та

$$A(\sigma, F) = \inf\{\operatorname{Re} F(\sigma+it) : t\in\mathbb{R}^p\} = -(1+o(1))M(\sigma, F)$$

виконуються при $|\sigma|\to+\infty$, $\sigma\in\overline{K}\setminus E$, K – довільний конус з вершиною в початку координат, такий, що $\overline{K}\setminus\{0\}\subset\gamma_F$; $E\subset\mathbb{R}^p$ – множина винятковних значень, міра Лебега перетину якої з множиною S_R має оцінку

$$meas_p\{E\cap S_R\}\le A(2R)^{p-1}.$$

Тут S_R – циліндр, який є образом $(p-1)$ – вимірного циліндра $S'_R = \{x'=(x'_1,\dots,x'_p)\in\mathbb{R}^p : (x'_2)^2+\dots+(x'_p)^2\le R^2\}$ при повороті навколо початку координат, при якому додатна піввісь переходить у промінь $\xi=\{x=(x_1,\dots,x_p): x_1=x_2=\dots=x_p\}$. Однак довести цю теорему плануємо в окремій статті.

1. Г р е ч а н ю к М.Й. Конуси росту цілих кратних рядів Діріхле //Доп. АН УРСР. Сер. А. 1991. № 9. С. 19–25. 2. С к а с к и в О.Б. Обобщение малой теоремы Пикара //Теория функций и функц. анализа и их приложения. Харьков. 1986. Т.46. С. 90–100. 3. С т р е л и ц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Вильнюс: Минтис, 1972. 468 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.94

УДК 517.535

О.Б.Скаскiв

ПРО ЦЕНТРАЛЬНИЙ ПОКАЗНИК АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай $H(\Lambda)$ – клас аналітичних у півплощині $\{z : \operatorname{Re} z<0\}$ функцій F, що зображаються абсолютно збіжними у цій півплощині рядами Діріхле:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad 0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty\ (1\le n\to+\infty), \qquad /1/$$

де $\Lambda=(\lambda_n)$. Позначимо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)| : t\in\mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n\ge 0\}$ і $\nu(\sigma)=\max\{n : |a_n|e^{\sigma\lambda_n}=\mu(\sigma,F)\}$. Відомо, що $\ln M(\sigma,F)$ – опукла функція [4,6], тому її похідна справа існує для всіх $\sigma<0$, позначимо її $L(\sigma)=(\ln M(\sigma,F))'_+$.

Одним із центральних питань в теорії Вімана-Валірона є з"ясування умов, достатніх для справедливості співвідношення

$$L(\sigma) = (1+o(1))\lambda_{\nu(\sigma)} \qquad /2/$$

при $\sigma \to -0$ зовні виняткової множини. У працях [1,4] наведена ціла низка таких тверджень. Однак, як бачимо в замітці [3], теореми 1.5.25 і 1.6.25 [4, с. 285-287], а також теорема 5 [1] /тобто, всі твердження, що стосуються співвідношення /3/в описаній ситуації/ неправильні.

У цій статті вкажемо на те, якого типу умови забезпечують справедливість співвідношення /2/. Справджується наступна теорема.

Теорема. Нехай для функції $F \in H(\Lambda)$ виконуються умови

$$(\exists \varrho > 1): \varliminf_{\sigma \to -0} |\sigma|^{\varrho} \ln \mu(\sigma, F) > 0,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n^{1/(1+\varrho)} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k \lambda_k} = 0.$$

Тоді співвідношення /2/ виконується при $\sigma \to -0 (\sigma \in [-1;0) \setminus E)$, E - множина нижньої нульової щільності в точці $\sigma = 0$, тобто

$$dE \stackrel{\text{def}}{=} \varliminf_{\sigma \to -0} \frac{1}{|\sigma|} \operatorname{meas}(E \cap [\sigma, 0)) = 0.$$

Доведення теореми спирається на лему, яка є простим наслідком леми 1 [2].

Лема 1. При виконанні умов теореми знайдеться функція $C(t) \nearrow +\infty (t \to +\infty)$ і множина $E(dE = 0)$, такі, що для всіх $n \geq 0$ і всіх $\sigma \in [-1; 0) \setminus E$

$$|a_n| e^{\sigma \lambda_n} \leq \mu(\sigma, F) \exp\left\{-\int_{\lambda_{\nu(\sigma)}}^{\lambda_n} (\lambda_n - t) t^{-2} C(t) \ln n(4t)\, dt\right\}, \qquad /3/$$

$$n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1.$$

Використовуючи співвідношення /3/, подібно як і в [5], встановлюємо, що

$$F'(s) = \lambda_{\nu(\sigma)} (1 + o(1)) F(s) \qquad /4/$$

при $\sigma \to -0 (\sigma \notin E, dE = 0$ для всіх s, таких, що

$$\operatorname{Re} s = \sigma, |F(s)| = (1 + o(1)) M(\sigma, F) (\sigma \to +\infty). \qquad /5/$$

Залишилось скористатись лемою, що є наслідком теореми 2.2.25 [4, с. 274].

Лема 2. Нехай $F \in H(\Lambda)$. Якщо $\lambda = \varliminf_{\sigma \to -0} \ln L(\sigma)/\ln \frac{1}{|\sigma|} > 1$, то співвідношення /4/ справджується при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E_1$ - скінченної логарифмічної міри, тобто $\int_{E_1 \cap [-1;0)} \frac{1}{|\sigma|} d\sigma < +\infty$) для всіх s таких, що виконується умова /5/.

Зауважимо тепер, що при виконанні умов теореми $\lambda \geq \varrho > 1$, тому скориставшись лемами I і 2, одержимо, що співвідношення /2/ справджується при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E \cup E_1$). Для завершення доведення теореми залишилось зауважити, що

$$\int_{E_1 \cap [-R,0)} \frac{1}{|\sigma|} d\sigma \geq \frac{1}{R} \operatorname{meas}(E_1 \cap [-R;0))$$

і тому

$$d(E \cup E_1) = 0.$$

I. Д а г е н е Е. О центральном показателе ряда Дирихле // Лит. мат. сб. I968. Т.8. № 3. С. 503-520. 2. С к а с к и в О.Б. К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции //Изв. АН СССР. Сер. мат. I989. Т.53. № 4. С.833-850. 3. С к а с к і в О.Б. Про центральний показник абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле //Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. I993. Вип. 2. С. 35-40. 4. С т р е л и ц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Вильнюс: Минтис, I972. 5. Ш е р е м е т а М.Н. О производной целого ряда Дирихле //Мат. сб. I988. Т.I37 /I79/. № I /9/. С. I28-I39. 6. D o e t s c h G. Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden // Math. Zeitschr. 1920. Bd.8. S.237-240.

Стаття надійшла до редколегії I5.05.94

УДК 5I7.53

Я.Я.Притула

ПРО МАКСИМУМ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

I. Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ і $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n > 0\}$. Не важко показати, що $M_f(r) = \mu_f(r(1+o(1)))$, $r \longrightarrow \infty$, а це співвідношення використовується в загальній теорії функцій, особливо у працях Б.В.Винницького [1-3].