Залишилось скористатись лемою, що є наслідком теореми 2.2.25 [4, с. 274].

Лема 2. Нехай $F \in H(\Lambda)$. Якщо $\lambda = \varliminf_{\sigma \to -0} \ln L(\sigma)/\ln \frac{1}{|\sigma|} > 1$, то співвідношення /4/ справджується при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E_1$ - скінченної логарифмічної міри, тобто $\int_{E_1 \cap [-1;0)} \frac{1}{|\sigma|} d\sigma < +\infty$) для всіх s таких, що виконується умова /5/.

Зауважимо тепер, що при виконанні умов теореми $\lambda \geq \varrho > 1$, тому скориставшись лемами I і 2, одержимо, що співвідношення /2/ справджується при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E \cup E_1$). Для завершення доведення теореми залишилось зауважити, що

$$\int_{E_1 \cap [-R,0)} \frac{1}{|\sigma|} d\sigma \geq \frac{1}{R} \operatorname{meas}(E_1 \cap [-R;0))$$

і тому

$$d(E \cup E_1) = 0.$$

I. Д а г е н е Е. О центральном показателе ряда Дирихле // Лит. мат. сб. I968. Т.8. № 3. С. 503-520. 2. С к а с к и в О.Б. К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции //Изв. АН СССР. Сер. мат. I989. Т.53, № 4. С.833-850. 3. С к а с к і в О.Б. Про центральний показник абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле //Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. I993. Вип. 2. С. 35-40. 4. С т р е л и ц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Вильнюс: Минтис, I972. 5. Ш е р е м е т а М.Н. О производной целого ряда Дирихле //Мат. сб. I988. Т.I37 /I79/. № I /9/. С. I28-I39. 6. D o e t s c h G. Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden // Math. Zeitschr. 1920. Bd.8. S.237-240.

Стаття надійшла до редколегії I5.05.94

УДК 5I7.53

Я.Я.Притула

ПРО МАКСИМУМ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

I. Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ і $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n > 0\}$. Не важко показати, що $M_f(r) = \mu_f(r(1+o(1)))$, $r \longrightarrow \infty$, а це співвідношення використовується в загальній теорії функцій, особливо у працях Б.В.Винницького [1-3].

Безпосереднім узагальненням цілої функції є цілий /абсолютно збіжний в $\mathbb{C}$/ ряд Діріхле

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s=\sigma+it, \qquad /1/$$

де послідовність $\Lambda=(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ – невід"ємна і зростаюча до $+\infty$. Клас таких функцій F позначимо через $S(\Lambda)$, і нехай $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|: t\in\mathbb{R}\}$, а $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n): n\in\mathbb{Z}_+\}$ – максимальний член ряду /1/. Аналог наведеного вище співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом цілої функції для цілого ряду Діріхле /1/ має вигляд

$$M(\sigma,F)=\mu(\sigma+o(1),F), \quad \sigma\longrightarrow\infty. \qquad /2/$$

Це співвідношення виконується /1/, якщо $\ln n=o(\lambda_n)$, $n\longrightarrow\infty$. Тому природним є поставлене Б.В.Винницьким питання про істотність останньої умови для виконання співвідношення /2/. Відповідь на це питання, при $\tau=0$, випливає з такої теореми.

Теорема 1. Нехай $\tau\in[0,+\infty)$. Для того щоб для кожної функції $F\subset S(\Lambda)$ справджувалось співвідношення

$$M(\sigma,F)\le\mu(\sigma+\tau+o(1),F), \quad \sigma\longrightarrow\infty \qquad /3/$$

необхідно і досить, щоб

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln n=\tau. \qquad /4/$$

З теореми 1 бачимо, що якщо $\ln n=O(\lambda_n)$, $n\to\infty$, то $M(\sigma,F)\le\mu(2\sigma,F)$ для всіх досить малих σ. Якщо ж

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln n=\infty, \qquad /5/$$

то не можна вказати сталої $A\subset[1,+\infty)$, такої, щоб для кожної $F\subset S(\Lambda)$ виконувалась нерівність $M(\sigma,F)\le\mu(A\sigma,F)$ для всіх $\sigma\ge\sigma_0$. Про це свідчить така теорема.

Теорема 2. Для кожної послідовності Λ, яка задовольняє умову /5/, і сталої $A\in[1,+\infty)$ існують функція $F\in S(\Lambda)$ і зростаюча до $+\infty$ послідовність (σ_j), такі, що

$$M(\sigma_j,F)\ge\mu(A\sigma_j,F). \qquad /6/$$

2. При доведенні теорем 1 і 2 використовуємо лему, доведену М.М.Шереметою [6].

Лема 1. З кожної послідовності Λ, для якої

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}>\Lambda>0$$

можна виокремити підпослідовність $\Lambda^* = (\Lambda_k^*)$ таку, що

$$\ln k \leq A\lambda_k^* + 1 \qquad /7/$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$ і

$$\ln k_j \geq A\lambda_{k_j}^* \qquad /8/$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Нам потрібне також одне узагальнення леми 1.

Лема 2. Якщо послідовність Λ задовольняє умову /5/, то існують додатна повільно зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція ψ і підпослідовність $\Lambda^* = (\lambda_k^*) \subset \Lambda$, такі, що

$$\ln k \leq \lambda_k^* \psi(\lambda_k^*) + 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad /7'/$$

і

$$\ln k_j \geq \lambda_{k_j}^* \psi(\lambda_{k_j}^*) \qquad /8'/$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел. Дійсно, з умови /5/ випливає існування додатної повільно зростаючої до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функції ψ такої, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n \psi(\lambda_n)} > 1. \qquad /9/$$

Подальше доведення леми 2 таке ж, як і доведення леми 1. Досить усюди в [6] замість Λ ставити $\psi(\lambda_k)$.

3. Доведемо теорему 1. У праці [5, с. 184] показано, що якщо виконується умова /4/, то для кожного $\varepsilon > 0$ при $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$ справедлива нерівність $M(\sigma, F) \leq \mu(\sigma + \tau + \varepsilon, F)$, і отже, достатність умови /4/ доведена.

Припустимо тепер, що умова /4/ не виконується, тобто

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} = R > \tau.$$

Тоді, якщо $\tau < A < B$, то за лемою 1 існує підпослідовність $\Lambda^* = (\lambda_k^*)$ послідовності Λ, для якої виконуються нерівності /7/ і /8/. Приймемо $a_n = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda_k^*$ і $a_n = a_k^*$ при $\lambda_n = \lambda_k^*$, де $a_k^* = \exp\{-\lambda_k^* \ln \lambda_k^*\}$. Так прийдемо до ряду Діріхле

$$F_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\lambda_k \ln \lambda_k + s\lambda_k\},$$

де, для простоти, $\lambda_k = \lambda_k^*$. Оскільки $\ln k = O(\lambda_k^*)$, $k \to \infty$, то цей ряд Діріхле є цілим.

Легко бачити і це добре відомо, що $\ln \mu(\sigma, F_1) \leq \exp(\sigma - 1)$. Далі, якщо приймемо $q_j = [\frac{1}{2} k_j]$, то завдяки /7/ і /8/,

$$\lambda_{q_j} \geq \frac{1}{A}(\ln q_j - 1) \geq \frac{1}{A}(\ln k_j - 3) \geq \frac{1}{A}(A\lambda_{k_j} - 3) = \lambda_{k_j} - \frac{3}{A}.$$

Тому

$$M(\sigma, F_1) \geq \sum_{q_j \leq k \leq k_j} \exp\{-\lambda_k \ln \lambda_k + \sigma\lambda_k\} \geq$$

$$\geq \frac{k_j}{2} \exp\{-\lambda_{k_j} \ln \lambda_{k_j} + \sigma\lambda_{q_j}\} \geq$$

$$\geq \frac{k_j}{2} \exp\{-\lambda_{k_j} \ln \lambda_{k_j} + \sigma\lambda_{k_j} - \frac{3\sigma}{A}\},$$

і отже,

$$M(\sigma, F_1) \geq \exp\{-\lambda_{k_j} \ln \lambda_{k_j} + (\sigma + A)\lambda_{k_j} - \frac{3\sigma}{A} - \ln 2\}.$$

Якщо тепер виберемо $\sigma_j = \ln \lambda_{k_j} - A + 1 \ (j \geq j_0)$, то матимемо

$$\ln M(\sigma_j, F_1) \geq \lambda_{k_j} - \frac{3\sigma_j}{A} - \ln 2 =$$

$$= \exp\{\sigma_j + A - 1\} - \frac{3\sigma_j}{A} - \ln 2 \geq$$

$$\geq \ln \mu(\sigma_j + A, F_1) - \frac{3\sigma_j}{A} - \ln 2.$$

Оскільки $\frac{1}{\sigma} \ln \mu(\sigma, F) \longrightarrow +\infty \ (\sigma \longrightarrow \infty)$ для кожного цілого ряду Діріхле і $\ln \mu(\sigma, F)$ –опукла функція, то $\ln \mu(\sigma_j + A) + O(\sigma) = \ln \mu(\sigma_j + A + o(1))$, $\sigma \to \infty$. Тому

$$\ln M(\sigma_j, F_1) \geq \ln \mu(\sigma_j + A + o(1), F_1), \quad j \longrightarrow \infty,$$

тобто для функції F_1 співвідношення /3/ не виконується. Теорема 1 доведена.

4. Нарешті, доведемо теорему 2. Нехай функція ψ і послідовність $\Lambda^* \subset \Lambda$ такі, як у лемі 2. Як і при доведенні теореми 1, приймемо $a_n = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda_k^*$ і $a_n = a_k^*$ при $\lambda_n = \lambda_k^*$, де $a_k^* = \exp\{-(1+q)\lambda_k^* \psi(\lambda_k^*)\}$, $q > 0$ – довільне число, вибір якого зробимо пізніше. Таким чином, прийдемо до ряду

$$F_2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-(1+q)\lambda_k \psi(\lambda_k) + \sigma\lambda_k\},$$

де, для простоти, $\lambda_k = \lambda_k^*$. Завдяки /8'/ цей ряд Діріхле є цілим

Зрозуміло, що $\ln \mu(\sigma, F_2) \leq \max\{\Psi(t) : t \geq 0\}$, де $\Psi(t) = -(1+q)t\psi(t) + \sigma t$. Оскільки $\Psi'(t) = -(1+q)\psi(t) - (1+q)\psi'(t)t + \sigma$ і ψ – повільно зростаюча функція, то

$$\ln \mu(\sigma, F_2) \leq t_0\{-(1+q)\psi(t_0(\sigma))+\sigma\} = (1+q)\psi'(t_0(\sigma))t_0^2(\sigma),$$

де $t_0(\sigma)$ – розв"язок рівняння $\psi(t)+t\psi'(t) = \frac{\sigma}{1+q}$. Легко бачити, що $\psi(t_0(\sigma)) \leq \frac{\sigma}{1+q}$, тобто $t_0(\sigma) \leq \psi^{-1}(\frac{\sigma}{1+q})$, і отже,

$$\ln \mu(\sigma, F_2) \leq (1+q)\frac{t_0(\sigma)\psi'(t_0(\sigma))}{\psi(t_0(\sigma))}\psi(t_0(\sigma))t_0(\sigma) =$$

$$= o\left(\sigma\psi^{-1}\left(\frac{\sigma}{1+q}\right)\right), \quad \sigma \longrightarrow +\infty \tag{10}$$

З іншого боку, якщо (k_j) – послідовність з леми 2, то, як і при доведені теореми 1,

$$M(\sigma, F_2) \geq \frac{k_j}{2}\exp\{-\lambda_{k_j}(1+q)\psi(\lambda_{k_j})+\sigma\lambda_{q_j}\},$$

де $q_j = [\frac{1}{2}k_j]$ і, завдяки /7'/ і /8'/,

$$\lambda_{q_j} \geq \frac{\ln q_j - 1}{\psi(\lambda_{q_j})} \geq \frac{\ln k_j - 3}{\psi(\lambda_{k_j})} \geq \lambda_{k_j} - \frac{3}{\psi(\lambda_{k_j})}.$$

Отже, завдяки /8'/,

$$\ln M(\sigma, F_2) \geq -(1+q)\lambda_{k_j}\psi(\lambda_{k_j}) + \sigma\lambda_{k_j} - \frac{3\sigma}{\psi(\lambda_{k_j})} +$$

$$+\lambda_{k_j}\psi(\lambda_{k_j}) - \ln 2 = (\sigma\lambda_{k_j} - q\lambda_{k_j}\psi(\lambda_{k_j})) - \frac{3\sigma}{\psi(\lambda_{k_j})} - \ln 2. \tag{11}$$

Приймемо $\sigma_j = \eta\psi(\lambda_{k_j})$, де η – довільне число, $\eta > q$, вибір якого також зробимо пізніше. Тоді з /10/ і /11/ маємо

$$\ln M(\sigma_j, F_2) \geq (q-\eta)\lambda_{k_j}\psi(\lambda_{k_j}) - 3\eta - \ln 2 =$$

$$= (q-\eta)\frac{\sigma_j}{\eta}\psi^{-1}\left(\frac{\sigma_j}{\eta}\right) - 3\eta - \ln 2 =$$

$$= \frac{q-\eta}{1+q}\,\frac{\sigma_j(1+q)}{\eta}\,\psi^{-1}\left(\frac{\sigma_j}{1+q}\,\frac{1+q}{\eta}\right) - 3\eta - \ln 2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{\varepsilon}\ln \mu\left(\frac{\sigma_j(1+q)}{\eta}, F_2\right), \quad \sigma \geq \sigma_0(\varepsilon),$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число. І якщо візьмемо $\varepsilon = 1$, $\eta = 2q$ і $q = \frac{1}{2A-1}$, то звідти отримаємо /6/. Теорема 2 доведена.

На завершення зауважимо, що залишається відкритим питання, чи можна в нерівності /6/ замість сталої A поставити $\alpha(\sigma_1)$, де α - зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція.

1. Винницкий Б.В. О представлении функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(\lambda_n z)$ //Укр.мат.журн. 1979. Т.31. № 3. С. 256-265. 2. Винницький Б.В. О рядах по системе $\{f(\lambda_n z)\}$ // Мат. заметки. 1987. Т.29. №4. С.503-516. 3. Винницкий Б.В. Об описании базисов из обобщенных систем экспонент //Мат. сб. 1988. Т.135 /177/. № 1. С. 59-79. 4. Винницкий Б.В., Шеремета М.М. Асимптотична поведінка коефіцієнтів рядів Діріхле, що задають цілі функції //Укр. мат. журн. 1975. Т. 27. № 2. С. 147-157. 5. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536 с. 6. Шеремета М.М. Про одне співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом цілого ряду Діріхле // Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. 1994. Вип. 3. С. 78-83.

Стаття надійшла до редколегії 05.10.94

УДК 531

П.П.Доманський

ПРО УМОВИ СТІЙКОСТІ РУХУ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА ДВОМА МІРАМИ

При дослідженні стійкості руху пружних систем найчастіше застосовують методику заміни шуканих функцій зліченною, або, наближено, скінченною кількістю параметрів. У цьому напрямі одержана велика кількість результатів, які систематизовані в монографіях [1-3, 8].

У даній праці вивчаються умови стійкості руху пружних тіл за двома мірами на основі теорем прямого методу Ляпунова для процесів з розподіленими параметрами [4-7].

Розглянемо пружне тіло K - систему неперервно розподілених взаємодіючих матеріальних точок. Задамося деякою фіксованою конфігурацією цього тіла, яку назвемо початковою. Місце частинки в цій початковій конфігурації будемо задавати радіус-вектором $\vec{r}_0$ - неперервною і потрібною кількістю разів диференційованою векторфункцією $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(q^1, q^2, q^3) \equiv \vec{r}_0(q)$, де $\{q^i\}$ - лагранжеві координати. Рух тіла у будь-який момент часу τ задається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3, \tau) \equiv \vec{r}(q, \tau)$. Цим визначається актуальна конфігурація тіла.

Область тіла і поверхню, що його обмежує, в початковій конфігурації позначимо через X_0 і ∂X_0, а в актуальній конфігурації - через X і ∂X відповідно. Густину матеріалу в початковій