УДК 517.53

О.Г.Орищин

АНАЛОГИ ТЕОРЕМИ ВІМАНА ДЛЯ ЦІЛОГО КРАТНОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай $F(z)$ – ціла функція, представлена абсолютно збіжним у $\mathbb{C}^p$ кратним рядом Діріхле:

$$F(z)=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_n \exp\{<z, \lambda_n>\}, \qquad /1/$$

де $n=(n_1, \dots, n_p)$, $\|n\|=n_1+\dots+n_p$, $a_n=a_{n_1,\dots,n_p}\in\mathbb{C}$, $z=(z_1,\dots,z_p)$, $z=\sigma+it=(\sigma_1+it_1,\dots,\sigma_p+it_p)$, $\lambda_n=(\lambda^{(1)}_{n_1},\dots,\lambda^{(p)}_{n_p})$, $0\le\lambda^{(j)}_{n_j}\longrightarrow+\infty$, $(n_j\longrightarrow+\infty)$, $j=1,\dots p$; $<z,\lambda_n>=z_1\lambda^{(1)}_{n_1}+\dots+z_p\lambda^{(p)}_{n_p}$. Через $S_p(\Lambda)$ позначимо клас усіх функцій виду /1/.

Якщо $\{G(r,a)\}_{r\ge0}$ система a-подібних полілінійних областей $(a=(a_1,\dots,a_p)\in\mathbb{R}^p)$, яка є вичерпанням $\mathbb{C}^p$, тобто $\bar G(r_1,a)\subset G(r_2,a)$ для $r_1<r_2$ і $\bigcup_{r\ge0}G(r,a)=\mathbb{C}^p$ /означення системи a-подібних полілінійних областей [3, с. 301]/, а $G_c(r,a)$ – образ $G(r,a)$ в $\mathbb{R}^p$ при відображенні $W=\operatorname{Re} z$, то для функції $F\in S_p(\Lambda)$ приймемо $S_F(r,a)=\sup\{|F(z)|: z\in G(r,a)\}$. Оскільки $S_F(r,a)$ – опукла функція при $r\ge0$ [3, с. 302], то у неї всюди існує правостороння похідна. Тому позначимо $L_F(r,a)=(\ln S_F(r,a))'_+$. У праці [3, с. 302], по суті, доведене твердження, яке ми сформулюємо для класу $S_p(\Lambda)$.

<u>Теорема 1</u>. Нехай $F\in S_p(\Lambda)$ і $a\in(\mathbb{R}^0_+)^p$ таке, що $L_F(r,a)\nearrow+\infty$ $(r\longrightarrow+\infty)$. Тоді знайдеться така множина $E\subset\mathbb{R}_+$ – скінченної міри, що для всіх $r\in\mathbb{R}_+\setminus E$

$$F(W+a\eta)=(1+\omega(\eta))F(W)\exp\{\eta L_F(r,a)\},$$

де $|\omega(\eta)|<\eta(L_F(r,a)\ln^{1+\alpha}L_F(r,a))^{1/2}$, $\alpha>0$, точка $W\in\partial G(r,a)$ така, що $|F(W)|\ge L_F^{-\beta(r)}(r,a)\,S_F(r,a)$; $\beta(r)$ – довільна функція така, що $0\le\beta(r)\le q<\frac{1}{2}$.

Скориставшись міркуваннями [2, лема 3] і застосувавши теорему 1, отримаємо аналог класичної теореми Вімана.

Теорема 2. Нехай $F \in S_p(\Lambda)$ і $a \in (\mathbb{R}^o_+)^p$ таке, що $L_F(r,a) \uparrow +\infty$, $r \longrightarrow +\infty$. Тоді співвідношення

$$B_F(r,a) = \sup\{\operatorname{Re} F(z) : z \in \partial G(r,a)\} = (1+o(1))\, S_F(r,a)$$

та

$$A_F(r,a) = \inf\{\operatorname{Re} F(z) : z \in \partial G(r,a)\} = -(1+o(1))\, S_F(r,a)$$

справджуються при $r \longrightarrow +\infty$ $(r \in \mathbb{R}_+ \setminus E,\ E$ – скінченної міри/.

Доведення. Приймемо спочатку $\eta = i(\pi - \arg F(z))/L_F(r,a)$.
За теоремою I при $r \longrightarrow +\infty$ $(r \in \mathbb{R}_+ \setminus E)$ маємо

$$|\omega(\eta)| \le (\pi - \arg F(z))(L_F(r,a) \ln^{1+\alpha} L_F(r,a))^{1/2}/L_F(r,a) \le$$

$$\le \pi(\ln^{1+\alpha} L_F(r,a)/L_F(r,a))^{1/2} = o(1), \quad \alpha > 0$$

і $\quad F(z + a\eta) = (1+o(1))|F(z)| \exp\{i\pi\} = -(1+o(1))|F(z)|$.
Врахувавши, що точка $z \in \partial G(r,a)$ така, що $|F(z)| \ge L_F^{-\beta(r)}(r,a) \times$ $\times S_F(r,a)$, де $\beta(r)$ – довільна функція така, що $0 \le \beta(r) \le q < \frac{1}{2}$ і $F(z + a\eta) \ge \operatorname{Re} F(z + a\eta) \ge A_F(r,a)$, отримаємо

$$A_F(r,a) \le -(1+o(1))\, S_F(r,a)/L_F^{\beta(r)}(r,a).$$

Оберемо $\beta(r)$ так, що $L_F^{-\beta(r)}(r,a) = 1 + o/1/$, для цього достатньо взяти $\beta(r) = \ln L_F(r,a)^{-3/2}$. Звідси негайно одержимо $A_F(r,a) \le -(1+o(1))S_F(r,a)$, що разом з нерівністю $|A_F(r,a)| \le S_F(r,a)$ доводить друге співвідношення теореми 2.

Прийнявши тепер $\eta = -i \arg F(z)/L_F(r,a)$ і застосувавши теорему I, отримаємо $F(z + a\eta) = (1+o(1))|F(z)|$ при $r \longrightarrow +\infty$, $r \in \mathbb{R}_+ \setminus E$, тобто $S_F(r,a) \ge B_F(r,a) = \sup\{\operatorname{Re} F(z) : z \in \partial G(r,a)\} \ge$ $\ge \operatorname{Re} F(z + a\eta) = (1+o(1))|F(z)| \ge (1+o(1))\, S_F(r,a)/L_F^{\beta(r)}(r,a)$ при $r \longrightarrow +\infty, r \in \mathbb{R}_+ \setminus E$. Остання нерівність з $\beta(r) = (\ln L_F(r,a))^{-3/2}$ повністю доводить теорему 2.

Конусом зростання максимального члена $\mu(\sigma, F)$ ряду /I/ називаємо конус

$$\gamma_F = \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{t \to +\infty} (\ln \mu(\sigma t, F)/t) = +\infty\}$$

/див., наприклад, [I]/.

Твердження. Для функції $F \in S_p(\Lambda)$ $L_F(r,a) \uparrow +\infty$ $(r \longrightarrow +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли $a \in \gamma_F$.

Доведення. Покажемо спочатку, що якщо $a \in \gamma_F$, то $L_F(r,a) \uparrow +\infty$ $/r \longrightarrow +\infty/$. Справді, оскільки $L_F(r,a)$ – неспадна функція

від r, то з припущення, що умова $L_F(r,a)\nearrow+\infty$ $(r\longrightarrow+\infty)$ не виконується, послідовно виводимо $L_F(r,a)=O(1)$ $(r\longrightarrow+\infty)$ і $\ln S_F(r,a)=O(r)$ $(r\longrightarrow+\infty)$. Зауважимо тепер, що [3, с. 302]
$S_F(r,a)=\sup\{|F(z)|: z\in G_c(r,a)\}=\sup\{\sup\{|F(t+$
$+a\tau)|: \operatorname{Re}\tau=r\}: z\in G_c(0,a)\}$, а також [3, с. 353]
$\max\{|a_m|\exp\{<\sigma,\lambda_m>\}: \sigma\in\partial G_c(r,a)\}=d_m(G)|a_m|\exp\{r<a,\lambda_m>\}$,
де $\ln d_m(G)=\sup\{<z,\lambda_m>: z\in G(0,a)\}$. Тому з нерівності Коші $\mu(\sigma,F)\le M(\sigma,F)$ при фіксованому $m\in\mathbb{Z}^p_F$ маємо
$|a_m|d_m(G)\exp\{r<a,\lambda_m>\}\le\sup\{M(\sigma,F):\sigma\in\partial G_c(r,a)\}\le S_F(r,a)$.
Звідси, якщо $a_m\ne 0$, негайно одержуємо

$$<a,\lambda_m>\le \ln S_F(r,a)/r+O(1)=O(1),\ (r\longrightarrow+\infty),$$

що неможливо, оскільки $a\in\gamma_{F_\rho}$, і тому

$$\sup\{<a,\lambda_m>: m\in\mathbb{Z}^p_+\}=+\infty.$$

Отже, припущення, зроблене на початку доведення, не правильне і $L_F(r,a)\nearrow+\infty$ $(r\longrightarrow+\infty)$ для кожного $a\in\gamma_F$. З іншого боку, оскільки

$$S_F(r,a)\le\sum_{\|n\|=0}^{\infty}|a_n|\exp\{\sup\{<\operatorname{Re} z,\lambda_n>: z\in G(r,a)\}\le$$
$$\le\sum_{\|n\|=0}^{\infty}|a_n|d_n(G)\exp\{r<a,\lambda_n>\}\le\sum_{\|n\|=0}^{\infty}|a_n|d_n(G)\times$$
$$\times\exp\{r\sup\{<a,\lambda_n>: n\in\mathbf{Z}^p_+\}\},$$

то враховуючи, що з умови $L_F(r,a)\nearrow+\infty$ $(r\longrightarrow+\infty)$ випливає $\ln S_F(r,a)/r\longrightarrow+\infty$ $(r\to+\infty)$, негайно одержуємо $\sup\{<a,\lambda_n>: n\in\mathbb{Z}^p_+\}=+\infty$, тобто $a\in\gamma_F$.

У зв"язку з доведеним твердженням висловимо таке припущення, правильність якого потребує доведення.

Припущення. Твердження теорем 1 та 2 справедливі для всіх $a\in\gamma_F$.

На основі розвитку методу типу Вімана-Валірона для цілих кратних рядів Діріхле можна довести таке твердження.

Теорема 3. Нехай для функції $F\in S_p(\Lambda)$ виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\lambda_k^{(j)}}<+\infty\quad(\forall_j=\overline{1,p}). \qquad /2/$$

Тоді співвідношення
$B(\sigma,F)=\sup\{\operatorname{Re}F(\sigma+it): t\in\mathbb{R}^p\}=(1+o(1))M(\sigma,F)$

та
$$A(\sigma, F) = \inf\{\operatorname{Re} F(\sigma + it) : t \in \mathbb{R}^p\} = -(1+o(1))M(\sigma, F)$$

виконуються при $|\sigma| \to +\infty, \sigma \in \overline{K} \setminus E$, K – довільний конус з вершиною в початку координат, такий, що $\overline{K} \setminus \{0\} \subset \gamma_F$; $E \subset \mathbb{R}^p$ – множина виняткових значень, міра Лебега перетину якої з множиною S_R має оцінку
$$\operatorname{meas}_p \{E \cap S_R\} \le A(2R)^{p-1}.$$

Тут S_R – циліндр, який є образом $(p-1)$–вимірного циліндра $S'_R = \{x' = (x'_1, \dots, x'_p) \in \mathbb{R}^p : (x'_2)^2 + \dots + (x'_p)^2 \le R^2\}$ при повороті навколо початку координат, при якому додатна піввісь переходить у промінь $\xi = \{x = (x_1, \dots, x_p) : x_1 = x_2 = \dots = x_p\}$. Однак довести цю теорему плануємо в окремій статті.

1. Гречанюк М.Й. Конуси росту цілих кратних рядів Діріхле //Доп. АН УРСР. Сер. А. 1991. № 9. С. 19–25. 2. Скаськив О.Б. Обобщение малой теоремы Пикара //Теория функций и функц. анализа и их приложения. Харьков. 1986. Т.46. С. 90–100. 3. Стрелиц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Вильнюс: Минтис, 1972. 468 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.94

УДК 517.535

О.Б.Скасків

ПРО ЦЕНТРАЛЬНИЙ ПОКАЗНИК АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай $H(\Lambda)$ – клас аналітичних у півплощині $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ функцій F, що зображаються абсолютно збіжними у цій півплощині рядами Діріхле:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty \; (1 \le n \to +\infty), \qquad /1/$$

де $\Lambda = (\lambda_n)$. Позначимо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \ge 0\}$ і $\nu(\sigma) = \max\{n : |a_n| e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$. Відомо, що $\ln M(\sigma, F)$ – опукла функція [4,6], тому її похідна справа існує для всіх $\sigma < 0$, позначимо її $L(\sigma) = (\ln M(\sigma, F))'_+$.