом

$$B_m(x, B) = \sum_{j=0}^m b_j x^j.$$

Причому наближення функції $f(x)$ з вагою $W(x)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$ виразом $\Phi_m(x, B)$ є асимптотичне до наближення виразом $\Phi_m(x, A)$ у разі збільшення кількості параметрів наближення і, якщо $\mu = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |z(x, A)|$ - максимальна за модулем похибка наближення функції $f(x)$ з вагою $W(x)$ виразом $\Phi_m(x, A)$; $\eta = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\rho(x, B)|$ - максимальна за модулем похибка наближення функції $\varphi^{-1}[f(x)]$ з вагою $W_1(x)$ виразом $B_m(x, B)$, то виконується співвідношення: $|\mu - \eta| < N\eta^2$, де $N > 0$ - стала. /1/

Доведення. Введемо позначення:

$\tilde{\mu} = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |z(x, B)|$ - максимальне за модулем значення функції похибки задачі наближення функції $f(x)$ з вагою $W(x)$ виразом $\Phi_m(x, B)$;

$\tilde{\eta} = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\rho(x, A)|$ - максимальне за модулем значення функції похибки задачі наближення функції $\varphi^{-1}[f(x)]$ з вагою $W_1(x)$ виразом $B_m(x, A)$.

Для доведення того, що наближення $f(x)$ з вагою $W(x)$ виразом $\Phi_m(x, B)$ є асимптотичне до наближення виразом $\Phi_m(x, A)$, необхідно показати, що

$$|\tilde{\mu} - \mu| \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Для функції похибки /5/ маємо:

$$\sum_{j=0}^m a_j x^j = \varphi^{-1}(f(x) - z(x, A) W(x)). \quad /8/$$

Розвиваючи праву частину /8/ в ряд Тейлора в околі $z(x, A) = 0$, маємо

$$\sum_{j=0}^m a_j x^j = \varphi^{-1}(f(x)) - z(x, A) W(x) [\varphi^{-1}(f(x))]' + z^2(x, A) \gamma(x), \quad /9/$$

де $z^2(x, A) \gamma(x)$ - залишок ряду Тейлора починаючи з $z^2(x, A)$;

$\gamma(x)$ - обмежена функція на $[\alpha, \beta]$.

Далі з /9/ отримуємо

$$[\varphi^{-1}(f(x)) - \sum_{j=0}^m a_j x^j] / W_1(x) = z(x, A) + z^2(x, A) \gamma_1(x), \quad /10/$$

$$\gamma_1(x) = \gamma(x) / \omega_1(x).$$

Зважаючи на /6/, з /10/ отримуємо

$$\rho(x, A) - z(x, A) = z^2(x, A) \gamma_1(x). \quad /11/$$

Розглядаючи далі функцію похибки /6/, для задачі наближення $\varphi^{-1}[f(x)]$ з вагов $\omega_1(x)$ многочленом $B_m(x, B)$, маємо

$$\sum_{j=0}^m b_j x^j = \varphi^{-1}(f(x)) - \rho(x, B) \omega(x) [\varphi^{-1}(f(x))]' \quad /12/$$

Записуємо розвинування функції $\varphi^{-1}[f(x) - \rho(x, B) \omega(x)]$ в ряд Тейлора в околі $\rho(x, B) = 0$:

$$\varphi^{-1}(f(x) - \rho(x, B) \omega(x)) = \varphi^{-1}(f(x)) - \rho(x, B) \omega(x) [\varphi^{-1}(f(x))]' + \rho^2(x, B) \psi(x), \quad /13/$$

де $\rho^2(x, B) \psi(x)$ - залишок ряду Тейлора починаючи з $\rho^2(x, B)$, функція $\psi(x)$ обмежена на $[\alpha, \beta]$.

До правої частини /12/ додамо і віднімемо величину $\rho^2(x, B) \psi(x)$. Беручи до уваги /13/, отримуємо

$$\sum_{j=0}^m b_j x^j = \varphi^{-1}(f(x) - \rho(x, B) \omega(x)) - \rho^2(x, B) \psi(x),$$

$$f(x) - \rho(x, B) \omega(x) = \varphi\left(\sum_{j=0}^m b_j x^j + \rho^2(x, B) \psi(x)\right). \quad /14/$$

Праву частину /14/ розвиваємо в ряд Тейлора в околі $\rho(x, B) = 0$:

$$f(x) - \rho(x, B) \omega(x) = \varphi\left(\sum_{j=0}^m b_j x^j\right) + \rho^2(x, B) \tilde{\psi}(x), \quad /15/$$

де $\rho^2(x, B) \tilde{\psi}(x)$ - залишок ряду Тейлора починаючи з другого доданка; $\tilde{\psi}(x)$ - обмежена функція.

З /15/ отримуємо

$$\left[f(x) - \varphi\left(\sum_{j=0}^m b_j x^j\right) \right] / \omega(x) = \rho(x, B) + \rho^2(x, B) \psi_1(x), \quad /16/$$

$$\text{де } \psi_1(x) = \tilde{\psi}(x) / \omega(x).$$

Зважаючи на /5/, з /16/ отримуємо

$$z(x, B) - \rho(x, B) = \rho^2(x, B) \psi_1(x). \quad /17/$$

Використовуючи позначення $\mu, \eta, \tilde{\mu}, \tilde{\eta}$, із рівностей /11/ і /17/ випливають співвідношення:

$$|\tilde{\eta} - \mu| \leq \Gamma \mu^2, \quad \Gamma = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\gamma_1(x)|; \quad /18/$$

$$|\tilde{\mu} - \eta| \leq \Psi \eta^2, \quad \Psi = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\psi_1(x)|. \quad /19/$$

Оскільки μ і η - похибки найкращих чебишових наближень відповідних задач, то для них справедливо

$$\mu \leq \tilde{\mu}, \quad \eta \leq \tilde{\eta}. \quad /20/$$

Додаючи нерівності /18/ і /19/, отримуємо

$$|(\tilde{\mu} - \mu) + (\tilde{\eta} - \eta)| \leq \Gamma \mu^2 + \Psi \eta^2. \quad /21/$$

Оскільки $\mu \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то з /21/ при $m \rightarrow \infty$ отримуємо

$$|(\tilde{\mu} - \mu) + (\tilde{\eta} - \eta)| \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad /22/$$

Оскільки з /20/ випливає, що $(\tilde{\mu} - \mu)$ і $(\tilde{\eta} - \eta)$ мають однакові знаки, то з /22/ випливає

$$\tilde{\mu} \rightarrow \mu, \quad \tilde{\eta} \rightarrow \eta \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad /23/$$

Отже, наближення функції $f(x)$ виразом $\Phi_m(x, B)$ є асимптотичне до наближення виразом $\Phi_m(x, A)$.

Оцінка /7/ випливає з /19/ і /23/. Теорема доведена.

Таким чином, периметри задачі найкращого чебишового наближення $\varphi^{-1}(f(x))$ з вагою $\omega_1(x)$ многочленом на проміжку $[\alpha, \beta]$ є наближенням до параметрів найкращого чебишового наближення функції $f(x)$ з вагою $\omega(x)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$ функцією від многочлена.

Для найкращих чебишових наближень відомі три обмінні теореми [1]. Сформулюємо одну з них.

Теорема 2. Нехай для функції $y(x) = \ln|f(x)/g(x)|$, де $f(x)$ і $g(x)$ - знакопостійні величини, що не перетворюються в нуль на множині, яка налічує не менш ніж $/m+2/$ точки, існує єдине на цій множині найкраще абсолютне наближення:

$$\beta_0 + T(x; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \beta_0 + T(x). \quad /24/$$

Тоді для функції $f(x)$ на цій множині існує єдине найкраще відносне наближення, яке визначається виразом

$$A g(x) e^{T(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)} = A g(x) e^{T(x)}. \quad /25/$$

Якщо Δ_0 - абсолютна величина найбільшої похибки найкращого абсолютного наближення виразом /24/ функції $y(x)$, δ_0 - абсолютна величина найбільшої похибки відносного наближення виразом /25/

функції $f(x)$, то між параметрами наближення справедливий співвідношення:

$$\alpha_i = \beta_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$A = 2e^{\beta_0} \operatorname{sign}(f(x)/g(x)) / [e^{-\Delta_0} + e^{\Delta_0}];$$

$$\delta_0 = [e^{\Delta_0} - e^{-\Delta_0}] / [e^{-\Delta_0} + e^{\Delta_0}] = \operatorname{th} \Delta_0,$$

а точки альтернансу збігаються.

Розглянемо задачу, сформульовану в теоремі 2 з погляду узагальненої обмінної теореми. Маємо $W(x) = f(x)$, $g(x) = 1$, $W_1(x) = 1$, $f(x) > 0$. З узагальненої обмінної теореми випливає, що

$$|\Delta_0 - \delta_0| \leq N \Delta_0^2.$$

Це ж випливає з теореми 2, бо

$$\operatorname{th} \Delta_0 = \Delta_0 - \Delta_0^3/3 + o(\Delta_0^5).$$

Як бачимо, теорема 2 дає змогу точно знайти розв'язок задачі найкращого чебишового наближення функцією від певного виразу, а за допомогою узагальненої обмінної теореми можна знайти наближене значення розв'язку, яке є асимптотичним до точного. Проте узагальнена обмінна теорема стосується загального випадку наближення функцією від многочлена.

Приклад. Знайти найкраще відносне чебишове наближення функції $f(x) = 2 + \sin(x)$ на проміжку $[-\pi, \pi]$ за допомогою виразу

$$\Phi_m(x, A) = \exp\left(\sum_{j=0}^m a_j x^j\right).$$

Цю задачу замінюємо задачею найкращого чебишового наближення функції $\ln f(x)$ многочленом з вагою $W_1(x) = f(x) + \ln f(x)$ $]' = 1$.

Отримані результати наведені нижче:

m	μ	η	$\Delta \eta$
I	3.9530e-01	4.1807e-01	5.75e-02
3	9.2248e-02	9.2511e-02	2.85e-03
5	4.523686e-02	4.526752e-02	6.77e-04
7	1.456325e-02	1.456428e-02	7.07e-05
9	3.137174e-03	3.137185e-03	3.51e-06
11	1.369761e-03	1.369762e-03	7.30e-07

Тут μ - точне значення максимальної за модулем похибки даної задачі; η - максимальне за модулем значення похибки, яке стримане за допомогою узагальненої обмінної теореми; $\Delta\eta = |\mu - \eta|/\mu$ - відносна похибка величини η .

Одержані результати ілюструють можливість використання узагальненої обмінної теореми.

І. П о п о в Б.А., Т е с л е р Г.С. Приближение функций для технических приложений. К.: Наук. думка, 1980. 351 с. 2. П о в о в Б.А. Равномерное приближение сплайнами. К.: Наук. думка, 1989. 271 с.

Стаття надійшла до редакції 06.03.95

УДК 621.396.67.061

П.О.Савенко, Л.М.Паснак

СИНТЕЗ ЛІНІЙНОЇ АНТЕННОЇ ГРАТКИ ЗА ЗАДАНОЮ АМПЛІТУДНОЮ ДІАГРАМОЮ НАПРЯМЛЕНOSTІ З УРАХУВАННЯМ ВЗАЄМНОГО ВПЛИВУ ВИПРОМІНЮВАЧІВ

У роботі побудовані чисельні алгоритми розв'язування нелінійних обернених задач стосовно синтезу випромінювальних систем у строгій електродинамічній постановці. На прикладі лінійної антенної ґратки вібраторів реалізована варіаційна постановка задачі, яка в подальшому зводиться до знаходження розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна. Врахування взаємного впливу випромінювачів ґрунтується на методі наведених ЕРС і зводиться до розв'язування відповідної системи інтегральних рівнянь Фредгольма I-го роду з логарифмічною особливістю в ядрах.

Розглянемо систему лінійних вібраторів у безмежному однорідному ізоτροпному середовищі, яке характеризується хвильовим числом k . Кожен вібратор є тонкостінним циліндром радіуса $a \ll \lambda$ (λ - довжина хвилі). Центри вібраторів лежать на осі OX , а початок системи координат збігається з центром середнього вібратора. Осі вібратора паралельні осі OZ . У середньому перерізі кожного вібратора підключена по колу різниця потенціалів U_n ($n=1, \dots, N$). Відомо [4], що повні струми $I_n(z_n)$, які протікають по n -му вібратору з урахуванням взаємного впливу інших вібраторів, пов'язані з потенціалами, що збуджують їх, системою інтегральних рівнянь Фредгольма I-го роду:

© Савенко П.О., Паснак Л.М., 1995

$$\sum_{m=1}^N \int_{-l}^l I_m(t) K_{nm}(z_n, t) dt = 2\pi i \sqrt{\epsilon/\mu} U_n \sin k |z_n - z'_n| + \\ + C_n^{(1)} \sin k z_n + C_n^{(2)} \cos k z_n \quad (n=1, \dots, N), \quad /1/$$

де

$$K_{nm}(z_m, t) = 2/\pi \int_0^{\pi/2} \frac{e^{ik\sqrt{(z_m-t)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}}}{\sqrt{(z_m-t)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi;$$

$2l$ - довжина вібратора; z_m, t - відповідно точки спостереження та інтегрування на поверхні m -го вібратора;

$$K_{nm}(z_n, t) = \frac{e^{ikR_{nm}(z_n, t)}}{R_{nm}(z_n, t)},$$

$R_{nm}(z_n, t)$ - відстань від точки спостереження z_n на осі n -го вібратора до точки інтегрування t на осі m -го вібратора. Для знаходження констант $C_n^{(1)}$ і $C_n^{(2)}$ система рівнянь /1/ доповнюється додатковими умовами: кульовість струмів на краях вібраторів. Наявність логарифмічної особливості в ядрах $K_{nm}(z_m, t)$ дає змогу перейти від системи /1/ до стійкої системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Якщо на струми $I_n(t)$ накласти умову, що похідні I'_n обмежені: $|I'_n(t)| \leq M = \text{const}$, то цим самим відокремлюється компактний клас розв'язків, де задача коректна [4].

Для розв'язування системи інтегральних рівнянь /1/ застосовується метод Гальоркіна, при цьому струм в n -му вібраторі зображається у вигляді лінійної комбінації просторових гармонік ψ_v :

$$I_n(t) = \sum_{v=1}^M I_{nv} \psi_v(t), \quad /2/$$

які становлять частину деякої системи лінійно-незалежних функцій.

Підставляючи /2/ в /1/ і виконуючи інтегрування лівих і правих частин системи /1/, домножених відповідно на ψ_m , приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку в загальному вигляді можна зобразити як

$$ZI = U. \quad /3/$$

Матриця Z отримала в літературі назву матриці розсіювання, або матриці взаємних опорів [3,5].

Оскільки I належить до компактної множини, то оператор Z^{-1} буде неперервним на множині образів. Згідно з цим шукані струми виражаються через вектор збуджувальних потенціалів U таким чином

$$I = Z^{-1}U. \quad /4/$$

Відомо [3], що діаграма напрямленості /ДН/ випромінювальної системи характеризує залежність електромагнітного поля від кутових координат на сфері достатньо великого радіуса. Для лінійної ґратки із N вібраторів ДН описується формулою

$$f_{\nu}(\nu, \varphi) = A_I = \sin \nu \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M I_{nm} e^{ikx_n \sin \nu \cos \varphi} \int_{-l}^l \psi(z'_m) e^{ikz'_m \cos \nu} dz'_m.$$

Підставляючи /4/ в останню формулу, отримуємо безпосередню залежність ДН ґратки від вектора сторонніх потенціалів U , що подаються на елементи ґратки. В операторному записі ця залежність має вигляд

$$f = AZ^{-1}U.$$

/5/

Формула /5/ дає змогу отримати розв'язок прямої задачі електродинаміки в дальній зоні ґратки, тобто на її основі можна обчислити вектори E і H електромагнітного поля при $R \rightarrow \infty$. У подальшому ДН ґратки, яка обчислюється за /5/, використовуватимемо при постановці і розв'язуванні оберненої задачі.

Задачу синтезу антенної ґратки за заданою амплітудною діаграмою напрямленості сформулюємо як задачу знаходження такого вектора потенціалів збудження U , щоб створена ним ДН за своєю амплітудою якнайменше різнилась від заданої амплітудної ДН. Як критерій оптимізації використовуватимемо функціонал

$$\sigma = \|F - \|AZ^{-1}U\|^2 + \alpha \|A^{-1}U\|^2,$$

в якому перший доданок є середньоквадратичним відхиленням модулів заданої $|F|$ і синтезованої $|f|$ діаграм, а другий – накладає обмеження на норму струмів збудження. Константа α відіграє роль параметра регуляризації. Її можна інтерпретувати також як ваговий множник, що регулює співвідношення між першим і другим доданками функціонала.

Для знаходження оптимальних розв'язків поставленої задачі використовуємо необхідну умову мінімуму: нульовість його першої похідної Гато. У результаті отримуємо нелінійне операторне рівняння стосовно I :

$$I = -\frac{1}{\alpha} A^* A I + \frac{1}{\alpha} A^* (F \exp(i \arg A I)),$$

/6/

де A^* – спряжений до A оператор. Якщо впливати на обидві сторони рівності /6/ оператором A і брати до уваги /5/, то приходимо до нелінійного операторного рівняння щодо оптимальної ДН:

$$f = -\frac{1}{\alpha} AA^* f + \frac{1}{\alpha} AA^* (F \exp(i \arg f)). \quad /7/$$

На основі розв'язків цього рівняння оптимальні розподіли струмів на вібраторах обчислюються за формулою

$$I = \frac{1}{\alpha} A^* (F \exp(i \arg f) - f).$$

У свою чергу оптимальний розподіл збуджувальних потенціалів у гратці отримуємо простим перемноженням матриці розсіювання Z на I , тобто за формулою /3/.

Рівняння синтезу /6/, /7/ є відповідно нелінійним матричним та інтегральним рівняннями типу Гаммерштейна. Звичайно, вони мають не єдиний розв'язок /1/. Існування точок мінімуму функціонала і відповідно розв'язків рівнянь /6/, /7/ стверджує така теорема.

Теорема 1. Нехай F - дійсна додатна функція, визначена на заданій області Ω , а оператор AZ^{-1} діє з комплексного простору R_n у комплексний простір H_f і є компактним. Тоді функціонал σ - диференційований у кожній точці простору R_n і в деякій його точці набуває мінімального значення; відповідно рівняння /6/ в просторі H_f і рівняння /7/ в просторі H_f мають принаймні по одному розв'язку.

Для доведення теореми аналогічно [6] необхідно показати виконання таких умов [2]:

$\lim_{\|U\| \rightarrow \infty} \sigma(U) = \infty$, і що $\sigma_1(U) = \|F - |f|\|^2$ - слабо неперервний функціонал.

Безпосереднє знаходження розв'язків здійснюється шляхом чисельного розв'язування рівнянь /6/ або /7/. Наведемо алгоритм розв'язування рівняння /7/. Для цього до /7/ застосуємо неявну схему методу послідовних наближень [1], тобто схему напівообертання. У правій частині досліджуваного рівняння явно виілений лінійний член стосовно шуканої функції. Перенесення його в ліву частину рівняння з наступним обертанням лінійного оператора приводить до такого ітераційного процесу:

$$\alpha f_{m+1} = (E + \frac{1}{\alpha} AA^*)^{-1} AA^* (F \exp(i \arg f_m)), \quad /8/$$

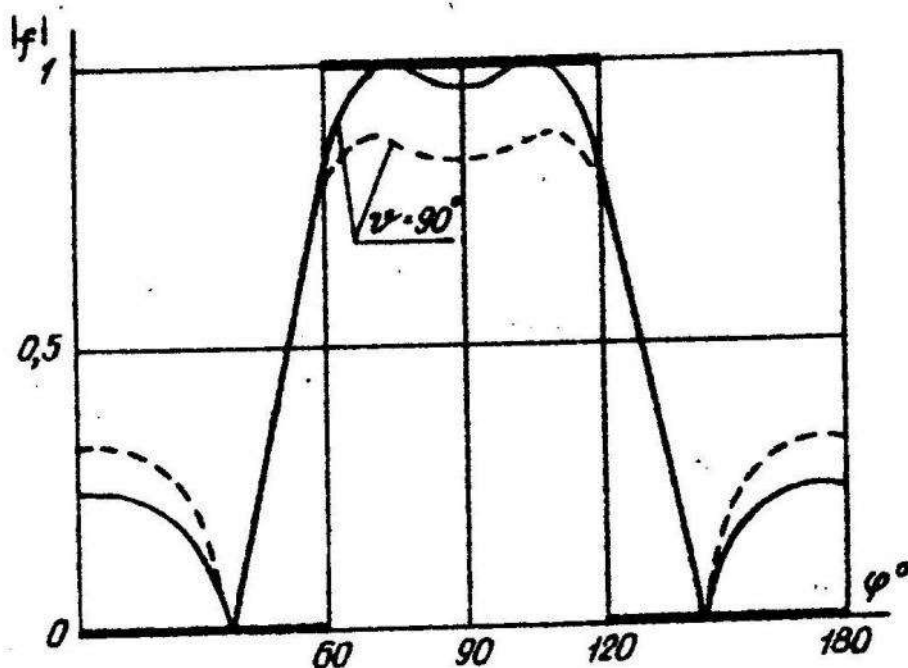
де $m = 0, 1, 2, \dots$ - номер ітерації. Як свідчать чисельні експерименти й аналітичні дослідження, швидкість та область збіжності цього процесу відповідно більша і ширша порівняно з явною ітераційною схемою

$$\alpha f_{m+1} = -AA^* f_m + AA^* (F \exp(i \arg f_m)).$$

Збіжність ітераційного процесу /8/ ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 2. Нехай нелінійний оператор $Bf = \frac{1}{\alpha} AA^* (F \exp(i \arg f))$ диференційований за Фреше на деякій опуклій області $S_{r_0} = \{f: \|f - f_0\| \leq r_0\}$, де $S_{r_0} \in H_f$, $0 < r_0 < \infty$. Тоді, якщо існує обернений оператор $(E + \frac{1}{\alpha} AA^*)^{-1}$ і $\sup_{f \in S_{r_0}} \|B'f\| < \frac{1}{\|(E + \frac{1}{\alpha} AA^*)^{-1}\|}$, то $\frac{1}{\alpha} (E + \frac{1}{\alpha} AA^*)^{-1} AA^* (F \exp(i \arg f))$ — стискальний на S_{r_0} оператор. Функцію f_0 можна розглядати, зокрема, як початкове наближення.

Наведемо приклад синтезу лінійної еквідистантної ґратки при $N=7$. Задана ДН $F(\nu, \varphi) = 1$, якщо $\nu \in [75^\circ, 105^\circ]$, $\varphi \in [60^\circ, 120^\circ]$ і тотожно дорівнює нулю за межами цієї області. Як базисні функції обрано $\psi_m(t) = \cos(\pi/2 m t)$. На рисунку зображена задана амплітуда ДН /тонка лінія/. Штриховою лінією зображено амплітуду ДН, яка створюється тим же розподілом напруг U_m , що й оптимальна ДН, але при цьому не враховується взаємний вплив вібраторів. Із наведених графіків бачимо, що точніша математична модель ґратки, тобто врахування взаємного впливу лише в першому наближенні, дає змогу краще апроксимувати синтезовану ДН до заданої.



Наприкінці зауважимо, що рівняння синтезу /6/, /7/ виведені без урахування конкретного типу випромінювачів та мають загальний характер. Тому наведений алгоритм розв'язування оберненої задачі може бути застосований до широкого класу випромінювальних систем.

І. Андрійчук М.И., Войтович Н.Н., Савенко П.А., Ткачук В.П. Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. К., 1993. 2. Зяб-реко П.П., Кошелев А.Н. и др. Интегральные уравнения. М., 1968. 3. Зябко Е.Г., Соколов В.Г. Методы синтеза антенн. М., 1980. 4. Мельнишкий А.С., Бережная И.В. Исследование распределения тока в системе произвольно расположенных вибраторов // Вып. 20. С. 263-269. 5. Марков Г.Т., Чаплин А.Е. Возбуждение электромагнитных волн. М., 1983. 6. Савенко М.О. Про існування розв'язків одного класу нелінійних обернених задач математичної фізики стосовно синтезу випромінюючих систем // Докл. НАН України. № 8. 1994. С. 48-52.

Стаття надійшла до редакції 03.03.95

УДК 517.958:536.12

Р.В.Гуззь

ВИЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПЛОСКОЇ
СТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
ДЛЯ ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОЇ ОБЛАСТІ
З ВИКОРИСТАННЯМ НЕПРЯМОГО МЕТОДУ
ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянемо плоску стаціонарну задачу теплопровідності:

$$\operatorname{div}(\Lambda(X) \operatorname{grad} \theta) = 0, \quad X \in \Omega; \quad /1/$$

$$\theta(X) = \theta_0(X), \quad X \in \Gamma, \quad /2/$$

де коефіцієнт теплопровідності є неперервною функцією просторових координат, постійною окрізь Ω , за винятком локальної області неоднорідності $\Omega_d \subset \Omega$ [3], тобто

$$\Lambda(X) = 1 + \Lambda_d(X) \chi_d(X).$$

Тут $\chi_d(X)$ - характеристична функція області Ω_d , $\Lambda_d(X)|_{X \in \Gamma} = 0$, $\Gamma \cap \Gamma_d = \emptyset$, Γ, Γ_d - краї відносно областей Ω та Ω_d .

Запишемо диференціальний оператор рівняння /1/ аналогічно [4] у вигляді суми двох операторів, один з яких ∇^2 описує поведінку температурного поля в однорідному середовищі, а інший $P_d(\cdot) = -\Lambda^{-1}(X) \nabla \Lambda_d \nabla$ враховує додатковий вплив локальної неоднорідності. Вислідом цього рівняння /1/ набуде вигляду

$$\nabla^2 \theta = -P_d \theta \chi_d, \quad X \in \Omega. \quad /3/$$

Апроксимувавши невідомий розв'язок в області Ω_g даним функцією θ_g і використавши її у правій частині /3/, передаємо від крайової задачі /3/, /2/ до крайової задачі стосовно θ^*

$$\nabla^2 \theta^* = -P_g \theta_g, \quad x \in \Omega; \quad /4/$$

$$\theta^* = \theta_0, \quad x \in \Gamma. \quad /5/$$

Застосуємо метод граничних елементів у непряму формулюванні до розв'язання задачі /4/, /5/. Запишемо розв'язок θ^* аналогічно [1] у вигляді

$$\theta^*(x) = \int \xi(x, y) \varphi(y) d\Gamma(y) + \int \xi(x, z) P_g \theta_g(z) d\Omega(z) + C, \quad /6/$$

де $\xi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{-\frac{1}{2}}$ - фундаментальний розв'язок оператора Лапласа у плоскому випадку; $\varphi(y)$ - функція інтенсивності фіктивних крайових джерел тепла; C - невідома стала.

Дискретизуємо Γ граничними елементами Γ_k ($k = \overline{1, N}$), моделюючи їхню геометрію за допомогою інтерполяційних функцій ψ_k . Уздовж кожного з елементів збудуємо апроксимацію невідомої функції за допомогою інтерполяційного полінома [1, 2]:

$$\varphi(\eta)|_{\Gamma_k} = \vec{\varphi}_k^T \vec{\psi}(\eta),$$

де $\vec{\varphi}_k$ - вектор невідомих вузових значень функції φ на k -му елементі; $\vec{\psi}$ - вектор базових інтерполяційних функцій, пов'язаних з локальною системою координат.

Область Ω_g дискретизуємо системою скінченних елементів Ω_{gm} ($m = \overline{1, M}$), зобразивши функцію θ_g на кожному з них інтерполяційним поліномом:

$$\theta_g|_{\Omega_{gm}} = \vec{\theta}_{gm}^T \vec{\xi}(\zeta_1, \zeta_2),$$

де $\vec{\theta}_{gm}$ - вектор невідомих вузових значень функції θ_g на m -му елементі; $\vec{\xi}$ - вектор базових інтерполяційних функцій.

На основі таких зображень одержимо дискретний аналог формули

$$\begin{aligned} /6/: \quad \theta^*(x) = & \sum_{k=1}^N \vec{\varphi}_k^T \int_{\Gamma_k} \xi(x, y^*) \vec{\psi} |G_{\Gamma_k}| d\eta + \\ & + \sum_{m=1}^M \vec{\theta}_{gm}^T \int_{\Omega_{gm}} \xi(x, z^*) P_g \vec{\xi} |G_{gm}| d\zeta_1 d\zeta_2 + C, \end{aligned} \quad /7/$$

де y^k, z^m - координати вузлів відповідно на елементах Γ_k та

$$\Omega_{gm}, G_{\Gamma_k} = \left[\left(\frac{dy_1^k}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dy_2^k}{d\eta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$G_{gm} = \frac{\partial z_1^m}{\partial \xi_1} \frac{\partial z_2^m}{\partial \xi_2} - \frac{\partial z_2^m}{\partial \xi_1} \frac{\partial z_1^m}{\partial \xi_2}.$$

Уведемо дві функції нев'язок:

$$R_r(X) = \theta^*(X) - \theta_o(X) \quad \text{на} \quad \bigcup_{k=1}^N \Gamma_k,$$

$$R_g(X) = \theta^*(X) - \theta_g(X) \quad \text{на} \quad \bigcup_{m=1}^M \Omega_{gm}.$$

Використавши метод колокації по вузлах $X^{on} \in \bigcup_{k=1}^N \Gamma_k$ ($n = \overline{1, N_1}$) та $X^{oj} \in \bigcup_{m=1}^M \Omega_{gm}$ ($j = \overline{1, M_1}$), де N_1, M_1 - загальні кількості вузлів інтерполювання відповідно функції φ по дискретному аналогу Γ та функції θ_g по дискретному аналогу Ω_g , одержимо систему $N_1 + M_1$ лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих вузових значень функцій φ, θ_g :

$$\sum_{k=1}^N \bar{\varphi}_k^T \int_{-1}^1 \bar{\xi}(X^{on}, y^k) \bar{\psi} |G_{\Gamma_k}| d\eta + \\ + \sum_{m=1}^M \bar{\theta}_{gm}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\xi}(X^{on}, z^m) P_g \bar{\xi} |G_{gm}| d\xi_1 d\xi_2 + c, \quad n = \overline{1, N_1}; \quad /8/$$

$$\sum_{k=1}^N \bar{\varphi}_k^T \int_{-1}^1 \bar{\xi}(X^{oj}, y^k) \bar{\psi} |G_{\Gamma_k}| d\eta + \\ + \sum_{m=1}^M \bar{\theta}_{gm}^T \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\xi}(X^{oj}, z^m) P_g \bar{\xi} |G_{gm}| d\xi_1 d\xi_2 - \bar{\xi} \right\} + c = 0, \quad j = \overline{1, M_1}. \quad /9/$$

Доповнимо /8/, /9/ дискретним аналогом

$$\sum_{k=1}^N \bar{\varphi}_k^T \int_{-1}^1 \bar{\psi} |G_{\Gamma_k}| d\eta + \sum_{m=1}^M \bar{\theta}_{gm}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_g \bar{\xi} |G_{gm}| d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad /10/$$

умови [1]

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) d\Gamma(y) + \int_{\Omega_g} P_g \theta_g(z) d\Omega(z) = 0.$$

Розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь /8/-/10/ містить M_1 вузових значень шуканого температурного поля в області Ω_g .

У довільній точці X розв'язок вихідної крайової задачі визначається за формулою /6/ з використанням розв'язку системи /8/-/10/.

Наведемо результати числових досліджень, виконаних для

$$\Omega = \{(X_1, X_2): X_1^2 + X_2^2 < z_0^2 \text{ при } \varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0; \\ X_1 < z_0 \cos \varphi_0, X_1^2 + X_2^2 < z_0^2 \text{ при } |\varphi| \leq \varphi_0\},$$

$$\theta_0|_r = \begin{cases} 1 & , 0 \leq |\varphi| < \varphi_0; \\ \frac{\varphi_0 + \Delta\varphi_0 - |\varphi|}{\Delta\varphi_0} & , \varphi_0 \leq |\varphi| < \varphi_0 + \Delta\varphi_0; \\ 0 & , \varphi_0 + \Delta\varphi_0 < |\varphi| \leq \pi, \end{cases}$$

$$\Lambda(X) = \exp(f_\Lambda(X) x_g(X)),$$

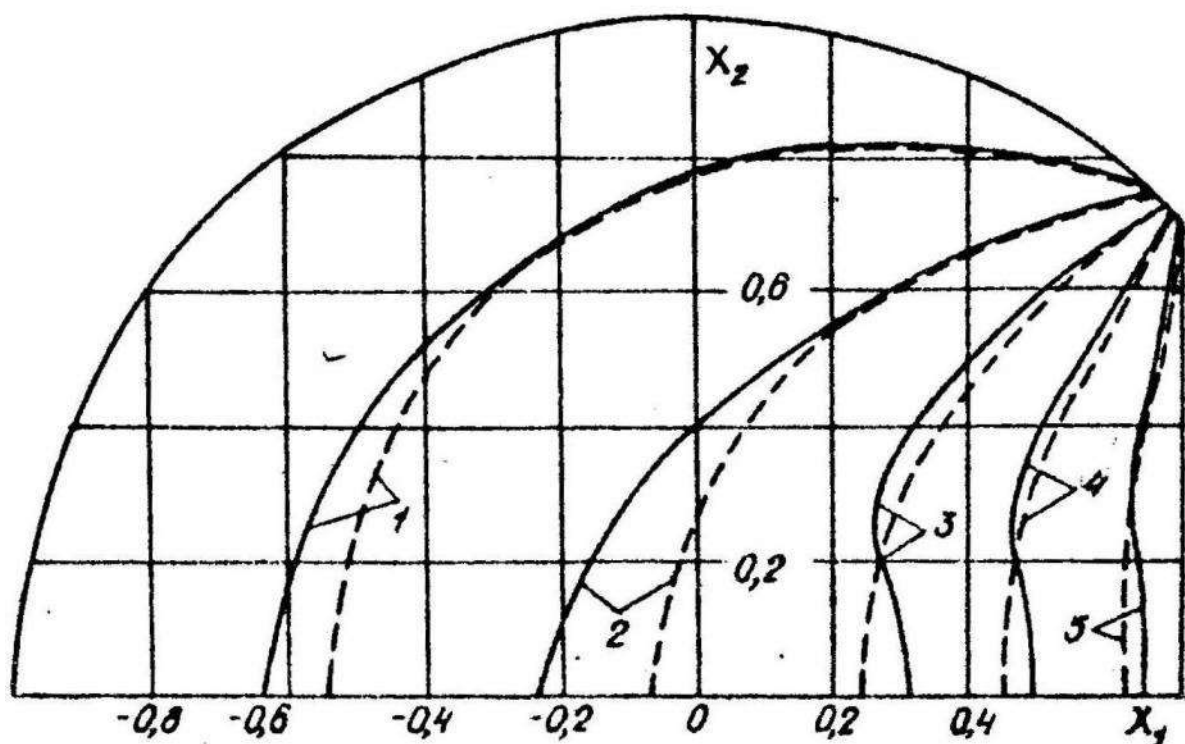
де $f_\Lambda(X)$ - неперервна кусково-лінійна функція, $f_\Lambda|_{\Gamma_g} = 0$.

$\max_{\Omega_g} f_\Lambda(X) = f_\Lambda(X^g)$, $X^g \in \Omega_g$, Ω_g - многокутник.

Ω_g Для апроксимації Γ використовували квадратичні граничні елементи, а для Ω_g - квадратичні лагранжеві чотирикутні скінченні елементи. Для числового інтегрування вздовж граничних елементів застосовували формулу Гауса з 8 вузлами, по лагранжевому елементу - двовимірну формулу з 16 вузлами. Для підвищення точності обчислень інтегрування виконували не по $\tilde{\Omega}_k$, а по зміщеному в напрямі зовнішньої нормалі контуру $\tilde{\Gamma}_k^{*1}$ [4].

Результати обчислень, одержані при $\varphi_0 = \pi/4$;

$\Delta\varphi_0 = 0,1$; $z_0 = 1$, подані на рисунку. Ізотермам 1-5 відповідають значення $\theta^* = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$ у випадку однорідного тіла



/штрихові лінії/ та за наявності у тілі області неорієнтованості /суцільні лінії/ $\Omega_g = \{(X_1, X_2) : -0.4 < X_1 < 0.2; |X_2| < \frac{1}{2}X_1 + 0.3\}$, в якій $\max A = A(0,0) = e^4$.

Виявлено, що з разі зростання коефіцієнта теплопровідності в області локальної неорієнтованості існує границя функції температурного поля. При цьому спостерігається ефект "плато" у функції розв'язку крайової задачі, який зі зростанням усе більше себе проявляє.

1. Венерянц П., Баттерфілд Р. Методи граничних елементів в прикладних науках. М.: Мир, 1984. 404 с. 2. Бреббия К., Тейлор К., Вроубел Я. Методи граничних елементів. М.: Мир, 1987. 524 с. 3. Гузєв Р.В. Решение задач теплопроводности и термоупругости для локально-неоднородных цилиндрических тел непрямым методом граничных элементов. Львов, 1988. 20 с. Рукопись деп. в УкрНИИДАД, № 844-Укр88. 4. Grits'ro E.G., Zhuravchak I.M. A Numeric-Analytic Method of Solving a Nonlinear Problem of Heat Conduction for a Right Prism // J. of Soviet Mathematics, 1993, Vol.64, N3, P.984-987.

Стаття надійшла до редакції 06.03.95

П.С.Семьо

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ
ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧНехай потрібно знайти таку функцію $g(x)$, при якій функціонал

$$J = \int_a^b G(x, g, x) dx \quad /1/$$

набуває мінімального значення, де

$$Z(x) = \int_c^x g(\tau) d\tau, \quad /2/$$

$$g(a) = g_0, \quad Z(b) = Z_0; \quad /3/$$

причому для відомих функцій $\bar{t}_i(x, g, Z)$ ($i = \overline{1, m}$) потрібно одночасно знайти таке найменше δ , при якому достатньо

$$\bar{t}_i(x, g, Z) \in K_i (i = \overline{1, m}) \quad /4/$$

для всіх $x \in [a, b]$.

Умови вигляду /2/ часто трапляються в багатьох задачах науки і техніки. Формально задачу /1/-/3/ можна розглядати як найпростішу задачу варіаційного числення для двох невідомих функцій $y(x), Z(x)$, які, однак, є залежними /співвідношення /2//; невідомі також $y(b)$ та $Z(a)$. В умові /2/ верхня межа інтеграла змінна, тому її не можна розглядати як достатню умову у вигляді рівності та застосовувати відповідно метод множників Лагранжа [2]. Наявність умови /4/ ще більше ускладнює задачу.

Нехай $\bar{g}(x)$ - періодична функція $g(x)$. Тоді $y'(x) = \bar{g}(x) = g(x)$, і тому задача /1/-/3/ з урахуванням заміни

$$y(x) = \int_c^x g(\tau) d\tau \quad /5/$$

еквівалентна такій задачі варіаційного числення: потрібно знайти функцію $y(x)$, при якій функціонал

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad /6/$$

набуває мінімального значення, якщо

$$y'(a) = g_0, \quad y(b) = Z_0. \quad /7/$$

Тут $F(x, y, y') \equiv G(x, g, z)$, де $y(x) = z(x)$, $y'(x) = g(x)$.
Для знаходження $y(x)$ необхідно розв'язати диференціальне рівняння
Ейлера [2]:

$$F_y' - F_y''x - F_y''y \cdot y' - F_y''y' \cdot y'' = 0. \quad /8/$$

Постійні інтегрування визначаємо з умов /7/.

Далі розглядаємо J та y як функції верхньої межі b , тобто

$$J = J(b), \quad y = y(x, b).$$

Функція $J = J(b)$ не є монотонною. Після підстановки y та y' в нерівності

$$t_i(x, y, y') \leq \kappa_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad /9/$$

де $t_i(x, y, y') = \bar{t}_i(x, g, z)$ ($i = \overline{1, m}$) /тут $y(x) = z(x)$, $y'(x) = g(x)$ /
отримуємо нерівності

$$f_i(x, b) \leq \kappa_i \quad (i = \overline{1, m}). \quad /10/$$

Мінімізуючи функцію $J = J(b)$ по b , отримуємо кульове наближення до розв'язку нерівностей /10/, які потрібно розв'язати щодо b при всіх $x \in [a, b]$. Обидві ці підзадачі можна розв'язати, оцінюючи інтервальні розширення функцій $J(b)$, $f_i(x, b)$, як запропоновано у праці [3]. При $i > 1$ часто попередньо необхідно в /10/ зв'язати усереднення. Якщо ж задачу /6/-/7/ розв'язуємо прямими методами, то нерівності вигляду /10/ набувають набагато простішого вигляду, але так отримуємо лише наближений розв'язок.

Як приклад розглянемо контактну задачу з праці [1]. Два півпростори 1 та 2 стискаються розподіленою силою $q(\tau)$, і півпростір 1 ковзає зі швидкістю $U(\tau)$ по півпростору 2. Потрібно знайти закон розподілу стискальної сили, при якому: спрацювання буде мінімальним, температура на межі півпросторів не перевищить заданих критичних значень, процес гальмування відбувається за найменший час. Нехай T – час, протягом якого рух припиниться. Потрібно знайти таку функцію $q(\tau)$, при якій функціонал

$$J = \int_0^T U(\tau) (\kappa_1 + \kappa_2 \cdot t(\tau, q(\tau), u(\tau)) q(\tau) d\tau \quad /11/$$

набуває найменшого значення, де

$$U(\tau) = U_0 - \frac{f}{m} \int_0^\tau q(x) dx, \quad /12/$$

$$q(0) \neq 0; \cdot v(\tau) \neq 0, \quad /13/$$

$t(\tau, q(\tau), v(\tau)) \equiv c_1 \cdot v(\tau) \cdot q(\tau) u(\tau)$, $u(\tau)$ - відома функція; c_1, k_1, k_2 , f, m, v_0 - відомі константи [1]; обмеження на критичну температуру:

$$t_i(\tau, q(\tau), v(\tau)) \leq \bar{\kappa}_i, (i=1,2). \quad /14/$$

Нехай $y(x) = \int_0^x q(\tau) d\tau$. Тоді $y'(x) = q(x)$. Функціонал [6] запишемо як

$$J = \int_0^{\tau_1} \left(v_0 - \frac{f}{m} y(x) \right) (k_1 + k_2 \cdot c_1 y'(x) v_0 - \frac{f}{m} y(x) u(x) y'(x)) dx.$$

Рівняння Ейлера [8] набирає вигляду

$$0 = (a_1 y^2 - a_2 y + a_3) \cdot y' \cdot u'(\tau) + 2(a_1 y^2 - a_2 y + a_3) (y' \cdot u(\tau)), /15/$$

а з урахуванням механічної суті задачі - такого екзотичного вигляду

$$0 = (\ln(\sqrt{k_2 \cdot c_1} \cdot (\frac{f}{m} y - v_0)))' \cdot (\ln u(\tau))' + (\ln(y' \cdot u(\tau)))'. /16/$$

Далі враховуємо обмеження /14/ за описаною вище схемою.

І. Баран В.П., Варзаль А.Г., Ониськевич В.М. и др. Квазистатическая контактная задача термоупругости для двух полубесконечных тел с учетом теплообразования на границе раздела // Соврем. пробл. теории контакт. взаимодействий. Ереван, 1988. С. 24-27. 2. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1950. 3. Сенъо П.С. Новый підхід до побудови інтервальних методів розв'язування систем нелінійних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. С. 85-91.

Стаття надійшла до редакції 09.03.95

ПОРІВНЯЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ РУНГЕ-КУТТА

У процесі математичного моделювання багатьох процесів приходимо до одноточкових і багатоточкових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних. Один з підходів розв'язування цих задач полягає в їх приведенні до послідовності задач Коші. Тому наявність ефективних методів і програмного забезпечення розв'язання задач Коші є ключем для успішного аналізу моделі в цілому.

У даній роботі проаналізовані шляхи автоматичного керування довжиною кроку для явних і вкладених методів Рунге-Кутта. Як приклад нелінійної системи диференціальних рівнянь 4-го порядку наведена порівняльна характеристика ефективності різних методів.

І. Загальна схема явних методів Рунге-Кутта /РК/. Задача Коші для звичайного /в загальному випадку векторного/ диференціального рівняння l -го порядку полягає в знаходженні функції $y(x) = [y_1(x), \dots, y_n(x)]^T$, яка на заданому проміжку (x_0, x_1) задовольняє рівняння

$$y'(x) = f(x, y), \quad /1/$$

$$f(x, y) = [f_1(x, y), \dots, f_n(x, y)]^T.$$

а в точці x_0 - задану початкову умову

$$y(x_0) = y_0, \quad /2/$$

$$y_0 = [y_{01}, \dots, y_{0n}]^T.$$

Для зручності викладу вважаємо, що $x_0 < x_1$.

У разі використання числових методів розв'язування задачі /1/-/2/ отримуємо послідовність точок $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots$ зі значеннями наближеного розв'язку $y_0, y_1, \dots, y_i, \dots$ в них. Для знаходження розв'язку в точці $x > x_i$ вістаємо задачу Коші, аналогічну /1/-/2/ з початковою умовою в точці x_i :

$$y'(x) = f(x, y), \quad x \in (x_i, x_1); \quad /3/$$

$$y(x_i) = y_i. \quad /4/$$

Згідно зі схемою однокрокових явних методів РК наближений розв'язок задачі /3/-/4/ у точці $x_{i+1} = x_i + h_i$ подаємо у вигляді

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^S \rho_j k_j ; \quad /5/$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) ; \quad /6/$$

$$k_j = f(x_i + \alpha_j h_i, y_i + h_i \sum_{z=1}^{j-1} \beta_{jz} k_z) \quad j = 2, \overline{S},$$

де S – кількість стадій методу РК: $\alpha_j, \rho_j, \beta_{jz}$ ($j, z = 1, \dots, S$) – задані дійсні числа. Залежно від $S, \alpha_j, \rho_j, \beta_{jz}$ вістаємо різні S -стадійні методи РК $[1, 2, 3]$.

2. Точність методу і добір довжини кроку. Метод РК /5/-/6/ має порядок p , якщо різниця err між точним $y(x_{i+1})$ і наближеним розв'язком y_{i+1} задачі /3/-/4/ у точці x_{i+1} /локальна похибка/ оцінюється нерівністю:

$$err = \|y(x_{i+1}) - y_{i+1}\| < C_i h_i^{p+1}, \quad /7/$$

$C_i - const$, яка залежить від властивостей функції f та її похідних на проміжку $[x_i, x_{i+1}]$. Величина $C_i h_i^{p+1}$ характеризує локальну похибку методу РК у точці x_{i+1} на i -му кроці при заданій початковій умові /4/. Глобальну похибку ε в точці x_{i+1} можна оцінити нормою різниці між точним розв'язком y_T вихідної задачі Коші /1/-/2/ і наближеним розв'язком y_{i+1} :

$$\varepsilon = \|y_T(x_{i+1}) - y_{i+1}\|.$$

Дана похибка складається з локальної похибки err і перенесеної похибки у визначенні початкової умови /4/. Оцінка глобальної похибки для методу РК p -го порядку подається у вигляді

$$\|\varepsilon\| \leq C_2 h^p,$$

де $h = \max h_i$, $C_2 - const$, яка залежить від функції f та її частинних похідних на проміжку $[x_0, x_1]$.

Із співвідношення /7/ випливає, що вибором довжини кроку h_i можна досягти того, щоб локальна похибка err на i -му кроці не перевищувала заданої величини ε_{ps} . Очевидно, що крок h_i повинен бути настільки малим, щоб виконувалось співвідношення /7/. Водночас він повинен бути достатньо великим, щоб запобігти зайвим обчисленням.

Опишемо алгоритм керування довжиною кроку. Нехай обраний

S -стадійний метод РК порядку p . Нехай у точці x_i обраний крок величиною h_i . Обчислимо розв'язки $y_{i+1}^{(1)}, y_{i+2}^{(1)}$ у точках.

$x_{i+1} = x_i + h_i$, $x_{i+2} = x_{i+1} + h_i$, з кроком h_i і розв'язок $y_{i+2}^{(2)}$ в точці $x_{i+2} = x_i + 2h_i$ з кроком $2h_i$. Тоді відносна локальна похибка

$erru$ розв'язку в точці x_{i+2} з точністю до $O(h^{p+1})$ визначається співвідношенням

$$erru = \frac{1}{2^{p-1}} \frac{err}{\max\{1, \|y_{i+2}^{(2)}\|, \|y_{i+2}^{(2)}\|\}}.$$

Величина нового кроку h_N записується формулою

$$h_N = h_i \min \left\{ facmax, \max(facmin, fac(\frac{eps}{erru}^{\frac{1}{p+1}})) \right\}. \quad //$$

Константи fac , $facmin$, $facmax$ характеризують ступінь ризику під час вибору нового кроку $[2, 3, 5]$. Рекомендується добирати $fac \in \{0.8, 0.9, 1/0.25^{1/(p+1)}, 1/0.38^{1/(p+1)}\}$, $facmin = 0.1$, $facmax \in [1.5; 5]$.

Якщо $erru \leq eps$, значення $y_{i+1}^{(1)}$, $y_{i+2}^{(1)}$ вважаються задовільними і пошук розв'язку продовжується з нової точки x_{i+2} з новим кроком $h_{i+2} = h_N$.

Якщо $erru > eps$, обидва кроки відкидаються і знову здійснюється пошук розв'язку починаючи з точки x_i з новим кроком $h_i = h_N$. При цьому після відкинутих кроків, добираючи новий крок, приймаємо в $//$ $facmax = 1$.

3. Вкладені методи РК. Дещо інший спосіб обчислення локальної похибки дають так звані вкладені методи РК. Ідея їх полягає в знаходженні таких коефіцієнтів α_j , β_{j2} , ρ_j , $\hat{\rho}_j$, які крім наближеного значення розв'язку y_{i+1} порядку p згідно з $//5/$ дають інше значення наближеного розв'язку:

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^q \hat{\rho}_j k_j$$

порядку q /як правило $q = p-1$ або $q = p+1$). Вважатимемо, що $p > q$.

Тоді відносна локальна похибка $erru$ у точці x_{i+1} з точністю до $O(h^{p+1})$ виражається співвідношенням

$$erru = \frac{1}{|h^{q-p-1}|} \frac{\|y_{i+1} - \hat{y}_{i+1}\|}{\max\{1, \|y_{i+1}\|, \|\hat{y}_{i+1}\|\}}.$$

Добір нового кроку h_N у точці x_{i+1} здійснюється, як і для явних методів РК, згідно з $//8/$.

4. Числовий приклад. За допомогою явних і вкладених методів РК, коефіцієнти яких наведені у праці $[3]$, зінтегровані деякі системи лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь.

Наведемо приклад задачі Коші для системи четвертого порядку:

$$\begin{cases} y_1' = 2xy_1y_4, \\ y_2' = 10xy_1^5y_4, \\ y_3' = 2xy_4, \\ y_4' = -2x(y_3 - 4), \end{cases} \quad x \in (0; \pi] \\ y_j(0) = 1, j = \overline{1, 4}.$$

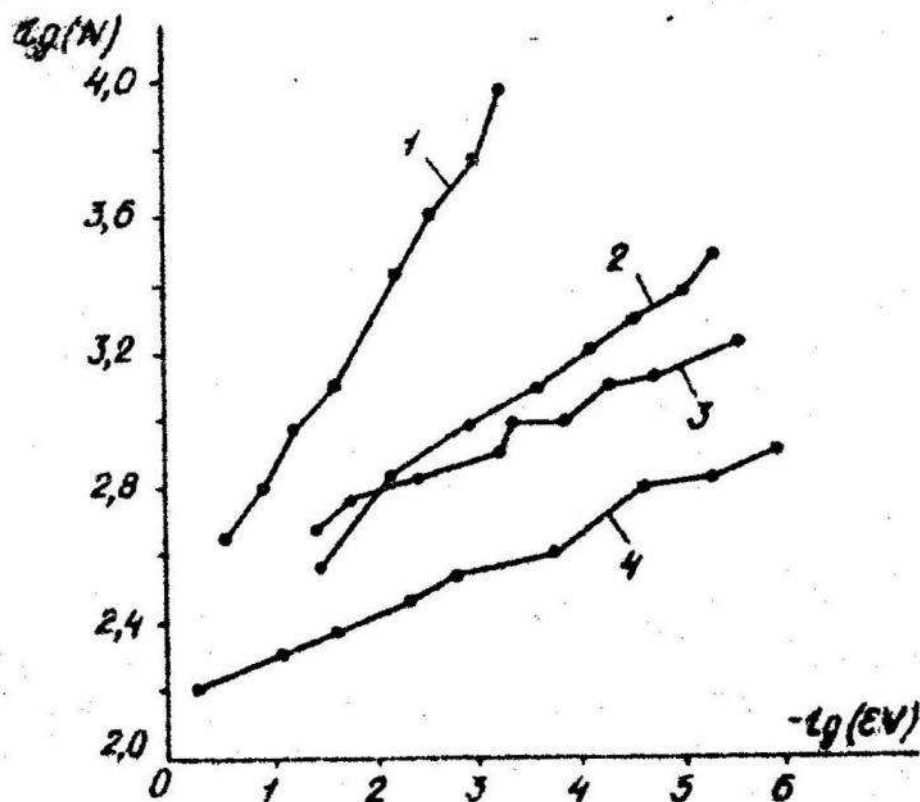
191

Аналітичний розв'язок якої має вигляд

$$y_1 = \exp(\sin(x^2)), \quad y_2 = \exp(5 \sin(x^2)), \\ y_3 = \sin(x^2) + 1, \quad y_4 = \cos(x^2).$$

Ця система розв'язувалась як явними, так і вбудованими методами. У серії розрахунків допустима відносна локальна похибка eps змінювалась від 10^{-2} до 10^{-7} /в удосконаленому методі Вундера-Косі до 10^{-6} /. Кожен наступне значення eps в $\sqrt{10}$ разів було менше від попереднього. Фактори ризику f_{ac} , f_{actin} , f_{actax} дорівнювали 0.9, 0.1, 4 відповідно.

На рис. 1 зображена залежність відносної глобальної похибки

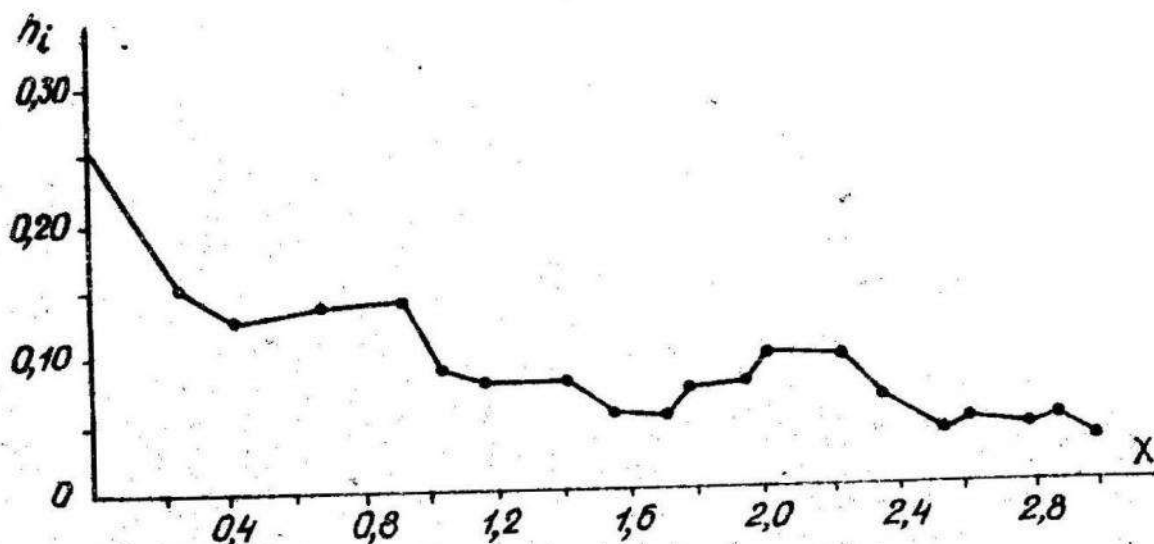


$$\varepsilon U = \max_{x_i} \max_j \frac{|y_i(x_i) - y_{ji}|}{\max\{|1, |y_j(x_i)|\}}$$

наближеного розв'язку на проміжку інтегрування від кількості N обчислень правих частин системи для чотирьох методів: удосконаленого методу Ейлера-Коші / $s = 2, p = 2$ / - лінія 1; класичного методу РК / $s = 4, p = 4$ / - лінія 2; семиставійного методу Бутчера шостого порядку / $s = 7, p = 6$ /; методу Дормана-Прінса / $s = 7, p = 5, q = 4$ /. Перші три методи - явні, останній - вкладений. По осі абсцис зі знаком мінус відкладені десяткові логарифми відносної глобальної похибки εU . По осі ординат - десяткові логарифми кількості обчислень N правих частин.

Результати числових експериментів свідчать, що ефективність методу (кількість обчислень N правих частин системи для досягнення заданої відносної глобальної похибки εU) зростає (N - зменшується) зі збільшенням порядку методу p . Найефективнішим методом для розв'язування задач Коші /1/-/2/ зі середньою точністю $\text{eps} = 10^{-2} - 10^{-7}$ є вкладений метод Дормана-Прінса. Це підтверджує результати числових досліджень [2,4].

На рис. 2 поданий графік довжин кроків h_i уздовж інтервалу інтегрування для задачі Коші /9/, побудованих методом Дормана-Прінса автоматичним вибором кроку при $\text{eps} = 10^{-7}$. Зауважимо, що



відносна глобальна похибка ε_U наближеного розв'язку при цьому становить 1.34×10^{-6} . Для визначення розв'язку здійснені 114 кроків, з них 16 відкинуті. Права частина при цьому обчислювалась 799 разів.

1. Бахвалов Н.С., Ил'ков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., 1987. 2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ванер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990. 3. Шербатий М.Б., Іванків К.С. Методичні вказівки до розробки програмного забезпечення розв'язування задачі Коші однокроковими методами. Львів, 1993. 4. Dormand T.R., Prince P.T. A family of embedded Runge-Kutta formulae // Comput. Appl. Math, 1980, Vol. 6. P.19-26. 5. Shampine L.F., Watts H.A. The art of writing a Runge-Kutta code // Comput. Appl. Math. 1979, Vol. 5. P. 93-121.

Стаття надійшла до редакції 10.03.98

УДК 539.214

Р.І.Кісіль

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗВ'ЯЗНОСТІ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ
В ЗАДАЧАХ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ
ТВЕРДИХ ТІЛ

Розглянемо процеси квазістатичного пружнопластичного деформування тонкостінних тіл. Постановку задачі пластичності здійснимо в рамках класичної моделі Прандтля-Рейса. Функцію навантаження оберемо у формі Мізеса. Для побудови математичної моделі використаємо гіпотезу адитивності деформацій, згідно з якою приріст повних деформацій в тілі може бути поданий у вигляді суми приростів пружних /зворотних/ деформацій $\Delta \varepsilon^e$ та пластичних /залишкових/ деформацій $\Delta \varepsilon^p$.

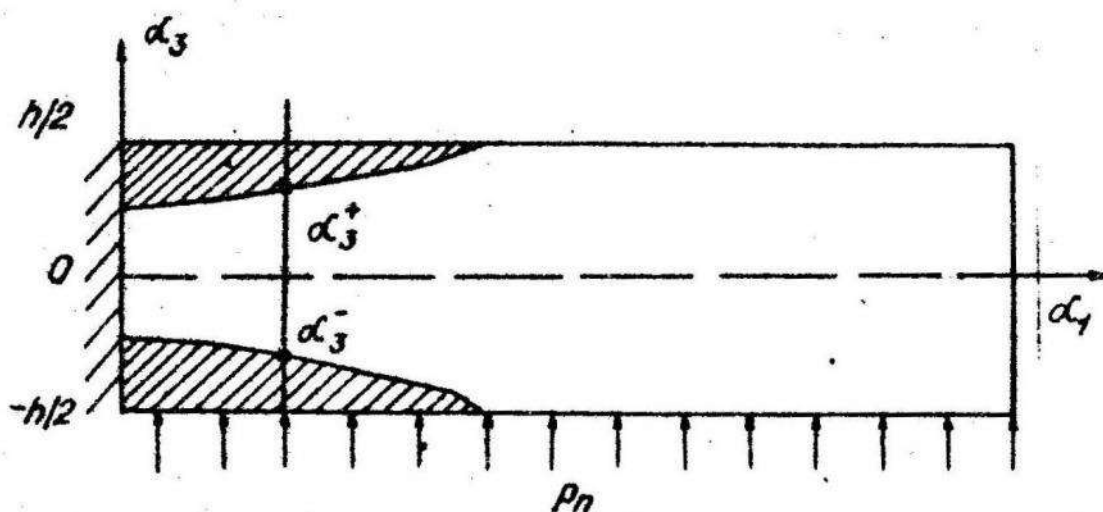
Вважається, що для тіла виконується лінійний зв'язок між приростом напружень $\Delta \sigma$ і приростом пружних деформацій $\Delta \varepsilon^e$. Для лінеаризації отриманої задачі використовується метод додаткових напружень, який дає змогу звести розв'язування фізично-нелінійної задачі деформування тіла до послідовності лінійних задач. Якщо тіло тонкостінне, доцільно здійснювати редукцію лінійних задач до двовимірних. При цьому використовуємо гіпотези деформування типу Тимошенки.

© Кісіль Р.І., 1995

Після розв'язання редукованої задачі ці гіпотези дають змогу відтворювати просторові поля деформацій. Обчислення просторових полів напружень здійснюється в рамках тривимірної теорії пружнопластичного деформування.

Величини напружень і пластичних деформацій обчислюватимемо у певній множині точок з проміжку $[-h/2; h/2]$ де h – товщина тіла. Тоді закон розподілу пластичних деформацій по товщині тіла можна подати у кусково-лінійному вигляді.

Описаний алгоритм використовували для дослідження пружно-пластичного деформування смуги-пластини /див. рисунок 4/.



Край пластини жорстко зашкелений з одного боку і вільний з іншого. Товщина $h = 0,005$ м, довжина $l = 0,1$ м, модуль Юнга $E = 2,1 \times 10^5$ МПа, межа текучості $\sigma_T = 245$ МПа. Розглядали випадок дослідження напружено-деформованого стану пластини з ідеально пластичного матеріалу під дією рівномірного тиску $p_n = 0,305$ МПа.

Для дослідження збіжності ітераційного процесу обирали $n = 2k-1$ – точкове рівномірне розбиття по товщині пластини. У табл. 1 та 2 наведені значення пластичних деформацій та інтенсивності напружень по товщині пластини в точках $\alpha_1 = 0,0$ /випадок 1/ та $\alpha_1 = 0,00625$ /випадок 2/ при $\nu = 0,5$ та $\nu = 0,3$ відповідно. Крім цього, слід зазначити, що при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,5$, $\epsilon_2^p = 0,3$ огляду на симетрію наведені результати лише для $\alpha_3 > 0$.

Аналізуючи величини пластичних деформацій по товщині тіла, можна зауважити, що їх розподіл дещо різниться від лінійного розподілу в зоні виникнення пластичних деформацій при $\nu = 0,3$; при $\nu = 0,5$

Таблица 1

N_z 3/n	$\alpha_3 \times h/2$	$k = 3$		$k = 6$		Гипотеза	
		$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	σ_{int}	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	σ_{int}	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	σ_{int}
1	I	-0.6389	245	-0.5833	245	-0.5602	245
	0.833	-	-	-0.3172	245	-0.2379	245
	0.666	-0.0882	245	-0.0511	245	-0.0357	245
	0.5	-	-	0.0	193.2	0.0	190.1
2	I	-0.2500	245	-0.1817	245	-0.1739	245
	0.833	-	-	0.0	240.8	0.0	239.6
	0.666	0.0	203.6	0.0	192.6	0.0	191.6
	0.5	-	-	0.0	144.6	0.0	143.8

Таблица 2

N_z 3/n	$\alpha_3 \times h/2$	$k = 6$			Гипотеза		
		$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	$\varepsilon_2^p \times 10^{-3}$	σ_{int}	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	$\varepsilon_2^p \times 10^{-3}$	σ_{int}
1	I	-0.8397	0.1170	245	-0.7987	0.1136	245
	0.833	-0.4972	0.0833	245	-0.4626	0.0658	245
	0.666	-0.1538	0.0322	245	-0.1264	0.0180	245
	0.5	0.0	0.0	207.3	0.0	0.0	203.1
2	I	-0.2773	0.0534	245	-0.2693	0.0521	245
	0.833	-0.0279	0.0064	245	-0.0212	0.0042	245
	0.666	0.0	0.0	200.4	0.0	0.0	199.3
	0.5	0.0	0.0	150.4	0.0	0.0	149.7

він лінійний [1,2]. Виходячи з цього, розглядали випадок дослідження пружнопластичного деформування смуги-пластини з гіпотезою наближеного 3-лінійного розподілу пластичних деформацій по товщині тіла:

$$\varepsilon_i^p(\alpha_3) = \begin{cases} -\varepsilon_i^{p-} \frac{\alpha_3 - \alpha_3^-}{h/2 + \alpha_3^-}, & -h/2 \leq \alpha_3 < \alpha_3^-, \\ 0, & \alpha_3^- \leq \alpha_3 \leq \alpha_3^+, \\ \varepsilon_i^{p+} \frac{\alpha_3 - \alpha_3^+}{h/2 - \alpha_3^+}, & \alpha_3^+ < \alpha_3 \leq h/2, \end{cases}$$

де $\varepsilon_i^{p-}, \varepsilon_i^{p+}$, $i = 1, 2$ - значення пластичних деформацій на краях $-h/2$ та $h/2$ відповідно; $\alpha_3^-(\alpha_1)$, $\alpha_3^+(\alpha_1)$ - точки, що розташовані на межі зони виникнення пластичних деформацій по товщині пластини. Такий підхід дає змогу зменшити кількість точок розбиття проміжку $[-h/2; h/2]$ до чотирьох: двох країв і точок α_3^- , α_3^+ , а також дає змогу точніше визначати зону пластичних деформацій. Не шукаючи α_3^- , α_3^+ ми могли лише стверджувати, що у деяких точках розбиття вже не виникають пластичні деформації. Деякою особливістю 3-лінійного підходу є те, що точки α_3^- , α_3^+ не є стаціонарними на відміну від вузлів розбиття, а постійно змінюються зі зростанням області пластичних деформацій углиб. Це вимагає перерахунку на кожній ітерації значень напружень, виходячи з лінійного їх розподілу по товщині тіла у пружній зоні. У табл. 1 та 2 наведені отримані з використанням такої гіпотези величини пластичних деформацій та інтенсивностей напружень на край пластини /у точці $\alpha_3 = h/2$ /, а у внутрішніх точках ці значення обчислені, виходячи з закону розподілу. Отримані значення α_3^+ введені у табл. 3.

Т а б л и ц я 3

№ з/п	γ = 0.5				γ = 0.3	
	k = 3	k = 6	Гіпотеза	Аналіт.	k = 6	Гіпотеза
1	0.001531	0.001585	0.001608	0.001605	0.001478	0.001508
2	0.002004	0.002119	0.002129	0.002129	0.002036	0.002047

Звичайно, використовуючи підхід із розбиттям декількома точками по товщині, ми також можемо уточнити межу зони виникнення пластичних деформацій, знаходячи точки α_3^- , α_3^+ . Отримані відповідні значення наведені в табл. 3, де вміщені також відомі з літератури [1]

значення точок α_3^+ при $\nu = 0,5$. Із наведених результатів бачимо, як розмір зони виникнення пластичних деформацій по товщині тіла впливає на величину σ_{int} в області виникнення лише пружних деформацій.

Відповіді отримані при $\varepsilon = 0,0001$. Така величина забезпечує достатню точність результатів, що впливає з результатів досліджень, наведених у табл. 4. Розглядався випадок $\nu = 0,5$ при застосуванні гіпотези 3-лінійного розподілу.

Т а б л и ц я 4

M_2 з/п	$\varepsilon = 0.01$		$\varepsilon = 0.001$		$\varepsilon = 0.0005$	
	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	$\alpha_3^+ \times 10^{-2}$	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	$\alpha_3^+ \times 10^{-2}$	$\varepsilon_1^p \times 10^{-3}$	$\alpha_3^+ \times 10^{-2}$
1	-0.4451	0.1735	-0.5327	0.1637	-0.5472	0.1622
2	-0.1710	0.2138	-0.1758	0.2129	-0.1759	0.2129

Таким чином, забезпечення точності результатів при використанні першого підходу вимагає великої кількості точок розбиття по товщині тіла. Особливо густота точок зростає за невеликих пластичних деформацій. Слід також брати до уваги, що тривалість обчислень для досить великої кількості точок розбиття та розмір використовуваної пам'яті комп'ютера є більшими, ніж у разі використання вказаної гіпотези.

1. Качанов Л.М. Механика пластических сред. М., 1948.
2. Мокаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле. К., 1991.
3. Муха І.С. Чисельна схема розв'язування задач нелінійного деформування твердих тіл при наявності початкових переміщень // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1990. Вип. 33. С. 22-26.

Стаття надійшла до редакції 14.03.95

Л.А.Роман
ПРО ОДИН ЧИСЛОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ
ОПЕРАТОРНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Для побудови числових методів розв'язування задачі операторного програмування

$$f_0(t, x(t)) \rightarrow \min; \quad /1/$$

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x(t)); \quad /2/$$

$$g(x_0, x_1) = d; \quad /3/$$

$$A^- \leq A(t, x(t)) \leq A^+, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad /4/$$

де $x(t)$, $f_1(t, x(t))$, $g(x_0, x_1)$, $A(t, x(t))$ - вектор-функції розмірності n ; A^- , A^+ - задані вектори; $f_0(t, x(t))$ - задана функція, від неперервної задачі перейдемо до її дискретного аналога. Для цього розіємо відрізок $[0, 1]$ на $l-1$ інтервал точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = 1$. Інтегруємо сюди /2/ за формулою Ейлера та одержимо

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \tau_i f_1(x_i, t_i), \\ x_i &= x(t_i), \quad \tau_i = t_{i+1} - t_i, \\ i &= 1, \dots, l-1. \end{aligned} \quad /5/$$

Задавши початковий вектор

$$x_0 = x(t_0) = w_0, \quad /6/$$

послідовно визначимо компоненти вектора

$$x = [x_0, x_1, \dots, x_l] = x(w_0)$$

і побудуємо функцію $q(w_0) = g(w_0, x(w_0)) - d$. У результаті задачі /1/-/4/ зводиться до визначення розв'язку задачі

$$f_0(T, x(w_0)) \rightarrow \min, \quad /7/$$

$$q(w_0) = 0, \quad /8/$$

$$h(w_0) \geq 0, \quad h = (h^-, h^+), \quad /9/$$

$$h^- = A^- - A(T, x(w_0)),$$

$$h^+ = A(T, x(w_0)) - A^+,$$

$$T = [t_0, t_1, \dots, t_l].$$

Побудована задача /7/-/8/ є окремим спеціальним випадком задачі нелінійного програмування. Її розв'язок шукатимемо таким чином: задано значення w_0 , обчислимо $f_0(T, x(w_0))$, $q(w_0)$, $h(w_0)$, побудуємо модифіковану функцію Лагранжа, яку будемо мінімізувати по w_0 одним із методів безумовної мінімізації. Розглянемо застосування методу Ньютона для розв'язування задачі /7/-/8/, побудувавши модифіковану функцію Лагранжа у такий спосіб:

$$R(w_0, u, v) = f_0(T, x(w_0)) + \sum_{i=1}^n u_i q_i(w_0) + \sum_{j=1}^n v_j^2 h_j(w_0). \quad /10/$$

Метод Ньютона знаходження $\min R(w_0, u, v)$ по w_0 приводить до розв'язування системи лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(w_0^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})}{dw_0 dw_0} (w_0^{(k+1)} - w_0^{(k)}) + \frac{dq(w_0^{(k)})}{dw_0} (u^{(k+1)} - u^{(k)}) + \\ + 2 \sum_{j=1}^n v_j^{(k)} \frac{dh_j(w_0^{(k)})}{dw_0} (v_j^{(k+1)} - v_j^{(k)}) = - \frac{dR(w_0^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})}{dw_0}, \\ \left[\frac{dq(w_0^{(k)})}{dw_0} \right]^T (w_0^{(k+1)} - w_0^{(k)}) = -g(w_0^{(k)}), \quad /11/ \\ v_j < \frac{dh_j(w_0^{(k)})}{dw_0}, w_0^{(k+1)} - w_0^{(k)} + h_j(w_0^{(k)}) (v_j^{(k+1)} - v_j^{(k)}) = -v_j^{(k)} h_j(w_0^{(k)}), \end{aligned}$$

де матриця $\frac{d^2 R}{dw_0 dw_0}$ визначається за рекурентними формулами з праці [2]. Зауважимо, що під час реалізації цього процесу на ЕОМ, зокрема під час розв'язування системи /11/, в кожному конкретному випадку додатково досліджуються умови, коли визначник системи може перетворитися на нуль, виникає проблема збереження матриці других похідних в пам'яті ЕОМ.

Запропонована методика розв'язування задачі /1/-/4/ застосована для розв'язування нелінійних задач пружності. Досліджена задача визначення у циліндричній оболонці з залежними від температури характеристиками матеріалу осесиметричних температурних полів, що забезпечують мінімально плавний рівень температурних напруг [1]:

$$F(W, T) = \frac{d^2}{dx^2} \left[E(T) \frac{d^2 W}{dx^2} \right] + 4P^4 E(T) (W - \epsilon_T \alpha T) = 0, \quad /12/$$

$$T = \frac{t}{t_0}, \quad W = W_1/R, \quad E(T) = E(t)/E_n,$$

$$\alpha(T) = \alpha(t)/\alpha_0, \quad x = Z/l,$$

$$\epsilon_T = \alpha_0 t_0, \quad P = bl/2R, \quad b^4 = 3(1-\nu^2)R^2/4h^2,$$

$$T^-(x) < T(x) < T^+(x).$$

Уведенням нових змінних

$$z_1 = W - \varepsilon T, z_2 = \frac{dW}{dx}, z_3 = \frac{d^2W}{dx^2}, z_4 = \frac{d}{dx} \left(E \frac{d^2W}{dx^2} \right),$$

$$z_5 = T, z_6 = \lambda, z_7 = \frac{d\lambda}{dx}, \dots, z_8 = \frac{d^2\lambda}{dx^2}, z_9 = \frac{d^3\lambda}{dx^3}.$$

задача /12/ зводиться до задачі вигляду /1/-/4/. Числові дослідження виконані для циліндричної оболонки з параметрами $\rho = 10$, $h/R = 1/20$, $\nu = 0,3$, виготовленої з матеріалу ІХІ8Н9Т. Температурні залежності функцій E і α брали лінійними та квадратичними. Результати обчислень узгоджуються з результатами, що наведені у праці /1/.

І. Б е р т і ш М.Я., Р о м а н Д.Д. Застосування методів типу Ньютона-Канторовича у нелінійних задачах механіки // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. -мех.-мет. 1982. Вип.19. С.58-62. 2. Е в т у - ш е в і к о Д.Г. Методи рішення екстремальних задач и их применение в системах оптимизации. М., 1982.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.95

УДК 517.9

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко,
Н.В.Горбачова

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРА

Нехай функція $f(x, \xi, y)$ неперервна в обмеженій області D , причому по змінній y задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L , $g(x)$ - неперервна функція. Розглянемо таке нелінійне інтегральне рівняння Вольтера:

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^x f(x, \xi, y(\xi)) d\xi, \quad |x - x_0| \leq h. \quad /1/$$

За зроблених вище припущень воно має єдиний розв'язок, який можна побудувати методом послідовних наближень. Як відомо, успіх цієї процедури багато в чому залежить від вдалого вибору нульового наближення. Далі опишемо метод лінеаризації рівняння /1/ та подімо оцінку близькості лінеаризованого та точного розв'язків.

Позначимо $y_0 = y(x_0) \equiv g(x_0)$ і припускаємо, що $y_0 \neq 0$ (цього завжди можна досягнути за допомогою заміни $y(x) = u(x) + a$, де $a = \text{const} \neq 0$). Лінеаризований розв'язок $\tilde{y}(x)$ шукаємо, опираючись на таке лінійне рівняння:

$$\tilde{y}(x) = g(x) + \int_{x_0}^x \kappa(x, \xi) \tilde{y}(\xi) d\xi, \quad \kappa(x, \xi) = \frac{f(x, \xi, y_0)}{y_0}. \quad /2/$$

Для оцінки близькості розв'язків рівнянь уводимо позначення:

$z(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$. Тоді в /1/ та /2/ маємо для $z(x)$:

$$z(x) = \int_{x_0}^x [f(x, \xi, y(\xi)) - \kappa(x, \xi) \tilde{y}(\xi)] d\xi. \quad /3/$$

Оскільки

$$|f(x, \xi, y(\xi)) - \kappa(x, \xi) \tilde{y}(\xi)| \leq L|y(\xi) - \tilde{y}(\xi)| + (L+K)|\tilde{y}(\xi) - y_0|, \quad /4/$$

$$K = \max_{\xi} \left| \frac{f(x, \xi, y_0)}{y_0} \right|.$$

тому в /3/ маємо

$$|z(x)| \leq \varphi(x) + L \left| \int_{x_0}^x |z(\xi)| d\xi \right|,$$

де введені позначення:

$$\varphi(x) = (L+K) \left| \int_{x_0}^x |\tilde{y}(\xi) - y_0| d\xi \right|.$$

Опираючись на відому нерівність Белмана-Грунвалла [1], остаточно отримуємо

$$|z(x)| \leq \varphi(x) + L \int_{x_0}^x \varphi(\xi) \exp[L(x-\xi)] d\xi; \quad /5/$$

$$\int_{x_0}^x |z(\xi)| d\xi \leq \int_{x_0}^x \varphi(\xi) \exp[L(x-\xi)] d\xi. \quad /6/$$

Формула /5/ дає поточкову оцінку близькості розв'язків рівнянь /1/ та /2/, що має практичне застосування для контролю процедури наближення шуканого розв'язку.

З /3/-/4/ випливає також така оцінка близькості розв'язків рівнянь /1/ та /2/:

$$\|z(x)\|_{\alpha} \leq \frac{L+K}{\alpha-L} \|\tilde{y}(x) - y_0\|_{\alpha}, \quad /7/$$

де

$$\|z(x)\|_{\alpha} = \max_{|x-x_0| \leq h} \{ |z(x) \exp[-\alpha(x-x_0)]| \}, \quad /8/$$

Сталу α у /7/-/8/ вибираємо з умови $\alpha > L$; L та K визначені раніше.

Відповідна оцінка у рівномірній нормі набирає вигляду

$$\|z(x)\|_C \leq \frac{h[L+K]}{1-hL} \|\tilde{y}(x) - y_0\|_C, \quad /9/$$

де $2h$ - довжина проміжку зміни незалежної x визначається з умови $h < \frac{1}{L}$.

Запропоновану лінеаризацію можна модифікувати покроковим методом, коли на кожному наступному кроці зміни x за початко-

де значення $y_0 = y(x_0)$ обираємо попередньо побудований лінеаризований розв'язок у відповідній граничній точці попереднього кроку. Цю ж лінеаризацію можна застосовувати для розв'язування таких інтегро-диференціальних рівнянь Вольтера:

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^x f(x, \xi, y(\xi), y'(\xi), \dots, y^{(n)}(\xi)) d\xi, \quad |x - x_0| \leq h. \quad /10/$$

Для цього припускаємо, що $y_0 = y(x_0) = y(x_0) \neq 0$, а $y_i = y^{(i)}(x_0)$, $i = \overline{1, n}$ можуть бути визначені з рівняння /10/ після диференціювання по x n -разів та приймання $x = x_0$ в отриманих при цьому виразах. Тоді лінеаризований розв'язок /10/ пропонується шукати з рівняння:

$$\tilde{y}(x) = g(x) + \int_{x_0}^x K(x, \xi) \tilde{y}(\xi) d\xi, \quad K(x, \xi) = \frac{f(x, \xi, y_0, y_1, \dots, y_n)}{y_0}. \quad /11/$$

Припускаючи, що $g(x), f(x, \xi, y, y', \dots, y^{(n)})$ неперервно диференційована по x n -разів та задовольняє умову Ліпшиця по $y, y', \dots, y^{(n)}$ рівномірно щодо x, ξ , легко отримати оцінки вигляду /5/, /7/, /9/ для різниці між розв'язками рівнянь /10/ та /11/.

І. Б е л я н а Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954. 2. Б о г д а н о в Ю.С., С и - р о и д Д.Б. Дифференциальные уравнения. Минск, 1963.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.95

УДК 517.958:519.6

Н.П.Головач
ЗАСТОСУВАННЯ ПРЯМОГО МЕТОДУ ІГРАНИЧНИХ
ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ
НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

В області $\Omega \in R^2$ із межею Γ розглянемо задачу нестационарної теплопровідності, що описується рівнянням

$$\nabla^2 u(x, t) - \frac{1}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0; \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T] \quad /1/$$

з початковою умовою при $t = 0$ в області $\bar{\Omega}$:

$$u(x, t) = u_0(x), \quad /2/$$

де $u_0(x)$ - задана функція,

© Головач Н.П., 1995

та граничні умови:

для теплоізотер при $t > 0$ на ділянці Γ_1 границі Γ :

$$u(x, t) = \bar{u}(x); \quad /3/$$

і теплового потоку при $t > 0$ на ділянці Γ_2 границі Γ :

$$q(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \bar{q}(t). \quad /4/$$

тут риском позначені задані величини.

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

На основі методу зв'язаних нев'язок розв'язання початково-крайової задачі /1/-/4/ зводиться до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, що має вигляд [2]

$$c(\xi)u(\xi, T) + k \int_0^T \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x, T, t) d\Gamma(x) dt = \quad /5/$$

$$= k \int_0^T \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x, T, t) d\Gamma(x) dt + \int_{\Omega} u_0(x) u^*(\xi, x, T, 0) d\Omega(x),$$

де u^*, q^* - відповідно фундаментальний розв'язок і його нормальна похідна:

$$u^*(\xi, x, T, t) = \frac{1}{4\pi k(T-t)} \exp\left\{-\frac{z^2}{4k(T-t)}\right\},$$

$$q^*(\xi, x, T, t) = \frac{d}{8\pi k^2(T-t)} \exp\left\{-\frac{z^2}{4k(T-t)}\right\}.$$

Тут $z^2 = z_i z_i$, $d = z_i n_i(x)$, $z_i = x_i(\xi) - x_i(x)$, $i = 1, 2$, $n_i(x)$ - напрямні косинуси зовнішньої нормалі $n(x)$ до границі Γ ; $c(\xi)$ - кутовий коефіцієнт у граничній точці $\xi = \xi(\xi_1, \xi_2)$, який у випадку гладкої границі дорівнює $1/2$.

Для розв'язання рівняння /5/ використовуємо прямий метод граничних елементів /МГЕ/ [1, 2]. Тобто шукані функції u та q подаємо у вигляді

$$u(x, t) = \varphi(x)^T \psi(t) u^n, \quad /6/$$

$$q(x, t) = \varphi(x)^T \psi(t) q^n,$$

де $\varphi(x)$, $\psi(t)$ - базисні функції відповідно просторових і часової змінної; u^n , q^n - вектори вузлових значень u і q .

Для цього границю Γ розбиваємо на N елементів, в інтервал часу $[0, T]$ - на F проміжків. Область Ω зображаємо у вигляді об'єднання S скінченних елементів. Геометрію граничних елементів моделюємо лінійними відрізками або криволінійними параболою.

Використовуючи метод колокацій та апроксимації /6/, запишемо рівняння /5/ в дискретній формі [2, 4].

для схеми 1:

$$c_i u_F^i + k \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* \psi dt d\Gamma \right) u^n = k \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* \psi dt d\Gamma \right) q^n + \sum_{s=1}^S \int_{\Omega_s} u^* u_0 d\Omega; \quad /7/$$

Для схеми 2:

$$c_i u_F^i + k \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* \psi dt d\Gamma \right) u^n = k \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* \psi dt d\Gamma \right) q^n + \sum_{s=1}^S \int_{\Omega_s} u^* u_{f-1} d\Omega. \quad /8/$$

Чисельне дослідження задачі /1/-/4/ реалізовуємо, користуючись схемою /7/. Такий вибір зумовлений результатами порівняльного аналізу застосування обох схем до розв'язання одновимірної задачі нестационарної теплопровідності [4].

Розглянемо деякі аспекти числового розв'язання двовимірної задачі нестационарної теплопровідності на основі схеми /7/. Далі вважатимемо, що інтерполююча функція по часовій змінній кусково-постійна, тобто $\psi(t) \equiv 1$.

Записуючи рівняння /7/ для всіх вибраних на границі точок, отримуємо систему рівнянь [2]:

$$\sum_{f=1}^F H_{ff} U_F = \sum_{f=1}^F G_{ff} Q_f + B_0 U_0, \quad /9/$$

де елементи матриць H і G визначаються виразами /або їх комбінаціями/:

$$h_{ffij}^m = k \int_{\Gamma_j} \varphi_m \int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt d\Gamma, \quad /10/$$

$$g_{ffij}^m = k \int_{\Gamma_j} \varphi_m \int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* dt d\Gamma,$$

де $H_{ffij} = H_{ffij} + c_i \delta_{ff} \delta_{ij}$, δ_{ff} , δ_{ij} - символи Кронекера.

Оскільки в коректно поставленій задачі для рівняння /1/ задається тільки половина граничних умов, то систему лінійних алгебраїчних рівнянь /9/ можна використати для отримання значення невідомих функцій u чи q на границі. Система /9/ розв'язується для моменту часу $t = t_F$. Досліджено, що значення матриць U_{ff} та G_{ff} при $f = 1, 2, \dots, F-1$ відомі з попередніх кроків по часу і зберігаються в пам'яті ЕОМ. Тому на кожному

кроці по часу потрібно обчислити лише дві нові матриці /тільки у випадку, коли крок по часу є постійним/.

Інтеграли по часу у виразах /10/ обчислюємо аналітично [4]:

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} q^* dt = \frac{d}{2\pi k z^2} \{ \exp(-a_{f-1}) - \exp(-a_f) \}; \quad /11/$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* dt = \frac{1}{4\pi k} \{ E_1(a_{f-1}) - E_1(a_f) \}, \quad /12/$$

де $a_f = \frac{z^2}{4k(t_f - t_f)}$; $E_1(z)$ - інтегрально-показникова функція, яка обчислюється як [5]:

$$E_1(z) = - \int_z^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = -C - \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n(n!)},$$

де C - стала Ейлера, $C = 0,57721566$.

Із виразу a_f випливає, що у формулі /11/ треба прийняти $\exp(-a_f) = 0$, у формулі /12/ - $E_1(a_f) = 0$.

Ще раз зазначимо, що інтегруючи по просторових координатах, інтерполюючи функції φ вибираємо лінійними або квадратичними. Елементи матриць H_{ff} та G_{ff} , що не належать головній діагоналі обчислюємо числовим способом за допомогою звичайних квадратурних формул Гаусса шостого порядку.

Зауважимо, що діагональні коефіцієнти G_{ffii} у системі /9/ містять інтеграли з логарифмічною сингулярністю, які можна обчислити аналітично. Приміром, у випадку лінійних інтерполюючих функцій по просторових координатах маємо

$$G_{ffii} = \frac{l_{i-1}}{8\pi k} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(4\alpha_{i-1})^n}{n(n+1)(2n+1)(n!)} - \frac{1}{2} \{ C + \ln(16\alpha_{i-1}) \} + 3 \right] +$$

$$+ \frac{l_i}{8\pi k} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(4\alpha_i)^n}{n(n+1)(2n+1)(n!)} - \frac{1}{2} \{ C + \ln(16\alpha_i) \} + 3 \right], \quad /13/$$

де l_{i-1} , l_i - довжини двох граничних елементів, що стикаються у вузлі i .

$$\alpha_i = \frac{l_i}{16k\Delta t_f}. \quad /14/$$

Ряд у виразі /13/ збігається швидко при малих значеннях α . Тому вздовж відрізка, що лежить біля точки сингулярності, інтегрування виконуємо аналітично, оскільки в цьому випадку α завжди менше від 1, а по решті частині довжини елемента - з використанням квадратурної формули Гаусса. Довжину L частини граничного елемента, що допускає аналітичне інтегрування, визначимо з умовлення [14] із нерівності

$$L = 2(k\Delta t_f)^{1/2} \leq 1.$$

У випадку квадратичних інтерполюючих функцій по просторових координатах для обчислення інтеграла зі сингулярністю в середньому вузлі граничного елемента маємо

$$G_{FFii} = \frac{l_i}{\pi k} \left(\frac{4}{9} - \frac{5}{24} [c + \ln \alpha_i] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\alpha^n}{n(n+1)(n+3)(n!)} \right);$$

у решті випадків

$$G_{FFii} = \frac{l_{i-1}}{\pi k} \left(\frac{17}{72} - \frac{1}{24} [\ln 4\alpha_{i-1} + c] + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (4\alpha)^n \cdot \frac{(1-2n)}{n(n+1)(2n+1)(2n+3)(n!)} \right) +$$

$$\frac{l_i}{\pi k} \left(\frac{17}{72} - \frac{1}{24} [\ln 4\alpha_i + c] + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (4\alpha)^n \frac{(1-2n)}{n(n+1)(2n+1)(2n+3)(n!)} \right).$$

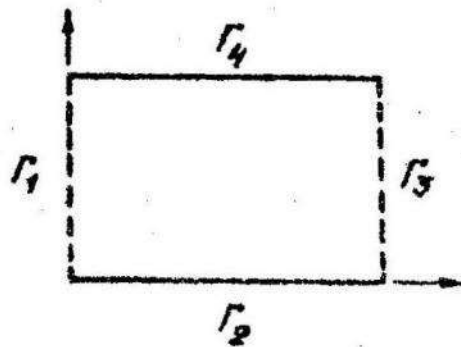
Діагональні елементи матриці H_{FF} у рівнянні /9/ містять сильну сингулярність /порядку $\frac{1}{2}$ / та інтегровані у сенсі головного значення Коші. У випадку лінійних елементів члени H_{FFii} тожовно дорівнюють 0, оскільки z і n ортогональні, тобто $d=0$.

Розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь /9/, отримуємо температуру u і тепловий потік q , для тих вузлів границі, в яких вони були досі невідомі з граничних умов.

При потребі, користуючись рівнянням /5/ у дискретному зображенні, знаходимо значення температури у будь-якій внутрішній точці області Ω .

Запропонований алгоритм реалізований у вигляді комплексу Сі-програм для ПЕОМ типу ІВМ РС/АТ.

Для апробації розробленої методики розглянута задача розподілу температури на границі квадратної області розміром 1×1 м з нульовою початковою температурою і коефіцієнтом теплопровідності $k=1$ Вт/(м°C) із заданими граничними умовами вигляду /див. рисунок/:



при

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_1 & \quad u = 1; \\ x \in \Gamma_3 & \quad u = 0; \\ x \in \Gamma_2 & \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0; \\ x \in \Gamma_4 & \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 1. \end{aligned}$$

У таблиці наведені результати / $u \cdot 100$ / в момент часу $t = 0,15$ с, отримані з кроком $\Delta t = 0,025$ /за допомогою лінійної апроксимації на сітці 10×6 та квадратичної - на сітці 5×3 . Числові результати запропонованої методики порівнювали з результатами обчислень методом скінченних елементів /МСЕ/ [3].

x	y = 0			y = 1		
	МСЕ	МТЕ лінійні апро.	МТЕ квадратич. апро.	МСЕ	МТЕ лінійні апро.	МТЕ квадратич. апро.
0,1	866	823/814/	848/838/	1035	996/1001/	1030/1008/
0,2	735	684/676/	697/695/	982	927/933/	937/947/
0,3	606	562/555/	568/570/	900	847/853/	865/856/
0,4	492	448/443/	451/455/	810	756/764/	787/773/
0,5	387	347/343/	347/352/	713	662/671/	675/668/
0,6	292	259/256/	257/252/	611	567/577/	593/579/
0,7	206	183/182/	179/185/	502	468/480/	476/470/
0,8	133	119/119/	112/119/	379	363/376/	382/370/
0,9	063	069/070/	059/069/	234	242/257/	245/238/

П р и м і т к а . У дужках наведені результати досліджень розподілу температури, при отриманні яких не використовувались спеціальні методики виділення сингулярності в діагональних елементах матриць.

Одержані результати свідчать про ефективність запропонованого підходу.

І. Б е н е р д ж и П., Б а т е р ф и л д Р. Методи граничних елементов в прикладних науках. М., 1984. 2. Б р е б - б я К., Т е л л е с Ж., В р о у б е л Д. Методи граничных элементов. М., 1987. 3. В о в к В.Д., В о в к В.Н., Д и я к И.И. и др. Расчет и оптимизация баллонов электронно-лучевых пучков. // Материалы УП Всесоюз. конф. Новосибирск, 1982. С.147-155. 4. Г о л о в а ч Н.П., Д и я к И.И. Чисельне дослідження задачі теплопровідності прямим методом граничних елементів // Вісн. ДУ. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С.46-52. 5. Р ы ж и к И.М., Г р а д е т с к и й И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.; Л., 1951.

Стаття надійшла до редакції 23.03.95

Б.В.Ковальчук, О.І.Гой

УЗАГАЛЬНЕННЯ ФОРМУЛИ ГРІНА
В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ТЕРМОПРУЖНОСТІ.

ЩО ВРАХОВУЄ ОРТОТРОПІЇ ЧАСУ РЕЛАКСАЦІЇ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ

Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω , обмежену поверхнею S , у природному стані має сталу температуру t_0 . Унаслідок дії масових сил або джерел тепла в тілі виникають переміщення u_i і приріст температури $\theta = t - t_0$. Зміна температури спричинює виникнення деформацій ϵ_{ij} та напружень σ_{ij} , які є функціями координат x_i і часу τ .

У праці [3] одержані основні інтегро-диференціальні рівняння узагальненої термопружності анізотропних тіл на основі узагальненого закону теплопровідності:

$$(1 + \tau_p \frac{\partial}{\partial \tau}) q_p = -\lambda_{pj}^t t_{,j} \quad (p, j = 1, 2, 3), \quad /1/$$

де τ_p - час релаксації теплового потоку у напрямі осі x_p ; λ_{pj}^t - коефіцієнти теплопровідності; q_p - компоненти вектора теплового потоку; t - температурне поле.

У даній роботі для такої релаксаційної моделі /1/ ми виводимо формули, які дають змогу визначати переміщення і зміну температури всередині тіла Ω , якщо вони задані на його поверхні S . Одержані результати узагальнюють формулу Гріна на динамічні задачі узагальненої термопружності з урахуванням ортотропії часу релаксації теплового потоку.

Для випадку, коли час релаксації теплового потоку однаковий для всіх напрямів, відповідні результати наведені в монографії [4].

Для знаходження переміщень і температури всередині тіла вважаємо, що в початковий момент часу внутрішні джерела тепла W_t відсутні, а швидкість нагрівання $t|_{\tau=0} = 0$ і швидкість переміщення $u_i|_{\tau=0} = 0$. Визначаємо спочатку переміщення $u_i(x, \tau)$, $x \in \Omega$, $\tau > 0$. Для цього прикладаємо в точці $\xi \in \Omega$ силу $X'_i = \delta(x - \xi) \delta_+(\tau) \delta_{ij}$, спрямовану по осі x_j , і припускаємо, що джерела тепла відсутні, тобто $W'_t = 0$.

Виникаючі в тілі Ω переміщення і приріст температури позначаємо відповідно $u_i^{(j)}(x, \xi, \tau)$, $v^{(j)}(x, \xi, \tau)$ і визначаємо

і в взаємозв'язаній системі рівнянь [1, 3]:

$$C_{ijkl} u_{k,lj}(x, \xi, \tau) + \delta(x - \xi) \delta_+(\tau) \delta_{ij} = \rho \ddot{u}_i^{(p)}(x, \xi, \tau) + \beta_{ij} v_j^{(p)}(x, \xi, \tau), \quad /2/$$

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i} \int_0^\tau v_{ij}^{(p)}(x, \xi, \tau) \exp\left(\frac{\xi - \tau}{\tau_i}\right) d\xi =$$

$$= \frac{t_0}{2} \beta_{ij} (\dot{u}_{i,j}^{(p)} + \dot{u}_{j,i}^{(p)}) + c_e \dot{v}^{(p)}(x, \xi, \tau)$$

за однорідних початкових умов:

$$u_i^{(p)}(x, \xi, 0) = 0, \quad \dot{u}_i^{(p)}(x, \xi, 0) = 0, \quad /3/$$

$$v^{(p)}(x, \xi, 0) = 0, \quad x, \xi \in \Omega$$

і крайових умов:

$$u_i^{(p)}(x, \xi, \tau) = 0, \quad v^{(p)}(x, \xi, \tau) = 0, \quad \xi \in \Omega, \quad x \in S. \quad /4/$$

Тут $\delta(\eta) = \frac{dS(\eta)}{d\eta}$, $\delta_+(\tau) = \frac{dS_+(\tau)}{d\tau}$, де $S(\eta)$, $S_+(\tau)$ -

симметрична і асиметрична одиничні функції; δ_{ij} - символ Кронекера; C_{ijkl} - декартові компоненти сталого тензора пружної жорсткості; $\beta_{ij} = \alpha_{kl}^t C_{ijkl}$, α_{ij}^t - температурні коефіцієнти лінійного розширення і звуку; c_e - об'ємна теплоємність; ρ - густина.

Підставляючи $x_i' = \delta(x - \xi) \delta_+(\tau) \delta_{ij}$, $W_t' = 0$, $u_i^{(p)}(x, \xi, \tau)$, $v^{(p)}(x, \xi, \tau)$ у перетворене за Лапласом рівняння взаємності [2] і застосовуючи обернене перетворення Лапласа, одержуємо

$$\dot{u}_i(\xi, \tau) = \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega x_i(x, \tau - \tau_0) \frac{\partial u_i^{(p)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\Omega -$$

$$- \frac{1}{t_0} \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega v^{(p)}(x, \xi, \tau - \tau_0) W_t(x, \tau_0) d\Omega -$$

$$- \int_0^\tau d\tau_0 \int_S u_i(x, \tau - \tau_0) \frac{\partial p_i^{(p)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} dS +$$

$$+ \frac{1}{t_0} \int_0^\tau d\tau_0 \int_S \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i} h(x, \tau_0) \psi_i(x, \xi, \tau - \tau_0) n_j dS. \quad /5/$$

Для введення позначень

$$\psi_i(x, \xi, \tau) = \int_0^\tau v_{,i}^{(p)}(x, \xi, \zeta) e^{-\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}} d\zeta$$

і $\rho_i^{(p)} = \sigma_{ij}^{(p)} n_j$, де $\sigma_{ij}^{(p)}$ - напруження на поверхні S .
Викликані силою $x_i' = \delta(x - \xi) \delta_+(\tau) \delta_{ij}$, а n_j - напрямні косинуси нормалі до цієї поверхні.

Для визначення температури всередині тіла Ω допускаємо, що масові сили відсутні, тобто $x_i'' = 0$. Обираємо тепер джерело тепла у вигляді $W_t'' = \delta(x - \xi) \delta_+(\tau)$, яке діє в точці $\xi \in \Omega$.

Виникаючі при цьому переміщення і приріст температури позначимо відповідно $\tilde{u}_i(x, \xi, \tau)$, $\tilde{v}(x, \xi, \tau)$ і знаходимо їх зі системи рівнянь [1, 3]:

$$c_{ijkl} \tilde{u}_{k,lj}(x, \xi, \tau) = \rho \ddot{\tilde{u}}_i(x, \xi, \tau) + \beta_{ij} \ddot{\tilde{v}}_{,j}(x, \xi, \tau),$$

$$\frac{\lambda_{ij}^*}{\tau_i} \int_0^\tau \tilde{v}_{,ij}(x, \xi, \zeta) \exp\left(-\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right) d\zeta =$$

16/

$$= \frac{t_0}{2} \beta_{ij} (\ddot{\tilde{u}}_{i,j} + \ddot{\tilde{u}}_{j,i}) + c_i \ddot{\tilde{v}} - \delta(x - \xi) \delta_+(\tau)$$

за початкових умов:

$$\tilde{u}_i(x, \xi, 0) = 0, \quad \dot{\tilde{u}}_i(x, \xi, 0) = 0,$$

$$\tilde{v}(x, \xi, 0) = 0, \quad \dot{\tilde{v}}(x, \xi, 0) = 0, \quad x, \xi \in \Omega$$

і крайових умов:

$$\tilde{u}_i(x, \xi, \tau) = 0, \quad \tilde{v}(x, \xi, \tau) = 0, \quad x \in S, \xi \in \Omega.$$

Підставляючи тепер $x_i'' = 0$, $W_t'' = \delta(x - \xi) \delta_+(\tau)$, $\tilde{u}_i(x, \xi, \tau)$, $\tilde{v}(x, \xi, \tau)$ у перетворене за Лапласом рівняння взаємності [2], після застосування оберненого перетворення Лапласа знаходимо

$$t(\xi, \tau) = \int_0^\tau d\tau_0 \int_{\Omega} \tilde{v}(x, \xi, \tau - \tau_0) W_t(x, x_0) d\Omega -$$

$$- t_0 \int_0^\tau d\tau_0 \int_{\Omega} x_i(x, \tau - \tau_0) \frac{\partial \tilde{u}_i(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\Omega +$$

$$+ t_0 \int_0^\tau d\tau_0 \int_S u_i(x, \tau - \tau_0) \frac{\partial P_i^{(W)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} dS +$$

17/

$$+ \int_0^\tau d\tau_0 \int_S \frac{\lambda_{ij}^*}{\tau_i} h(x, \tau - \tau_0) \tilde{u}_i(x, \xi, \tau) n_j dS,$$

де позначено

$$\tilde{\psi}_i(x, \xi, \tau) = \int_0^{\tau} \tilde{v}_{,i}(x, \xi, \zeta) e^{\frac{\zeta - \tau}{\tau_i}} d\zeta,$$

$p_i^{(w)} = \sigma_{ij}^{(w)} n_j$, причому $\sigma_{ij}^{(w)}$ - напруження в точці $x \in S$, спричинені джерелом тепла $w_i'' = \delta(x - \xi) \delta_+(\tau)$.

Формули /5/, /7/ є узагальненими формулами Гріна в узагальненій термопружності анізотропного тіла, яка враховує ортотропію часу релаксації теплового потоку.

І. К о в а л ь ч у к Б.В., Г о й О.І. Узагальнене енергетичне рівняння і теорема єдиності розв'язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1994. Вип. 40. 2. К о в а л ь ч у к Б.В., Г о й О.І. Узагальнене варіаційне рівняння і теорема взаємності розв'язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1994. Вип. 41. 3. К о л я н о Д.М., К о в а л ь ч у к Б.В., Г о й О.І. Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела, учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1988. № 9. 4. П о д о б н я г а ч Я.С., К о л я н о Д.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редакції 28.03.95

З М І С Т

С а в у л а Я.Г. Математична модель теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям.....

Ф л е й ш м а н Н.П., К о й ф м а н Ч.Н. Метод довільних кривих у теорії теплопровідності пластинок змінної товщини.....

Б е р н а к е в и ч І.Є., Ш и н к а р е н к о Г.А. Чисельне моделювання акустичної взаємодії оболонок в рідині. II. Проекційно-сіткові апроксимації та їхня збіжність.

Ц е г е л и к Г.Г., К у д е р а в е ц ь Х.С. Апроксимація часткових сум узагальнених гармонічних рядів неперервними функціями.....

Б у к М.В. Збіжність та оцінка швидкості збіжності методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь.....

Г а р е с и м Я.С., О с т у д і н Б.А. Дослідження алгоритму розв'язання деяких двовимірних інтегральних рівнянь із урахуванням апріорних властивостей розв'язку.....

П е р е й м и б і д а А.А., Х а в к о Р.С. Про один алгоритм розв'язування осесиметричних початково-крайових задач для гіперболічного рівняння теплопровідності методом потенціалів.....

Л а б а М.С., Ц е г е л и к Г.Г. Метод $/m+1/$ -арного пошуку інформації в упорядкованих послідовних файлах і його ефективність.....

Б а р т і ш М.Я., Ч и п у р к о А.І., Ш а х - н о С.М. Про одну модифікацію методу Гауса-Ньютона

П р и г у л а М.М., Д м у х о в с ь к а О.М. Закони збереження інверсної нелінійної системи Буассієска.....

П р и г у л а М.М., П р и к а р п а т с ь к и й А.К. Структура скінченновимірних інваріантних підмноговидів параметрично інтегрованих нелінійних динамічних систем.....

Ш и н к а р е н к о Г.А. До одноврогових схем інтегрування варіаційних задач для параболічних рівнянь. I. Побудова схем за зразків стійкості.....

Барвінський А.Ф., Дудзяний І.М.,
Дрогомирська Х.Т. Власні суттєво нелінійні по-
довжні коливання стержня.....

Дудзяний І.М., Цимбал В.М. Нелокальні за-
дачі для сингулярно збуреного псевдопараболічного рівняння...

Дзиковська М.О., Костів О.В. Застосуван-
ня об'єктно-орієнтованого підходу до обробки деревовидних
структур даних.....

Попов Б.О., Демех М.Ф. Узагальнена обмінна
теорема для найкращого чебишового наближення.....

Савенко П.О., Пасняк Л.М. Синтез лінійної
антенної ґратки за заданою амплітудною діаграмою напрямленос-
ті з урахуванням взаємного впливу випромінювачів.....

Гудзь Р.В. Визначення розв'язку плоскої стаціонар-
ної задачі теплопровідності для локально-неоднорідної обла-
сті з використанням непрямого методу граничних елементів.....

Сенько П.С. Метод розв'язування одного класу ва-
ріаційних задач.....

Щербатий М.В., Іванків К.С. Порівняльна
характеристика методів Рунге-Кутти.....

Кісіль Р.І. Дослідження збіжності ітераційного
процесу в задачах пружнопластичного деформування твердих
тіл.....

Роман Д.І. Про один числовий метод розв'язування
задач операторного програмування.....

Мартиненко Марія Д., Мартинен-
ко Михайло Д., Горбачова Н.В. Лінеаризація
для одного класу нелінійних рівнянь Вольтера.....

Головач Н.Д. Застосування прямого методу гранич-
них елементів для чисельного розв'язання задачі нестацио-
нарної теплопровідності.....

Ковальчук Б.В., Гой О.І. Узагальнення форму-
ли Іріна в узагальненій термодружності, що враховує ортотро-
пію часу релаксації теплового потоку.....

Збірник наукових праць

Міністерство освіти України

Вісник Львівського університету

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

Випуск 42

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Редактор **Е.А.Г л а в а ц ь к а**
Художній редактор **Е.А.К а м е н ь с ь к и**
Технічний редактор **С.Д.Д о в б а**
Коректор **Р.Р.Г а м а д а**

Підп. до друку 09.10.95. Формат 60х84/16.

Папір офсет. Умовн. друк. арк. 6,28. Умовн. фарбовідб. 6,51.

Обл.-вид. арк. 6,93. Вид. № 23. Зам. 2902. Замовне.

Видавництво "Світ" при Львівському держуніверситеті.

290000 Львів, вул. Дорошенка, 41.

Львівська обласна книжкова друкарня.

290000 Львів, вул. Пекарська, 15.

ISSN 0201-758X. ISSN 0320-6572.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат, 1995, вип. 42, 1—108.