УДК.515.12

О.Й.Ткач

ТОПОЛОГІЯ ПРОСТОРУ ЧАСТКОВИХ ПЕРЕРІЗІВ РОЗШАРУВАНЬ НАД КОНТИНУУМАМИ ПЕАНО

Через $\exp X$ позначається множина непорожніх замкнених підмножин топологічного простору X, а через $\exp_c X$ – множина компактних підмножин X. Топологію на $\exp X$, яка називається топологією В"єторіса, визначають базисні множини виду

$$O\langle U_1,\dots,U_n\rangle=\{A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i,\ \ A\cap U_1\neq\varnothing,\ \dots,\ A\cap U_n\neq\varnothing\},$$

де $U_1,\dots,U_n$ – відкриті множини в X [3]. Для метричного компакта X ця топологія збігається з топологією, породженою метрикою Гаусдорфа d_H, $d_H(A,B)=\inf\{\varepsilon>0\mid A\subset O_\varepsilon(B), B\subset O_\varepsilon(A)\}$, де $O_\varepsilon(A)$ – ε-окіл множини A в метриці простору X.

Частковим відображенням з топологічного простору X в топологічний простір Y називається неперервне відображення $s: A\to Y$, де $A\in\exp_c X$. За допомогою природного вкладення $s\longmapsto gr\,s$, $gr\,s=\{(x,y)\in X\times Y\mid x\in\mathcal{D}s,\ \ y=s(x)\}$, де $\mathcal{D}s$ – множина визначення відображення s, на просторі $C_{vc}(X,Y)$ часткових відображень з X в Y індукується топологія В"єторіса з $\exp(X\times Y)$.

Нехай $\xi=(X,p,B)$ – локально-тривіальне розшарування з шаром Y.

Часткове відображення $s\in C_{vc}(B,X)$ називається частковим перерізом розшарування ξ, якщо $ps=1_{\mathcal{D}s}$. Позначимо через $\Gamma_{vc}(\xi)$ множину всіх часткових перерізів розшарування ξ. Відображення $s\mapsto s(\mathcal{D}s)$ ін"єктивне. Розглядаючи його як вкладення $\Gamma_{vc}(\xi)$ в $\exp X$, індукуємо на $\Gamma_{vc}(\xi)$ топологію В"єторіса з $\exp X$. У випадку тривіального розшарування $\xi=(B\times Y,p,B)$ маємо $\Gamma_{vc}(\xi)=C_{vc}(B,Y)$.

Надалі вважатимемо, що $\xi=(X,p,B)$ – локально-тривіальне розшарування з шаром $Y\in ANR(\mathfrak{M})$, де B – континуум Пеано; X – компактний метричний простір.

<u>Лема 1</u>. Існують вкладення $\jmath: X\longrightarrow B\times Q$ і відображення $r: U\longrightarrow X$, де U – окіл множини $\jmath(X)$ в $B\times Q$, такі, що діаграми

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "p"'] & & B \times Q \arrow[dl, "p^r_B"] \\
& B &
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p^r_B|_U"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

комутативні і $rj = 1_X$. Через Q позначається гільбертовий куб.

<u>Доведення</u> випливає з локальної м"якості відображення p /докладніше у праці [4]/.

З леми I випливає, що без обмеження загальності можна вважати, що розшарування $\xi = (X, p, B)$ таке, що $X \subset B \times Q$, $p = p^r B|_X$, $\Gamma_{vc}(\xi) = \{s \in C_{vc}(B, Q) | \operatorname{gr} s \subset X\}$, існує відкрита множина U, $X \subset U \subset B \times Q$ і пошарова ретракція $r : U \longrightarrow X$, тобто така, що комутативна діаграма

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p^r_B"'] & & X \arrow[dl, "p^r_B"] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

Через $\tilde{\Gamma}_{vc}(\xi)$ позначимо поповнення $\Gamma_{vc}(\xi)$ в повному метричному просторі $\exp X$.

<u>Лема 2.</u> $\Gamma_{vc}(\xi)$ є G_δ -множиною в $\tilde{\Gamma}_{vc}(\xi)$.

<u>Доведення</u>. Позначимо через $\mathcal{A}_i = \{A \in \exp X | \exists\, b \in B : \operatorname{diam}(p^{-1}(b) \cap A) \geq \frac{1}{i}\}$. Легко бачити, що $\Gamma_{vc}(\xi) = \bigcap_{i=1}^{\infty} ((\exp X \setminus \mathcal{A}_i) \cap \tilde{\Gamma}_{vc}(\xi))$. Доведемо від супротивного, що $\mathcal{A}_i$ – замкнені в $\exp X$. Нехай $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_i$ така, що $\lim\limits_{j\to\infty} A_j = A \notin \mathcal{A}_i$. Позначимо через $b_j \in B$ таке, що $\operatorname{diam} c_j \geq \frac{1}{i}$, де $c_j = (p^{-1}(b_j) \cap A_j) \in \exp X$, $1 \leq j < \infty$.

Згідно з компактністю $\exp X$ виберемо з послідовності $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ збіжну підпослідовність $(c_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ і позначимо через $c = \lim\limits_{k\to\infty} c_{j_k}$. Тоді існує $b = \lim\limits_{k\to\infty} b_{j_k}$, де $b_{j_k} = p(c_{j_k})$. Легко бачити, що $c \subset A \cap p^{-1}(b)$ і $\operatorname{diam} c \geq \frac{1}{i}$, а отже, $A \in \mathcal{A}_i$. Ми одержали суперечність.

З леми 2 і теореми Александрова [3] випливає, що $\Gamma_{vc}(\xi) \in \mathfrak{M}_1$ /через $\mathfrak{M}_1$ позначається клас сепарабельних топологічних просторів, топологія яких задається деякою повною метрикою/.

Нагадаємо, що ймовірнісною мірою на компакті B називається неперервний невід"ємний функціонал μ на просторі $C(B, \mathbb{R})$, такий, що $\|\mu\| = 1$. Простір ймовірнісних мір $P(B)$, розглянутий у слабкій топології, є опуклим компактом в $\Pi\{\mathbb{R}_\varphi | \varphi \in C(B, \mathbb{R})\}$.

Простір B можна вкласти у $P(B)$, поставивши кожній точці $b \in B$ міру Дірака δ_b, зосереджену в цій точці.

Лема 3. Нехай E – передгільбертовий простір; $\exp^0 E$ – підпростір $\exp E$, який складається з опуклих компактів. Відображення $h: E \times \exp^0 E \longrightarrow E$ таке, що $h(x, A) = y$, де точка $y \in A$ реалізує відстань точки x до множини A, тобто $\|x - y\| = \inf_{z \in A} \|x - z\|$, – неперервне.

Доведення – у праці [2].

Теорема 1. Нехай $\xi = (X, p, B)$ – локально-тривіальне розшарування з шаром $Y \in ANR(\mathfrak{M})$, базою якого є континуум Пеано. Тоді $\Gamma_{vc}(\xi) \in ANR(\mathfrak{M})$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли ξ – тривіальне розшарування і $Y = I = [0,1]$. Тоді $\Gamma_{vc}(\xi) = C_{vc}(B, I)$.

Можна вважати, що $B \subset P(B) \subset E$, де E – деякий передгільбертовий простір.

Нехай $s \in C_{vc}(B, I)$, $A = \mathcal{D}s$. Справедливі такі вкладення:

$$\begin{array}{ccc} A & \subset & P(A) \\ \cap & & \cap \\ B & \subset & E \end{array},$$

причому $P(A)$ опуклий компакт в E.

Побудуємо продовження $\varphi(s)$ часткової функції s на простір B. Приймемо $\varphi(s)(b) = h(b, P(A))(s)$ для кожного $b \in B$. Якщо $b \in A$, то $h(b, P(A)) = b$, $\varphi(s)(b) = b(s) = \delta_b(s) = s(b)$, тобто $\varphi(s)|_{\mathcal{D}s} = s$.

З неперервності відображення h і функтора P в категорії компактів [8] випливає, що $\varphi(s) \in C(B, I)$ і відображення $\varphi: C_{vc}(B, I) \to C(B, I)$, $s \xrightarrow{\varphi} \varphi(s)$ – неперервне.

Означимо неперервне відображення $u: C_{vc}(B, I) \longrightarrow C(B, I) \times \exp B$, $u(s) = (\varphi(s), \mathcal{D}s)$. Легко бачити, що $v u = 1_{C_{vc}(B, I)}$, де $v: C(B, I) \times \exp B \longrightarrow C_{vc}(B, I)$, таке, що $v(f, A) = f|_A$. Отже, v є r-відображенням з добутку $C(B, I) \times \exp B$ в $C_{vc}(B, I)$. Оскільки $C(B, I) \times \exp B \in ANR$ [1,7], то $\Gamma_{vc}(\xi) = C_{vc}(B, I) \in ANR(\mathfrak{M})$.

Нехай ξ – тривіальне розшарування з шаром $Y = Q$, $s \in \Gamma_{vc}(\xi) = C_{vc}(B, Q)$. Тоді $s = (s_1, s_2, \dots)$, де $s_i \in C_{vc}(B, I)$. Позначимо через $u: C_{vc}(B, Q) \longrightarrow C(B, Q) \times \exp B$ таке відображення, що $u(s) = ((\varphi(s_1), \varphi(s_2), \dots), \mathcal{D}s)$, де φ – відображення продовження функцій з $C_{vc}(B, I)$, означене вище: $v: C(B, Q) \times \exp B \longrightarrow C_{vc}(B, Q)$, $v(f, A) = f/A$. Легко бачити, що $v u = 1_{C_{vc}(B, Q)}$. Аналогічно до попереднього випадку з цього випливає, що $\Gamma_{vc}(\xi) = C_{vc}(B, Q) \in ANR(\mathfrak{M})$.

Тепер нехай ξ – локально-тривіальне розшарування з шаром $Y \in ANR(\mathfrak{M})$. Легко бачити, що відображення $R: \langle v \rangle \cap C_{vc}(B, Q) \longrightarrow \Gamma_{vc}(\xi)$, таке, що $gr\, R(s) = r(gr\, s)$ є ретракцією, де $r: U \longrightarrow X$ – пошарова ретракція. Очевидно, що $\langle U\rangle \cap C_{UC}(B, \mathfrak{a}) \in ANR(\mathfrak{M})$ як відкрита підмножина $C_{UC}(B, \mathfrak{a})$. Тоді $\Gamma_{UC}(\xi) \in ANR(\mathfrak{M})$. Теорему доведено.

Наступна теорема випливає з теореми 1 і характеризаційної теореми Торуньчика для l_2-многовидів [6].

<u>Теорема 2</u>. Нехай $\xi = (X, p, B)$ – локально-тривіальне розшарування з шаром $Y \in ANR$. Тоді $\Gamma_{UC}(\xi)$ є l_2-многовидом.

На завершення зазначимо, що топологію простору повних перерізів ANR – розшарувань розглянув К.Сакаі [5]. Він довів, що такий простір є l_2-многовидом.

1. Б о р с у к К. Теория ретрактов. М.: Мир, 1971. 291 с. 2. Б у р б а к и Н. Топологические векторные пространства. М.: Изд. ин. лит., 1959. 401 с. 3. Ф е д о р ч у к В.В., Ф и л и п п о в В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд. МГУ, 1988. 252 с. 4. Ф е д о р ч у к В.В., Ч и г о г и д з е А.Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. М.: Наука, 1992. 232 с. 5. S a k a i K. The space of cross sections of a bundle // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 103, N3. P. 956-960. 6. T o r u ń c z y k H. Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds // Fund. Math. 1978. Vol. 101. P. 93-110. 7. W o j d y s l a w s k i M. Retracts absolus et hyperespaces des continus // Fund. Math. 1939. Vol. 32. P. 184-192. 8. Z a r i c h n y i M.M. On covariant topological functors, I // Quest. and Answ. Gen. Top. 1990. Vol. 8. N2. P. 317-369.

Стаття надійшла до редколегії 11.05.94

УДК 512.7/78

В.І.Андрійчук

ПРО ЕЛІПТИЧНІ КРИВІ З ВИРОДЖЕНОЮ РЕДУКЦІЄЮ

Нехай A – еліптична крива визначена над псевдолокальним полем k, тобто над повним щодо дискретного нормування полем k з псевдоскінченним [5] полем класів лишків $\varkappa$; A_k – група k-раціональних точок кривої A; $H^1(k, A)$ – група головних однорідних просторів кривої A над полем k.

У випадку локального основного поля k та абелевого многовиду A над k існує двосторонньо невироджений добуток Тейта-Шафаревича [4,7]:

$$H^1(k, A) \times A_k \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \qquad /1/$$