УДК 512.552.12

А.І.Гаталевич

ПРО АДЕКВАТНІ ПРАВІ ДУО-КІЛЬЦЯ

У даній статті вивчаються адекватні кільця за допомогою поняття адекватного елемента. Основний результат підтверджує, що права дуо-область Безу адекватна справа тоді і тільки тоді, коли її довільний ненульовий простий ідеал містить хоча б один адекватний справа елемент. Доведено також, що адекватна справа дуо-область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є лівою дуо-областю. Ці результати є узагальненням уже відомих, які наведені у праці [2].

Під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце з одиницею. Правим дуо-кільцем називаємо кільце, в якому довільний правий ідеал є двостороннім. Скажімо, матриця A з елементами кільця R має діагональну редукцію, якщо існують такі зворотні матриці P і Q відповідних розмірів з елементами кільця, що виконується

$$PAQ = \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & & \varepsilon_n \end{bmatrix}\right), \text{ де } R\varepsilon_{i+1}R \subset \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i. \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Якщо над кільцем R довільна матриця має діагональну редукцію, тоді кільце R називають кільцем елементарних дільників. Позначимо через $U(R)$ групу одиниць кільця R. Назвемо ненульовий елемент a кільця R адекватним справа, якщо для кожного ненульового елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи r, $s \in R$, що 1/ $a = rs$; 2/ $rR + bR = R$; 3/ для будь-якого $s' \in R$ з включення $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що ідеал $s'R + bR$ властивий.

Кільце, в якому кожний ненульовий елемент є адекватним справа називається адекватним справа.

Назвемо властивий правий ідеал кільця адекватним справа, якщо він містить хоча б один адекватний справа елемент.

У протилежному випадку правий ідеал називається неадекватним. Для неадекватних ідеалів на підставі леми Цорна справедливий такий результат.

© Гаталевич А.І., 1996

Довільний неадекватний правий ідеал міститься хоча б в одному максимально неадекватному правому ідеалі.

Позначимо через $A_r(R)$ множину всіх адекватних справа елементів кільця R .

Твердження I. Кожний максимально неадекватний правий ідеал P правої дуо-області R є простим ідеалом.

Доведення. Поведемо його від супротивного. Нехай існують такі елементи $a, b \in R \setminus P$, що $ab \in P$. Розглянемо ідеал $P + aR$. Оскільки $a \notin P$ і P максимально неадекватний ідеал, то існує такий елемент $c \in A_r(R)$, що $c \in P + aR$. Розглянемо ідеал $I = \{x / cx \in P\}$. Очевидно, що $P \subseteq I$, причому $I \neq P$, оскільки $b \in I$ і $b \notin P$. Отже, існує такий елемент $d \in A_r(R)$, що $d \in I$. Із визначення ідеалу I випливає, що $cd \in P$, тобто ідеал P містить добуток двох адекватних справа елементів. Доведемо, що cd-адекватний справа елемент. Нехай k -довільний ненульовий елемент кільця R . Існують $r, m, t, l \in R$, для яких $c = rm$, $d = tl$ і $rR + kR = R$, для довільного m' з умови $mR \subset m'R \neq R$ випливає $m'R + kR \neq R$, $tR + kR = Rm$, для довільного l' з умови $lR \subset l'R \neq R$ випливає $l'r + kR \neq R$. Маємо $cd = rmtl$, $mt = ta$, $a \in R$, оскільки R - праве дуо-кільце, $cd = rtal$.

Доведемо, що $rtR + kR = R$. Нехай $rtR + kR = hR$, тоді $rt = hr_0$, $k = hk_0$, $r_0, k_0 \in R$. Оскільки $rR + kR = R$, тоді $rR + hR = R$. Звідси $ru + hv = 1$, $u, v \in R$, $rut + hvt = t$, $rtu' + htv' = t$, $u', v' \in R$. Тоді $hr_0u' + htv' = t$, $tR \subset hR$. Оскільки $tR + kR = R$, то звідси випливає, що $rtR + kR = R$.

Тепер доведемо, що $mR + tR = R$. Припустимо, що $mR + tR = hR$. З включення $tR \subset hR$ випливає $hR + kR = R$.

З іншого боку, $mR \subset hR \neq R$ і $hR + kR \neq R$. Звідси випливає, що $h \in U(R)$.

Доведемо, що $aR = mR$. $mR + tR = R$ і $mt = ta$, існують $u, v \in R$, що $mu + tv = 1$, $mua + tva = a$, $mau' + tav' = a$, $mau' + mtv' = a$. Отже, $mx = a$ і звідси випливає $aR \subset mR$. З включення $Rm \subset mR$ випливає $tm = mz$, $mt = ta = tmx = mzx$, $t = zx$, $muz + tvz = z$, $u', v' \in R$, $mu + tv = tmu' + tzv' = z$. Таким чином, $ty = z$.

Маємо $t = zx$ і $ty = z$. Звідси випливає $xy = 1, x \in U(R)$ і $aR \supset mR$.

Отже, $aR = mR$ і для довільного a' із включення $aR \subset a'R \neq R$ випливає $a'R + kR \neq R$. Таким чином, $cd \in A_r(R)$. Доведемо, що ідеал P містить деякий адекватний справа елемент, що суперечить попередньому припущенню. Твердження справедливе також у випадку, коли R ліва дуо-область.

Нехай R – права дуо-область.

Твердження 2. В області R будь-який лівий дільник адекватного справа елемента адекватний справа.

Доведення. Нехай $a \in A_r(R)$ і $a = dx$, $x \in R$, $d \in R$. Для кожного існують r, $m \in R$, що $a = rm$, $rR + cR = R$ і з умови $mR \subseteq m'R \neq R$ випливає $m'R + cR \neq R$. Нехай $dR + rR = hR$.

Тоді $hd_0u + hr_0v = h$, $d = hd_0$, $r = hr_0$, $d_0, r_0, u, v \in R$. $h(1 - d_0u - r_0v) = 0$, $d_0u + r_0v = 1$, $d_0um + r_0vm = m$, $d_0mu' + r_0mv' = m$, оскільки R – права дуо-область, $u', v' \in R$. Оскільки $dx = rm$, тоді $d_0x = r_0m$.

Звідси випливає $mR \subset d_0R$, $d_0y = m$, $y \in R$. Якщо тепер $d_0R \subseteq d_0'R \neq R$, то d_0 можна взяти як m' і отримати $d_0'R + cR \neq R$. Враховуючи $hr + cR = R$, бачимо, що розкладення $d = hd_0$ має властивості, описані у визначенні адекватного елемента.

Правильне також таке твердження.

Твердження 2'. У лівій дуо-області Безу будь-який правий дільник адекватного зліва елемента адекватний зліва.

Теорема I. Права /ліва/ дуо-область Безу адекватна справа /зліва/ тоді і тільки тоді, коли довільний її ненульовий простий ідеал містить хоча б один адекватний справа /зліва/ елемент.

Доведення. Дамо його для правої дуо-області Безу. Припустимо, що в R існують неадекватні елементи, а кожний ненульовий простий ідеал містить принаймні один адекватний справа елемент. Нехай a – ненульовий неадекватний елемент. Якщо ідеал aR містить адекватний справа елемент $b \in R$, то $b = ax$, $x \in R$. Ненульовий неадекватний елемент a буде адекватним справа як лівий дільник елемента b. Отже, aR не містить жодного адекватного справа елемента. Згідно з твердженням I, ідеал aR міститься в деякому максимально неадекватному ідеалі P. З твердження 2 випливає, що P – простий ідеал.

Таким чином, P містить деякий адекватний справа елемент, що суперечить неадекватності ідеалу P. Звідси випливає, що в кільці R немає ненульових неадекватних елементів.

Обернена імплікація очевидна.

Прикладом адекватного справа правого дуо-кільця може служити праве дуо ланцюгове справа кільце.

Нехай $a \neq 0$. Для довільного $b \in R$ маємо $aR \subset bR$, або $bR \subset aR$.

I. Якщо $aR \subset bR$, тоді $a = bx$, $x \in R$. Нехай існує $a' \notin U(R)$ такий, що $aR \subset a'R$, але $a'R + bR = R$. Унаслідок локальності R і того, що $a' \notin U(R)$ випливає, що $b \in R$. Тобто a – адекватний справа до елемента b.

2. Якщо $bR \subset aR$, тоді $b = ax$ і $a = 1a$, $R + bR = R$, $a'R + bR = a'R \neq R$, для довільного $a' \in R$ такого, що $aR \subset a'R \neq R$.

<u>Теорема 2</u>. Адекватна справа права дуо-область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є лівою дуо-областю.

<u>Доведення.</u> Необхідність відразу випливає з [1].

Достатність: на основі результатів [3], [4] достатньо довести, що матриця $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ має діагональну редукцію, де $aR+bR+cR=R$. Нехай $c=rs$, де $rR+aR=R$ і з умови $sR\subset s'R\neq R$ випливає $s'R+aR\neq R$.

$$\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+rb & rc \\ * & * \end{bmatrix},$$

де $\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ – зворотна матриця.

Доведемо, що $(a+rb)R+rcR=R$.

Припустимо, що $(a+rb)R+rcR=hR$, $h\notin U(R)$.

1. $rc=rrs$, $rR+hR=h'R$, $(a+rb)R\subset h'R$. Звідси випливає, що $a\in h'R$ і $aR\subset h'R$. Отримуємо протиріччя з $R=rR+aR\subset h'R+aR\neq R$.

2. Оскільки $rR+hR=R$, тоді $r^2R+hR=R$, $r^2u+hv=1$, $r^2us+hvs=s$, $r^2sv'+hsv'=s$, $u,v,u',v'\in R$.

Звідси $sR\subset hR$.

Маємо $hR+aR=h'R$, де $h'\notin U(R)$.

$a=h'a'$, $(a+rb)R=h'R$, $rbR\subset h'R$, $R=rR+aR=rR+h'R$, $bR\subset h'R$, $aR\subset h'R$, $cR\subset h'R$.

Отримуємо $R=aR+bR+cR=h'R$ і звідси випливає, що $h'\in U(R)$.

1. Забавский Б.В., Комарницкий М.Я. Дистрибутивные области с элементарными делителями //Укр.мат. журн. 1990. Т.42. С. 1000-1004. 2. Забавський Б.В., Комарницький М.Я. Про адекватні кільця //Вісн. Львів. ун-ту. 1988. Вип.30. С. 39-43. 3. Забавский Б.В. О некоммутативных кольцах с элементарными делителями //Укр. мат. журн. 1990. Т.42. С.847-850. 4. *Kaplansky I. Elementary divisors and modules*// *Trans. Amer. Math. Soc.* 1949. Vol.66. P.464-491.

Стаття надійшла до редколегії 16.05.94