УДК 512.64

В.Р.Зеліско

СИНГУЛЯРНІ ДІЛЬНИКИ МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА

Основи теорії виділення з матричного многочлена

$$A(x)=\sum_{i=0}^{m} A_i x^{m-i},\ A_i \in M_n(\mathbb{C}),\ \det A(x) \not\equiv 0, \qquad /1/$$

регулярного множника, тобто зображення $A(x)$ у вигляді

$$A(x)=B(x)C(x), \qquad /2/$$

де $B(x)=\sum_{i=0}^{r} B_i x^{r-i}$, причому $\det B_0 \neq 0$, були розроблені у праці [2]. У даній роботі запропонований метод факторизації /2/ у випадку, коли дільник $B(x)$ – сингулярний, тобто $B(x)$ – неособливий матричний многочлен із виродженим старшим коефіцієнтом B_0.

Нехай $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}$ – деякий многочлен /зокрема $A(x)$ вигляду /1//. Тоді позначатимемо через $\tilde{f}(x)$ зворотний до $f(x)$ многочлен $\tilde{f}(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$. Якщо $\deg f(x)=m$, то, очевидно, $\tilde{f}(x)=x^m f(\frac{1}{x})$.

Нехай $A_k(x)$ і $\tilde{A}_k(x)$ – відповідні підматриці k-го порядку матриць $A(x)$ із /1/ і $\tilde{A}(x)$, $1 \le k \le n$.

<u>Твердження 1</u>. $\det A_k(x)=x^{S_k}\,\widetilde{\det A_k}(x)$, $0 \le S_k \le mk$.

<u>Доведення</u>. Якщо $\deg \det A_k(x)=\rho_k \le mk$, то

$$\det \tilde{A}_k(x)=x^{mk}\det A_k\left(\frac{1}{x}\right)=x^{mk-\rho_k}x^{\rho_k}\det A_k\left(\frac{1}{x}\right)=$$
$$=x^{mk-\rho_k}\,\widetilde{\det A_k}(x).$$

Узявши $S_k=mk-\rho_k$, бачимо, що твердження 1 доведене.

Нехай канонічна форма Сміта [1] матричного многочлена $A(x)$ має вигляд

$$D^A=\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\ldots,\varepsilon_n(x)), \qquad /3/$$

де $\varepsilon_i(x)=(x-\alpha_1)^{l_{1i}}\ldots(x-\alpha_t)^{l_{ti}}$, причому $0 \le l_{k1} \le \le l_{k2} \le \ldots \le l_{kn}$, $k=1,\ldots,t$. Вважатимемо, що у /3/ всі корені α_i не дорівнюють нулю, оскільки в разі потреби це завжди можна досягнути заміною змінної $x=y-\beta$, де β – довільне число, що відрізняється від скінченної кількості коренів α_i многочлена $\det A(x)$. Як відомо із [1], інваріантні многочлени $\varepsilon_i(x)$ визначаються через найбільші спільні дільники мінорів матриці $A(x)$, тому враховуючи твердження 1, одержуємо такий результат.

Твердження 2. Якщо форма Сміта матричного многочлена $A(x)$ має вигляд /3/, то формою Сміта матричного многочлена $\tilde{A}(x)$ є матриця

$$D^{\tilde{A}} = diag(\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(x), \ldots, \tilde{\tilde{\varepsilon}}_n(x)), \qquad /4/$$

де

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}_i(x) = x^{k_i}(x - \frac{1}{\alpha_1})^{l_{1i}} \ldots (x - \frac{1}{\alpha_t})^{l_{ti}},$$

$$0 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_n, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Зауважимо, що елементарні дільники x^{k_i} матричного многочлена $\tilde{A}(x)$ називають [1] нескінченними елементарними дільниками сингулярного матричного многочлена $A(x)$. Якщо ж $A(x)$ регулярний то, очевидно, всі k_i дорівнюють нулю. Крім цього, зважаючи на те, що згідно зі зробленим вище припущенням $\alpha_i \neq 0$, бачимо, що $\tilde{A}(x)$ регулярний матричний многочлен.

Твердження 3. Якщо для матричного многочлена /1/ справедливий розклад вигляду /1/, де $B(x)$ - деякий сингулярний матричний многочлен, то $\tilde{B}(x)\tilde{C}(x) = \tilde{A}(x)$ тоді і тільки тоді, коли

$$deg\, B(x) + deg\, C(x) = deg\, A(x). \qquad /5/$$

Доведення. Нехай у розкладі /2/: $deg\, B(x) = r$, $deg\, C(x) = S$. Тоді $\tilde{B}(x) = x^r B(\frac{1}{x})$, $\tilde{C}(x) = x^S C(\frac{1}{x})$. Якщо $A(x) = B(x)C(x)$ то

$$\tilde{B}(x)\tilde{C}(x) = x^{r+S} B(\frac{1}{x})C(\frac{1}{x}) = x^{r+S} A(\frac{1}{x}).$$

Отже, $\tilde{B}(x)\tilde{C}(x) = \tilde{A}(x)$ тоді і лише тоді, коли $r + S = deg\, A(x)$. Твердження 3 доведене.

Із тверджень 2 і 3, враховуючи те, що якщо для неособливого матричного многочлена $A(x)$ справедливий розклад /2/, то інваріантні многочлени матриць $B(x)$ і $C(x)$ ділять відповідні інваріантні многочлени $A(x)$ [2], одержуємо такий результат.

Твердження 4. Якщо сингулярний матричний многочлен $A(x)$ зображається у вигляді $A(x) = B(x)C(x)$, то нескінченні елементарні дільники матриці $A(x)$ діляться на відповідні елементарні дільники матриць $B(x)$ і $C(x)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова /5/.

На основі доведених тверджень і розробленої у праці [2] теорії виділення із матричного многочлена $A(x)$ регулярного множника одержуємо такий критерій виділення із $A(x)$ сингулярного множника

$B(x)$ за умови /5/ із наперед заданою системою інваріантних многочленів і нескінченних елементарних дільників.

Теорема. Нехай форму Сміта /3/ матричного многочлена $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$\mathcal{D}^A = diag(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\, diag(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)),$$

де $\varphi_i(x) = (x-\alpha_1)^{q_{1i}} \ldots (x-\alpha_t)^{q_{ti}}$,

$$0 \le q_{k1} \le q_{k2} \le \ldots \le q_{kn}, \quad k = 1, \ldots, t,$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} deg\ \varphi_i(x) = S < mn.$$

Для того щоб матричний многочлен /I/ міг бути зображений у вигляді

$$A(x) = B(x)\, C(x), \qquad /6/$$

де $B(x)$ – сингулярний матричний многочлен степеня r з формою Сміта $diag(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ і нескінченними елементарними дільниками $x^{l_1}, \ldots, x^{l_n}$, $0 \le l_1 \le l_2 \le \ldots \le l_n$, необхідно і достатньо, щоб із зворотного матричного многочлена $\widetilde{A}(x)$ виділявся регулярний множник степеня r з формою Сміта

$$diag\left(x^{l_1}(x-\frac{1}{\alpha_1})^{q_{11}} \ldots (x-\frac{1}{\alpha_t})^{q_{t1}}, \ldots, x^{l_n}(x-\frac{1}{\alpha_1})^{q_{1n}} \ldots (x-\frac{1}{\alpha_t})^{q_{tn}}\right).$$

Зауваження. I. Як наслідок з теореми одержуються умови і метод розкладу матриці $A(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ у вигляді $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x), C(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ і

$$deg\ B(x) + deg\ C(x) = deg\ A(x).$$

2. Використовуючи результати із [2], можна дослідити питання про єдиність розкладу /6/ і метод його фактичної побудови.

I. Г а н т м а х е р Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, I988.
2. К а з і м і р с ь к и й П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К.: Наук. думка, I98I.

Стаття надійшла до редколегії I2.05.94