таке, що $gr\, R(s) = r(gr\, s)$ є ретракцією, де $r: U \longrightarrow X$ – пошарова ретракція. Очевидно, що $\langle U\rangle \cap C_{uc}(B, \mathcal{a}) \in ANR(\mathfrak{M})$ як відкрита підмножина $C_{uc}(B, \mathcal{a})$. Тоді $\Gamma_{uc}(\xi) \in ANR(\mathfrak{M})$. Теорему доведено.

Наступна теорема випливає з теореми 1 і характеризаційної теореми Торуньчика для l_2-многовидів [6].

<u>Теорема 2.</u> Нехай $\xi = (X, p, B)$ – локально-тривіальне розшарування з шаром $Y \in ANR$. Тоді $\Gamma_{uc}(\xi)$ є l_2-многовидом.

На завершення зазначимо, що топологію простору повних перерізів ANR – розшарувань розглянув К.Сакаі [5]. Він довів, що такий простір є l_2-многовидом.

1. Борсук К. Теория ретрактов. М.: Мир, 1971. 291 с. 2. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: Изд. ин. лит., 1959. 401 с. 3. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд. МГУ, 1988. 252 с. 4. Федорчук В.В., Чигогидзе А.Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. М.: Наука, 1992. 232 с. 5. Sakai K. The space of cross sections of a bundle // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 103, N3. P. 956-960. 6. Toruńczyk H. Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds // Fund. Math. 1978. Vol. 101. P. 93-110. 7. Wojdysławski M. Retracts absolus et hyperespaces des continus // Fund. Math. 1939. Vol. 32. P. 184-192. 8. Zarichnyi M.M. On covariant topological functors, I // Quest. and Answ. Gen. Top. 1990. Vol. 8. N2. P. 317-369.

Стаття надійшла до редколегії 11.05.94

УДК 512.7/78

В.І.Андрійчук

ПРО ЕЛІПТИЧНІ КРИВІ З ВИРОДЖЕНОЮ РЕДУКЦІЄЮ

Нехай A – еліптична крива визначена над псевдолокальним полем k, тобто над повним щодо дискретного нормування полем k з псевдоскінченним [5] полем класів лишків $\varkappa$; A_k – група k-раціональних точок кривої A; $H^1(k, A)$ – група головних однорідних просторів кривої A над полем k.

У випадку локального основного поля k та абелевого многовиду A над k існує двосторонньо невироджений добуток Тейта-Шафаревича [4,7]:

$$H^1(k, A) \times A_k \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \qquad /1/$$

© Андрійчук В.І., 1996

О.М.Введенський у праці [3] поставив задачу про пошук класу загальних локальних полів, над якими добуток Тейта-Шафаревича /1/ в еліптичних кривих невироджений зліва. Як виявилося, такий клас утворюють псевдолокальні поля. Наша робота продовжує дослідження невиродженості зліва добутку Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальними полями. Метою роботи є доведення такої теореми.

Теорема. Нехай еліптична крива A визначена над псевдолокальним полем k з полем лишків $\varkappa$ характеристики 2.

(i) Якщо A має тип (c_3) або (c_6) за Нероном [6], то добуток Тейта-Шафаревича /1/ невироджений зліва.

(ii) Якщо добуток Тейта-Шафаревича /1/ невироджений зліва для еліптичних кривих типів (c_2), (c_4) і (c_5) за Нероном, то він невироджений зліва для всіх еліптичних кривих з адитивною редукцією над полем k.

Доведення. Нехай $\mathcal{O}_k$ означає кільце цілих елементів поля k, U_k - група одиниць кільця $\mathcal{O}_k$, π - простий елемент поля k. Якщо l/k - розширення поля k, то відповідні об"єкти поля l позначаємо відповідно через $\mathcal{O}_l$, U_l і Π. Для $a \in \mathcal{O}_l$ $\bar{a}$ означає $a \pmod{\Pi}$.

Вейєрштрасове рівняння кривої A має вигляд

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6. \qquad /2/$$

Через $\Delta(A)$ будемо позначати дискримінант кривої A.

(i) Нехай крива A має тип (c_3) за Нероном. Тоді $a_i \in \pi\mathcal{O}_k$, $a_4, a_6 \in \pi^2\mathcal{O}_k$, $a_3^2 + 4a_6 \notin \pi^3\mathcal{O}_k$, отже, $a_3 \notin \pi^2\mathcal{O}_k$ Міркуємо за схемою, наведеною у праці [6], де досліджені криві типу (c_3) над псевдолокальними полями з полями лишків характеристики, більшої від 3.

Припустимо спочатку, що у полі k міститься первісний корінь ζ 3-го степеня з одиниці. Розглянемо розширення $l = k(\sqrt[3]{\pi})$. Над полем l крива A ізоморфна кривій B з невиродженою редукцією. Справді, розділивши рівняння /2/ кривої A на π^2, одержимо

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^2 + \frac{a_1}{\Pi}\cdot\frac{x}{\Pi^2}\cdot\frac{y}{\pi} + \frac{a_3}{\pi}\cdot\frac{y}{\pi} = \left(\frac{x}{\Pi^2}\right)^3 + \left(\frac{a_2}{\Pi^2}\right)\left(\frac{x}{\Pi^2}\right)^2 + \frac{a_4}{\Pi^4}\cdot\frac{x}{\Pi^2} + \frac{a_6}{\Pi^6},$$

де $\Pi = \sqrt[3]{\pi}$. Позначивши $x = \Pi^2 u$ і $y = \pi v$, одержимо, що рівняння кривої B над полем l має вигляд $v^2 + a_1'uv + a_3'v = u^3 + \ldots + a_6'$. Тут $a_i'\Pi^i = a_i$, $a_3' \in U_l$, $a_i' \in \Pi\mathcal{O}_l$ для $i = 1, 2, 4, 6$.

Редукція $\bar{B}$ кривої B є невиродженою, оскільки $\Delta(\bar{B}) = \bar{a}_3' \neq \bar{0}$. Ізоморфізм над полем ℓ кривих A і B визначає ізоморфізм $\mathfrak{g} = Gal(\ell/k)$ -модулів їх ℓ-раціональних точок

$$\alpha : A_\ell \longrightarrow B_\ell , \qquad /3/$$

де A_ℓ - $\mathfrak{g}$-модуль з природною дією; B_ℓ - $\mathfrak{g}$-модуль з наведеною дією групи $\mathfrak{g}$: для $\sigma \in \mathfrak{g}$

$$\sigma_{нав}(u, v) = (\zeta^2 \sigma u, \sigma v).$$

Розглянемо для кривої B точну послідовність редукції

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}(B_\ell) \longrightarrow B_\ell \longrightarrow \bar{B}_\varkappa \longrightarrow 0.$$

Ядро редукції $\mathcal{T}(B_\ell)$ є когомологічно $\mathfrak{g}$-тривіальним. Тому

$$H^i(\mathfrak{g}, A_\ell) \simeq H^i(\mathfrak{g}, B_\ell) \simeq H^i(\mathfrak{g}, \bar{B}_\varkappa), \ (i \in \mathbb{Z}).$$

Тут і далі через $H^i(\mathfrak{g}, X)$ позначаємо тейтові когомології Галуа $\mathfrak{g}$-модуля X.

Редукція $\bar{B}_\varkappa$ є $\mathfrak{g}$-модулем з наведеною за допомогою ізоморфізму /3/ дією групи $\mathfrak{g}$: $\sigma(\bar{u}, \bar{v}) = (\zeta^2 \bar{u}, \bar{v})$, де $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{B}_\varkappa$, $\bar{v}^2 + \bar{a}_3' \bar{v} = \bar{u}^3 + a_6'$.

Обчислимо групи $H^i(\mathfrak{g}, A_\ell)$, $i \in \mathbb{Z}$. Якщо рівняння

$$v^2 + \bar{a}_3' v + a_6' = 0 \qquad /4/$$

не має коренів в полі лишків поля ℓ, то $H^i(\mathfrak{g}, A_\ell) = H^i(\mathfrak{g}, \bar{B}_\varkappa) = 0$. У цьому випадку з діаграми з точними стрічками [7] /вертикальні гомоморфізми індуковані добутком Тейта-Шафаревича/

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H^1(\mathfrak{g}, A_\ell) & \longrightarrow & H^1(k, A) & \longrightarrow & H^1(\ell, A) & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \qquad /5/ \\ 0 \longrightarrow & H^0(\mathfrak{g}, A_\ell) & \longrightarrow & A_k^* & \longrightarrow & A_\ell^* & \end{array}$$

і з невиродженості зліва добутку Тейта-Шафаревича над полем ℓ [2] випливає його невиродженість зліва і над полем k.

Далі вважаємо, що рівняння /4/ має корені в полі лишків. Якщо $\sigma(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v})$, то $\bar{u} = \bar{0}$, а $\bar{v}$ -один з коренів рівняння /4/. Легко перевірити, що $N\mathfrak{g} \bar{B}_\varkappa$ складається лише з ∞ /нуль групи $\bar{B}_\varkappa$ /. Звідси випливає, що $H^0(\mathfrak{g}, \bar{B}_\varkappa) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Для обчислення групи $H^1(\mathfrak{g}, \bar{B}_\varkappa)$ зауважимо, що $Ker\, N\mathfrak{g} = \bar{B}_\varkappa$. Хочемо показати, що $H^1(\mathfrak{g}, \bar{B}_\varkappa) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, а це означає, що існує точка $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{B}_\varkappa$, така, що $(\bar{u}, \bar{v}) \notin (\sigma - 1) \bar{B}_\varkappa$ і

$3\bar{B}_{\varkappa} \subset (\sigma-1)\bar{B}_{\varkappa}$. Тепер легко зрозуміти, що твердження про те, що $H^1(\mathfrak{g}, \bar{B}_{\varkappa}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, можна сформулювати мовою першого порядку як властивість елементів поля лишків $\varkappa$. Використовуючи елементарну еквівалентність скінченних і псевдоскінченних полів [5] і той факт, що у випадку скінченного поля лишків групи $H^0(\mathfrak{g}, A_l)$ і $H^1(\mathfrak{g}, A_l)$ ізоморфні [7], одержуємо, що $H^1(\mathfrak{g}, A_l) \simeq H^0(\mathfrak{g}, A_l) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Залишається перевірити, що добуток Тейта-Шафаревича

$$H^1(\mathfrak{g}, A_l) \times H^0(\mathfrak{g}, A_l) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \qquad /6/$$

невироджений зліва. Представником нетривіального класу групи $H^1(\mathfrak{g}, A_l)$ є коцикл $f(\sigma) = (\Pi^2 z, \pi t)$, де $(\bar{z}, \bar{t}) \notin (\sigma-1)\bar{B}_{\varkappa}$. Нехай $a_k = (0, \pi a)$ - представник нетривіального класу групи $H^0(\mathfrak{g}, A_l)$. Міркуючи так само, як і у випадку $char\, \varkappa > 3$ /такі міркування наведені у праці [1], можемо сформулювати твердження про невиродженість добутку /6/ мовою першого порядку у вигляді деякої властивості поля лишків. Тому невиродженість зліва добутку у нашому випадку випливає з відповідного правильного твердження для еліптичних кривих над локальним полем.

Обмеження стосовно первісного кореня 3-го степеня з одиниці можна усунути, застосувавши ще раз діаграму /5/.

Аналогічно досліджується випадок кривих типу (c_6) за Нероном.

(ii) Друга частина теореми випливає з того, що криві типів (c_1) і (c_8) ізоморфні кривим типу (c_4), а крива типу (c_7) - кривій типу (c_2) над слабо розгалуженим розширенням l/k степеня 3. У всіх цих випадках потрібно застосувати діаграму /5/.

1. А н д р и й ч у к В.И. Об эллиптических кривых над псевдолакальными полями //Мат. сб. 1979. Т.110 /152/. № 1 /9/. С.88-101. 2. А н д р і й ч у к В.І. Про еліптичні криві над локальними та псевдолокальними полями з полями лишків характеристики 2 //Алгебра і топологія: Темат. збірник наук. праць. К.: ІСДО, 1993. С. 3-13. 3. В в е д е н с к и й О.Н. О локальных "полях классов" эллиптических кривых //Изв. АН СССР. Сер. математ. 1973. Т.37. С.20-88. 4. Ш а ф а р е в и ч И.Р. Группа главных однородных алгебраических многообразий //Докл. АН СССР, 1959. Т.124. № 1. С. 42-43. 5. A x J. The elementary theory of finite fields // Ann. Math., 1968. Vol 88. N2. P.239-271. 6. N e r o n A. Modeles minimaux des variétées abéliennes sur les corps locaux et globaux // Publ. Math. IHES. 1964. N21. P.1-128.

Стаття надійшла до редколегії 05.05.94