УДК 515.12

Л.Є.Базилевич, М.М.Зарічний

ПРО МЕТРИЗАЦІЮ ГІПЕРПРОСТОРУ ОРІЄНТОВАНИХ ДУГ

Із багатьох праць про топологію гіперпросторів зупинимося на тих, що стосуються гіперпросторів дуг [3,4]. Зокрема, Р.Коті [3] описав топологію гіперпростору дуг на поверхнях.

Розглянемо гіперпростір $\Gamma(M)$ орієнтованих дуг у метричному просторі (M,d). Точніше, $\Gamma(M)=\{(A,a)\mid a\in A\subseteq M$ і пара $(A,\{a\})$ гомеоморфна парі $(I,\{0\})\}$ /через I позначаємо відрізок [0,1] /.

Нехай $\Omega=\{\tau\in C(I,I)\mid \tau(0)=0,\ \tau(1)=1\}$.
Свого часу І.М.Песін висловив гіпотезу, що формула

$$\rho((A_1,a_1),(A_2,a_2))=\inf\ \sup d\,(\gamma_1(\tau_1(t)),\gamma_2(\tau_2(t))), \qquad (*)$$

де $\gamma_i: I\to A_i$ - такий гомеоморфізм, що $\gamma_i(0)=a_i$, $i=1,2$, задає метрику в $\Gamma(M)$. Легко бачити, що права частина /*/ не залежить від вибору гомеоморфізмів γ_1,γ_2.

Мета цієї роботи - довести цю гіпотезу,а також простежити зв"язок одержаної метрики ρ зі звичайною метрикою Гаусдорфа.

Нам знадобиться одне допоміжне твердження.

Лема. Нехай $f_i: I\to I$, $i=1,2,3,4$ - кусково-лінійні відображення, такі, що $f_i^{-1}(0)=\{0\}$, $f_i^{-1}(1)=\{1\}$. Тоді існують кусково-лінійні відображення $g_i: I\to I$, $i=1,2,3$, такі, що для кожного $t\in I$ існують $\theta,\tau\in I$, для яких $g_1(t)=f_1(\theta)$, $g_2(t)=f_2(\theta)=f_3(\tau)$, $g_3(t)=f_4(\tau)$.

Доведення. Очевидно, що множина $\{(f_1(t),f_2(t))\mid t\in I\}$ містить множину L, гомеоморфну відрізкові, що з"єднує точки $(0,0)$ і $(1,1)$ у квадраті $I\times I$. Множина $K=\{(t,f_3(\tau),f_4(\tau))\mid t,\tau\in I\}\cap(L\times I)$ є перегородкою /у розумінні [1]/ між точками /0, 0,1/ та /1,1,0/ у множині $L\times I$, гомеоморфній квадратові. Нескладні міркування, що грунтуються на теоремі про перегородки для квадрата [1], показують, що точки /0,0,0 / та /1,1,1 / належать одній компоненті зв"язності множини K. Оскільки K - підполіедр в I^3, то існує кусково-лінійне відображення $g=(g_1,g_2,g_3): I\to I^3$ таке, що $g(0)=(0,0,0)$, $g(1)=(1,1,1)$ і $g(I)\subseteq K$. Очевидно, що відображення g_1,g_2,g_3 є шуканими.

Теорема I. Функція ϱ є метрикою на $\Gamma(M)$.

Доведення потребує лише нерівність трикутника. Нехай $(A_i, a_i) \in \Gamma(M)$, $i = 1,2,3$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Нехай $\gamma_i : I \to A_i$ – такі гомеоморфізми, що $\gamma_i(0) = a_i$, $i = 1, 2$. Існують $\tau_1, \tau_1^*, \tau_2, \tau_3 \in \Omega$ такі, що

$$|\varrho((A_1, a_1), (A_2, a_2)) - \max_{t \in I} d(\gamma_1(\tau_1(t)), \gamma_2(\tau_2(t)))| < \varepsilon,$$

$$|\varrho((A_1, a_1), (A_3, a_3)) - \max_{t \in I} d(\gamma_1(\tau_1^*(t)), \gamma_3(\tau_3(t)))| < \varepsilon.$$

Можна додатково вважати, що функції $\tau_1, \tau_1^*, \tau_2, \tau_3$ є кусково-лінійними і такими, що набувають значення 0 лише в точці 0, а значення 1 – лише в точці 1.

Скориставшись лемою, знайдемо відображення $g = (g_1, g_2, g_3) : I \to I^3$ таке, що $g/0/ = /0,0,0/$, $g/1/ = /1,1,1/$ і для кожного $t \in I$ існують $\theta, \theta' \in I$ такі, що

$$g_1(t) = \tau_2(\theta), \quad g_2(t) = \tau_1(\theta) = \tau_1^*(\theta'), \quad g_3(t) = \tau_3(\theta').$$

Оцінимо $\max_{t \in I} d(\gamma_2(g_1(t)), \gamma_3(g_3(t)))$. Цей максимум досягається для деякого $t_0 \in I$. Візьмемо $t', t'' \in I$ такі, що

$$g_1(t_0) = \tau_2(t'), \quad g_2(t_0) = \tau_1(t') = \tau_1^*(t''), \quad g_3(t_0) = \tau_3(t'').$$

Звідси

$$\rho((A_2, a_2), (A_3, a_3)) \le d(\gamma_2(g_1(t_0)), \gamma_3(g_3(t_0))) =$$

$$= d(\gamma_2(\tau_2(t')), \gamma_3(\tau_3(t''))) \le d(\gamma_2(\tau_2(t')),$$

$$\gamma_1(\tau_1(t'))) + d(\gamma_1(\tau_1^*(t''), \gamma_3(\tau_3(t''))) \le$$

$$\le \rho((A_1, a_1), (A_2, a_2)) + \rho((A_2, a_2), (A_3, a_3)) + c,$$

де $|c| < 2\varepsilon$. За довільністю ε одержуємо нерівність трикутника.

Нагадаємо /див., наприклад, у праці [2]/, що метрика Гаусдорфа d_H на просторі всіх непорожніх компактних підмножин в M задається формулою

$$d_H(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Метрика d_H не враховує орієнтованості дуг, тому порівноватимемо d_H і ϱ на підпросторі $\Gamma(M; m_0, m_1)$ орієнтованих дуг з фіксованим початком m_0 і кінцем m_1. Очевидно, що $d_H \le \varrho$. Наступний приклад свідчить, що, взагалі кажучи, $d_H < \varrho$.

Нехай $M = \mathbb{R}^2$, $m_0 = (0,0)$, $m_1 = (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Нехай дуга A_n є об"єднанням двох півкіл, що лежать у верхній півплощині, діаметрами яких є відрізки $[(0,0), ((n+1)/n, 0)]$, $[(1/n, 0), (1, 0)]$ та півкола у нижній півплощині, діаметром якого є відрізок $[(1/n, 0), ((n+1)/n, 0)]$. Нехай дуга B_n є об"єднанням двох півкіл, що лежать у верхній півплощині, діаметрами яких є відрізки $[(0,0), ((n-1)/n, 0)]$, $[(1/n, 0), ((n-1)/n, 0)]$ та півкола у нижній півплощині, діаметром якого є відрізок $[(1/n, 0), (1, 0)]$. Легко бачити, що $\lim d_H(A_n, B_n) = 0$, а водночас нескладні міркування показують, що числа $\rho(A_n, B_n)$ відокремлені від нуля додатною константою.

Наступну теорему подаємо без доведення.

Теорема 2. Топології, індуковані метриками ϱ і d_H, рівні на просторі $\Gamma(M; m_0, m_1)$.

Зауваження 1. Формула /ж/ нагадує формулу для відстані Морса, однак суть її цілком інша. Пропонуємо читачеві самому знайти геометричну інтерпретацію /ж/.

2. Слід зазначити, що, на відміну від метрики Гаусдорфа, метрика ϱ може бути поширена verbatim також на орієнтовані параметризовні криві. З огляду на викладене у праці [3] виникає така проблема.

Проблема. Описати топологію простору параметризовних дуг на поверхні. Як у цьому просторі лежить підпростір параметризовних дуг зі скінченним числом самоперетинів?

I. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 2. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М. : МГУ, 1988. 3. Cauty R. L'espace des arcs d'une surface // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 16. P. 18-21. 4. Eberhart C., Nadler S.B., Nowell W.O. Spaces of order arcs in hyperspaces // Fund. Math. 1981. Vol. 112. P. 111-120.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.94